BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1. Konsep dasar teori antrian

Sistem antrian dapat digambarkan sebagai kedatangan dari pendatang-pendatang untuk dilayani, menunggu untuk dilayani, jika pelayanan tidak segera dilaksanakan dan jika telah menunggu untuk dilayani kemudian meninggalkan sistem sesudah selesai pelayanan. Enam karakteristik dasar yang menetapkan sistem antrian antara lain; sumber masukan, pola kedatangan, pola pelayanan, disiplin antrian, kapasitas sistem, dan tingkat pelayanan, *(Siagian P., 1987).*

2.1.1. Sumber masukan

Sumber masukan (*input*) adalah kumpulan orang atau barang dimana satuan-satuan datang atau dipanggil untuk dilayani. Kumpulan orang atau barang ini boleh berhingga atau tidak berhingga.

Dalam praktek, sumber adalah berhingga. Akan tetapi, dalam suatu populasi yang besar, sumber dianggap tidak berhingga. Untuk keperluan analisis sering lebih mudah menggunakan sumber tidak berhingga sebagai dasar perhitungan. Dalam kebanyakan kasus sumber berhingga, satuan-satuan kembali membentuk populasi sumber begitu pelayanan sudah selesai. Untuk jumlah langganan (sumber) yang jumlahnya terbatas, perhitungannya lebih sulit, karena jumlah unit dalam sistem antrian akan mempengaruhi jumlah langganan potensial

di luar sistem pada setiap waktu. Bagaimanapun, asumsi jumlah yang terbatas ini tetap harus dibuat jika sumber input yang menurunkan atau menghasilkan unit-unit yang memerlukan layanan ini jelas dipengaruhi oleh jumlah unit dalam sistem antrian.

Pola statistik dari unit-unit yang memerlukan pelayanan ini harus juga ditentukan. Dalam hal ini, asumsi yang bisa digunakan adalah unit-unit yang mengikuti proses Poisson, artinya sampai suatu waktu tertentu jumlah unit yang diturunkan ini mempunyai distribusi Poisson. Hal ini adalah suatu kasus dimana kedatangan pada sistem antrian terjadi secara acak atau random, tetapi dengan tingkat rata-rata tertentu. Asumsi berikutnya adalah bahwa distribusi kemungkinan dari waktu antar kedatangan (*inter-arrival time*) adalah distribusi eksponensial.

2.1.2. Pola kedatangan

Pola kedatangan merupakan suatu distribusi dari suatu rata-rata laju kedatangan yaitu rata-rata jumlah kedatangan per sejumlah unit waktu atau rata-rata waktu antar kedatangan. Salah satu faktor penting dari pola kedatangan yaitu kemungkinan bahwa pelanggan masuk ke dalam sistem lebih dari satu pada suatu waktu. Dalam hal ini input atau masukan ini dikatakan terjadi dalam distribusi Poisson, yaitu masukan ke dalam suatu sistem dengan kedatangan satu per satu secara acak pada suatu selang waktu atau ruang.

2.1.3. Pola pelayanan

Pola pelayanan merupakan suatu distribusi dari suatu rata-rata pelayanan, yaitu rata-rata jumlah pelanggan yang dilayani per sejumlah unit waktu, atau sebagai waktu yang dibutuhkan untuk melayani seorang pelanggan.

Ada tiga aspek yang mempengaruhi dalam mekanisme pola pelayanan yaitu; tersedianya pelayanan, kapasitas pelayanan dan lama berlangsungnya pelayanan. Ketiganya merupakan variabel bebas dan boleh jadi sudah tetap atau mungkin tidak. Ketiganya dapat dibedakan sebagai berikut :

2.1.3.1. Tersedianya pelayanan

Mekanisme pelayanan tidak selalu tersedia untuk setiap saat. Misalnya dalam pertunjukan bioskop, loket penjualan karcis masuk hanya dibuka pada waktu tertentu antara satu pertunjukan dengan pertunjukan berikutnya. Sehingga pada saat loket ditutup, mekanisme pelayanan terhenti dan petugas pelayanan (pelayan) istirahat.

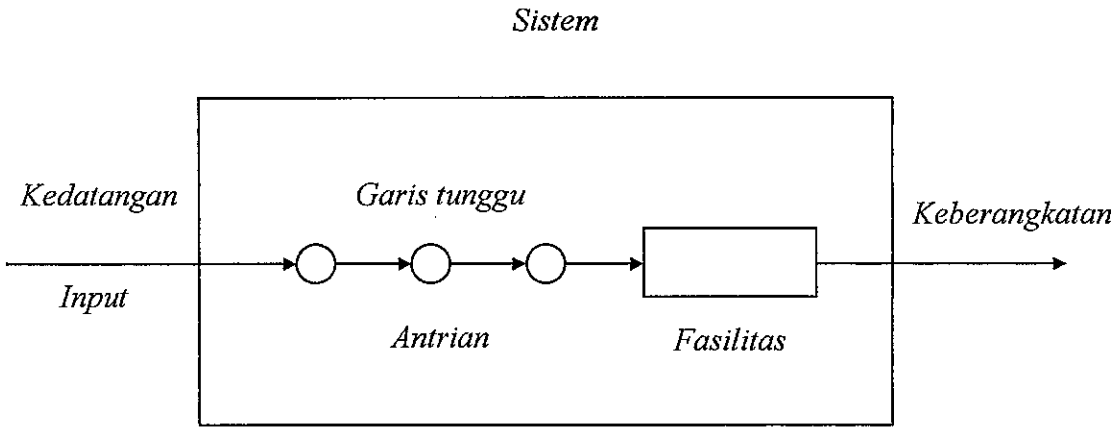
2.1.3.2. Kapasitas pelayanan

Kapasitas dari mekanisme pelayanan diukur berdasarkan jumlah langganan (satuan) yang dapat dilayani secara bersama-sama. Kapasitas pelayanan tidak selalu sama untuk setiap saat, ada yang tetap, tapi ada juga yang berubah-ubah. Karena itu, fasilitas pelayanan dapat memiliki satu atau lebih saluran pelayanan. Fasilitas yang mempunyai satu saluran disebut saluran tunggal atau sistem pelayanan tunggal dan fasilitas yang mempunyai lebih dari satu saluran disebut saluran ganda atau pelayanan ganda.

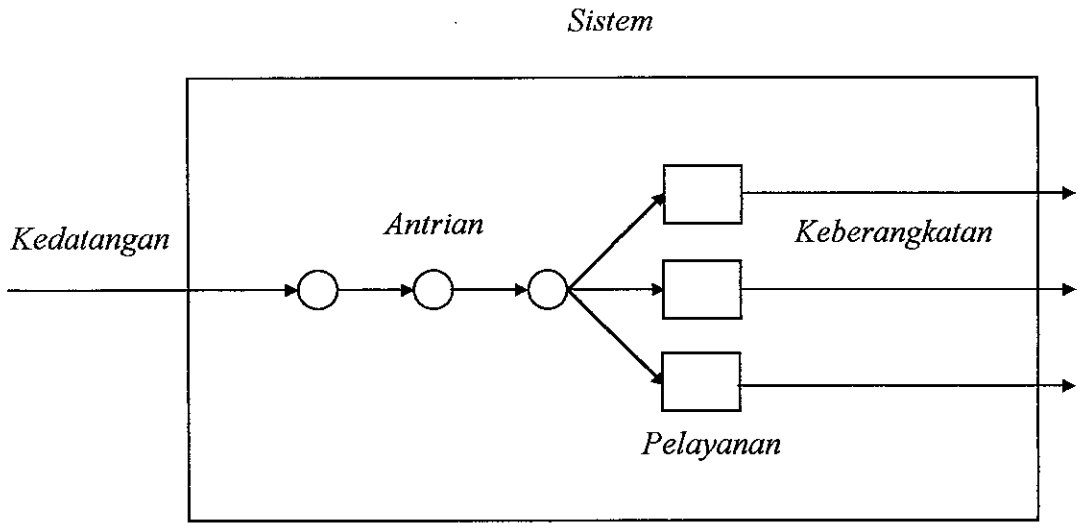
2.1.3.3. Lama berlangsungnya pelayanan

Lamanya pelayanan adalah waktu yang dibutuhkan untuk melayani seorang langganan atau satu satuan. Ini harus dinyatakan secara pasti. Oleh karena itu, waktu pelayanan boleh tetap dari waktu ke waktu untuk semua langganan atau boleh juga berupa variabel acak. Umumnya dan untuk keperluan analisis, waktu pelayanan dianggap sebagai variabel acak yang terpencar secara bebas dan sama dan tidak tergantung pada waktu kedatangan.

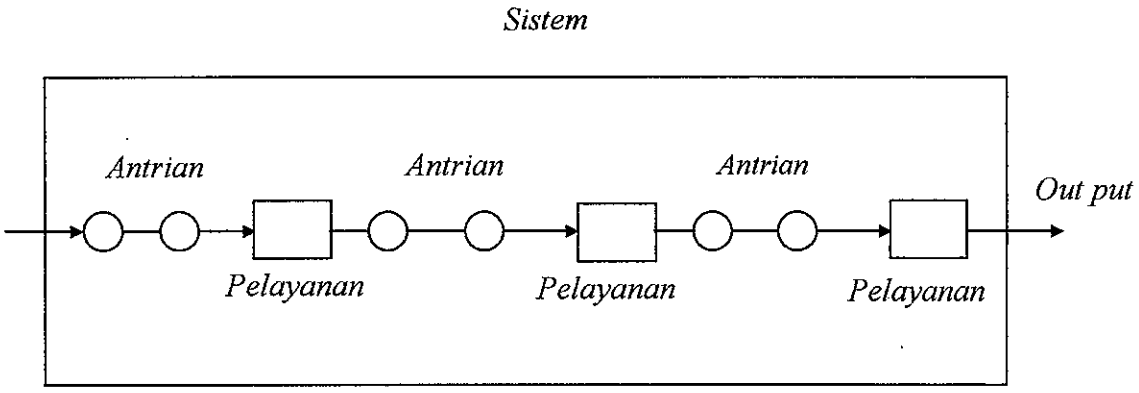
Berdasarkan ketiga sifat ini dan kombinasi dari padanya membentuk bermacam-macam bentuk sistem antrian, diantaranya:



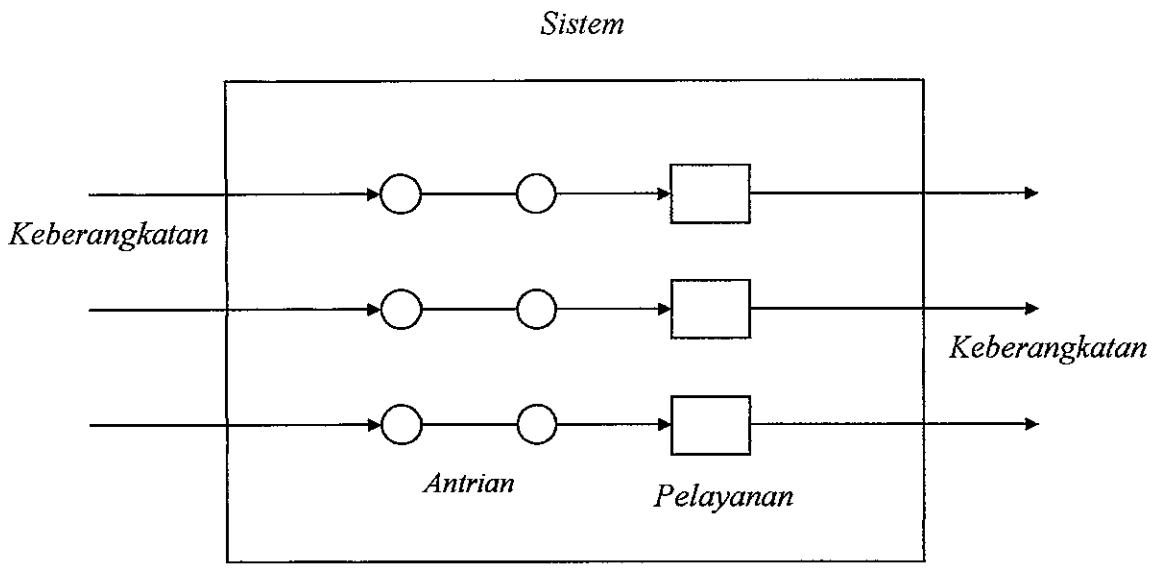
Gambar (2.1): Antrian tunggal, pelayanan tunggal



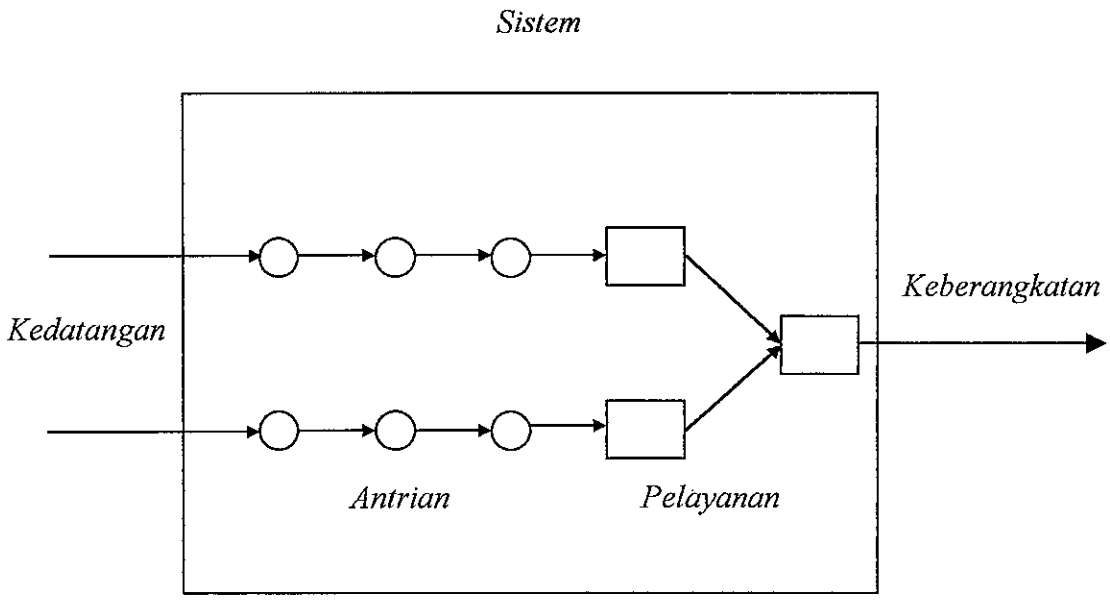
Gambar (2.2): Antrian tunggal, pelayanan ganda sejajar



Gambar (2.3): Antrian tunggal, pelayanan ganda dalam seri



Gambar (2.4): Antrian ganda, pelayanan ganda



Gambar (2.5): Antrian ganda, pelayanan ganda

2.1.4. Disiplin antrian

Kebiasaan ataupun kebijakan dimana para langganan dipilih dari antrian untuk dilayani, disebut displin pelayanan. Ada empat bentuk disiplin pelayanan yang biasa digunakan dalam praktek, yaitu ;

1. *First come first serve* (FCFS) atau *first-in first out* (FIFO) artinya, lebih dulu datang (sampai) lebih dulu dilayani. Misalnya antri beli tiket bioskop.
2. *Last come first served* (LCFS) atau *last-in first-out* (LIFO) artinya, yang tiba terakhir yang lebih dulu keluar. Misalnya, sistem antrian dalam elevator (lift) untuk lantai yang sama.
3. *Service in random order* (SIRO) artinya, panggilan didasarkan pada peluang secara random, tidak soal yang lebih dulu tiba.
4. *Priority service* (PS) artinya, prioritas pelayanan diberikan kepada mereka yang mempunyai prioritas lebih tinggi dibandingkan dengan mereka yang mempunyai prioritas lebih rendah, meskipun yang terakhir ini kemungkinan sudah lebih dahulu tiba dalam garis tunggu. Kejadian seperti ini kemungkinan disebabkan oleh beberapa hal, misalnya seorang keadaan penyakitnya lebih berat dibanding dengan orang lain dalam suatu tempat praktek dokter. Mungkin juga, karena kedudukan atau jabatan seseorang menyebabkan dia dipanggil terlebih dahulu atau diberi prioritas lebih tinggi. Demikian juga bagi seorang yang menggunakan waktu pelayanan yang lebih sedikit diberi prioritas dibanding dengan mereka yang memerlukan pelayanan lebih lama, tidak soal siapa yang

lebih dahulu masuk dalam garis tunggu. Contoh-contoh diatas merupakan sebagian kecil dari prioritas pelayanan yang sering dijumpai dalam keadaan yang sesungguhnya.

2.1.5. Kapasitas sistem

Kapasitas sistem adalah batasan fisik terhadap jumlah pelanggan di suatu sistem antrian ditambah dengan pelanggan yang sedang menerima pelayanan. Dengan adanya kapasitas sistem antrian maka di saat sistem antrian mencapai panjang tertentu untuk selanjutnya tidak ada lagi pelanggan diijinkan masuk sampai ruangan siap bagi suatu penyelesaian pelayanan.

2.1.6. Tingkat pelayanan

Tingkat pelayanan merupakan tahap-tahap untuk melaksanakan suatu pelayanan di dalam suatu sistem antrian. Tingkat pelayanan dapat merupakan tingkat pelayanan tunggal (*single stage*) atau pelayanan ganda (*multi stage*).

2.2. Terminologi dan notasi

Terminologi dan notasi yang digunakan adalah sebagai berikut;

1. keadaan sistem : jumlah pelanggan (unit) dalam sistem
2. panjang antrian : jumlah pelanggan (unit) yang menunggu pelayanan sama dengan jumlah pelanggan dalam sistem dikurangi dengan jumlah unit yang sedang dilayani.

E_n : keadaan dimana ada n kedatangan unit pada sistem antrian

$P_n(t)$: peluang atau kemungkinan bahwa ada tepat n kedatangan unit pada sistem antrian pada saat t

c : jumlah pelayan (untuk saluran pelayanan paralel) pada sistem antrian

λ_n : kecepatan pertibaan rata-rata dalam satu satuan waktu

μ_n : kecepatan pelayanan rata-rata dalam satu satuan waktu

Jika λ_n adalah konstan untuk semua n, maka dapat ditulis sebagai λ. Jika μ_n konstan untuk semua $n \geq 1$, maka dapat ditulis μ. Disini $\mu_n = c\mu$ jika $n \geq c$ sehingga seluruh pelayan (sejumlah c) sibuk. Dalam hal ini $1/\lambda$ menyatakan ekspektasi waktu diantara kedatangan, sedangkan $1/\mu$ menyatakan ekspektasi waktu pelayanan dan $\rho = \lambda/c\mu$ adalah faktor penggunaan (utilisasi) untuk fasilitas pelayanan, yaitu ekspektasi perbandingan dari waktu sibuk para pelayan.

Jika suatu sistem antrian telah mulai berjalan, keadaan sistem (jumlah unit dalam sistem) akan sangat dipengaruhi oleh state (keadaan) awal dan waktu yang telah dilalui. Dalam keadaan seperti ini, sistem dikatakan dalam kondisi *transient*, yaitu kondisi dimana di waktu permulaan, sistem baru terjadi antrian atau jumlah kedatangan lebih besar dari pada jumlah pelayanan ($\lambda > \mu$). Tetapi, lama-kelamaan keadaan sistem akan independen terhadap state awal tersebut, dan juga terdapat waktu yang dilaluinya. Keadaan sistem seperti ini dikatakan berada dalam kondisi *steady-state* yaitu keadaan diamana $\mu > \lambda$ atau laju pelayanan lebih besar daripada rata-rata laju kedatangan.

Notasi-notasi berikut ini digunakan untuk sistem dalam keadaan kondisi *steady-state*;

L ; ekspektasi panjang garis (jumlah pelanggan dalam sistem)

L_q ; ekspektasi panjang antrian (jumlah pelanggan dalam antrian)

W ; ekspektasi waktu menunggu dalam sistem (termasuk waktu pelayanan)

W_q ; ekspektasi waktu menunggu dalam antrian (tidak termasuk waktu pelayanan)

Contoh;

1. Dalam suatu antrian karcis dengan suatu fasilitas tunggal dicatat bahwa rata-rata satu orang pelanggan datang adalah setiap 3 menit sedang rata-rata waktu pelayanan yang dibutuhkan oleh setiap pelanggan adalah 2 menit maka;

$$\lambda = \frac{\text{jumlah pelanggan}}{\textit{waktu}\ \text{selama kedatangan}} = \frac{1}{3}\,\text{orang}/\textit{menit} = 20\,\text{orang}/\textit{jam}$$

$$\mu = \frac{\text{jumlah pelanggan}}{\textit{waktu}\ \text{pelayanan}} = \frac{1}{2}\,\text{orang}/\textit{menit} = 30\,\textit{orang}/\textit{jam}$$

2. Di sebuah gedung pertunjukan hanya terdapat satu loket penjualan. Penonton yang datang untuk membeli tiket mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata 30 orang per jam. Waktu yang diperlukan untuk melayani seorang pembeli berdistribusi eksponensial dengan rata-rata 90 detik, maka;

$$\lambda = \frac{30\,orang}{1\,jam} = \frac{30\,orang}{60 menit} = \frac{1}{2} orang/menit$$

$$\mu = \frac{1}{90} = \frac{1}{90/60} = \frac{2}{3} orang/menit$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$$

2.3. Distribusi dan notasi Kendall

2.3.1. Proses Poisson dan distribusi eksponensial

Model antrian diasumsikan bahwa waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan berdasarkan pada distribusi eksponensial atau equivalen pada rata-rata kedatangan yang mengikuti distribusi Poisson, *(Donald G. 1974).*

Dianggap suatu proses kedatangan memenuhi tiga asumsi dibawah ini:

(i) kemungkinan terjadi satu kedatangan antara waktu t dan $\{t + \Delta t\}$ adalah $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$

$\Pr\{$ kedatangan yang terjadi antara t dan $t + \Delta t\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$

dengan λ adalah konstanta yang independen dengan $N(t)$ dimana $N(t)$ adalah jumlah kedatangan sampai waktu t dengan $N(0) = 0$ dan $\Delta(t)$ adalah elemen penambah waktu, sedangkan $o(\Delta t)$ banyaknya kedatangan yang biasa diabaikan jika dibandingkan dengan Δt, dengan $\Delta t \to 0$ yaitu:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

(ii) Pr { terjadi lebih dari satu kedatangan antara t dan $t + \Delta t$ }= $o(\Delta t)$

(iii) jumlah kedatangan pada interval waktu yang berurutan adalah independen, dalam proses ini mempunyai penambahan yang bebas.

Dua theorema berdasarkan asumsi-asumsi tersebut yaitu:

Theorema 1.

Untuk suatu proses Poisson, jumlah kedatangan yanng terjadi pada interval waktu t adalah variabel random yang mengikuti suatu distribusi Poisson dengan parameter λt dan kemungkinan dari n kedatangan adalah $\dfrac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$

Bukti:

Misal $P_n(t) =$ kemungkinan dari n kedatangan pada interval waktu t dimana n = 0,1,2,3,... Dalam interval waktu dengan panjang $t + \Delta t$ kemungkinan terjadi n kadatangan dapat dinyatakan dengan mengembangkan persamaan differensial yang mengikuti:

$P_n(t + \Delta t) =$ Pr { n kedatangan pada saat t dan 0 dalam Δt } + Pr { n – 1 kedatangan pada saat t dan 1 dalam Δt } + Pr { n – 2 kedatangan pada saat t dan 2 dalam Δt } + ... + Pr { 0 kedatangan pada saat t dan n dalam Δt } dengan $n \geq 1$ .. (2.3.1)

Dengan menggunakan asumsi (i), (ii), (iii) diatas maka persamaan (2.3.1) menjadi:

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)[1 - \lambda \Delta t - 0(\Delta t)] + P_{n-1}(t)[\lambda \Delta t + o(\Delta t)] +$$

$$P_{n-2}(t)o(\Delta t) + \ldots + P_0(t)o(\Delta t)$$

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)[1-\lambda\Delta t - o(\Delta t)] + P_{n-1}(t)[\lambda\Delta t + o(\Delta t)] + o(\Delta t) \quad \ldots(2.3.2)$$

$o(\Delta t)$ menyatakan suku-suku Pr { $n-j$ kedatangan pada saat t dan j kedatangan dalam Δt , $2 \le j \le n$ }

Pada saat $n = 0$ didapat

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)[1-\lambda\Delta t - o(\Delta t)] + o(\Delta t) \quad \ldots (2.3.3)$$

Persamaan (2.3.2) dan (2.3.3) ditulis kembali dengan menggabungkan semua bentuk yang memuat $o(\Delta t)$ didapat:

$$P_0(t+\Delta t) - P_0(t) = -\lambda\Delta t P_0(t) - P_0(t)o(\Delta t) + o(\Delta t)$$

$$= -\lambda\Delta t P_0(t) + o(\Delta t) \quad \ldots (2.3.4)$$

dan

$$P_n(t+\Delta t) - P_n(t) = -P_n(t)\lambda\Delta t - P_n(t)o(\Delta t) + P_{n-1}(\Delta t)\lambda\Delta t + P_{n-1}(t)o(\Delta t) + o(\Delta t)$$

$$= -P_n(t)\lambda\Delta t + P_{n-1}(\Delta t)\lambda\Delta t + o(\Delta t) \quad (n \ge 1) \quad \ldots (2.3.5)$$

Persamaan (2.3.4) dan (2.3.5) dibagi dengan Δt dan diambil $\lim \Delta t \to 0$ diperoleh:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left[\dfrac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{-\lambda\Delta t P_0(t)}{\Delta t} + \dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right] = -\lambda P_0(t) + \dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left[\dfrac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{-\lambda\Delta t P_n(t)}{\Delta t} + \dfrac{\lambda\Delta t P_{n-1}(t)}{\Delta t} + \dfrac{0(\Delta t)}{\Delta t}\right] \end{cases}$$

$$= -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \qquad n \ge 1$$

atau dapat ditulis

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \qquad \ldots (2.3.6)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \qquad \ldots (2.3.7)$$

Dari persamaan (2.3.6)

Untuk $n = 0$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_0(t)}{P_0(t)} = -\lambda dt$$

$$\ln P_0(t) = -\lambda t$$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

dari persamaan (2.3.7)

untuk $n = 1$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_1(t) = \lambda$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_1(t)) = \lambda$$

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

Untuk $n = 2$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -\lambda P_2(t) + \lambda P_1(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda P_2(t) = \lambda P_1(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda P_2(t) = \lambda \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_2(t) = \lambda^2 t$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_2(t)) = \lambda^2 t$$

$$e^{\lambda t} P_2(t) = \int \lambda^2 t dt$$

$$P_2(t) = \frac{\lambda^2 t^2 e^{-\lambda t}}{2} = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}$$

Sampai $n = 3$ diperoleh:

$$\begin{cases} P_0(t) = e^{-\lambda t} \\ P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} \\ P_2(t) = \dfrac{\lambda t^2}{2!} e^{-\lambda t} \\ P_3(t) = \dfrac{(\lambda t)^3}{3!} e^{-\lambda t} \end{cases} \qquad \text{... (2.3.8)}$$

Sehingga dapat diambil suatu rumus umum yaitu:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \qquad n \geq 0 \qquad \text{... (2.3.9)}$$

Terbukti bahwa kemungkinan dari n kedatangan adalah $\dfrac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$

Theorema 2.

Jika kedatangan mengikuti proses Poisson maka suatu varibel random waktu antar kedatangan berurutan mengikuti distribusi eksponensial.

Bukti:

Jika suatu kumpulan variabel random waktu antara dua kedatangan berurutan dimisalkan T.

$$\Pr\{T \geq t\} = \Pr\{\text{ tidak ada kedatangan dalam waktu t}\} = P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Misal diambil $F(t)$ sebagai fungsi distribusi kumulatif dari T didapat:

$$F(t) = \Pr\{T \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

maka fungsi densitas $f(t)$ diberikan oleh:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} \qquad \text{... (2.3.10)}$$

Dengan demikian berdasarkan pada lampiran tabel distribusi maka waktu antar kedatangan berurutan mempunyai distribusi eksponensial dengan rata-rata $\frac{1}{\lambda}$. Jika rata-rata waktu antar kedatangan adalah $\frac{1}{\lambda}$ maka dilihat bahwa rata-rata kedatangan adalah λ.

2.3.2. Distribusi waktu pelayanan

Definisi 1.

Yang dimaksud dengan waktu pelayanan adalah waktu yang diperlukan untuk memberikan pelayanan kepada satu pelanggan.

Misal *g(t)* dengan $t > 0$ merupakan fungsi densitas probabilitas dari waktu pelayanan. Probabilitas tidak ada pelayanan selama selang waktu (0,*T*) adalah equivalen dengan probabilitas tidak ada kepergian selama selang waktu (0,*T*).

Pr{ waktu pelayanan $t > T$ }= Pr{tidak ada kepergian selama waktu t}

$$1 - \int_0^T g(t)dt = P_j(T) = e^{-\mu t}$$

$$g(t)dt = 1 - e^{-\mu t}$$

$$g(t) = \mu e^{-\mu t}$$

Fungsi densitas probabilitas dari waktu pelayanan adalah

$$g(t) \begin{cases} \mu e^{-\mu t} & \text{, untuk } t > 0 \\ 0 & \text{, untuk } t \leq 0 \end{cases}$$

Jadi berdasarkan pada lampiran tabel distribusi, maka distribusi waktu pelayanannya eksponensial dengan rata-rata $\frac{1}{\mu}$ dan varian $\frac{1}{\mu^2}$.

2.3.3. Distribusi Gamma

Misal $t_1, t_2, ..., t_m$ adalah *m* variabel-variabel random waktu pelayanan yang berdistribusi eksponensial dengan parameter μ.

Maka $\sum_{i=1}^{m} t_i$ mempunyai distribusi Gamma dengan $\alpha = m$ dan $\beta = 1/\mu$.

Sehingga berdasarkan pada lampiran tabel distribusi, maka distribusi Gamma mempunyai fungsi densitas probabilitas yang berbentuk;

$$f(t) = \frac{(\mu m)^m}{(m-1)!} t^{m-1} e^{-m\mu t} \quad \text{untuk} \quad t \geq 0$$

Sedangkan nilai ekspetasi dan varian untuk t adalah;

$$E[t] = \frac{1}{\mu} \text{ dan } Var[t] = \frac{1}{m\mu^2}$$

Distribusi di atas disebut sebagai distribusi Gamma yang dalam teori antrian biasa disebut sebagai distribusi Erlang, dimana μ dan m adalah parameter-parameter distribusi yang berharga positif.

2.3.4. Notasi Kendall

Untuk menggambarkan suatu proses antrian digunakan suatu notasi yang disebut notasi Kendall. Proses antrian digambarkan oleh suatu barisan simbol dan garis miring.

Bentuk umum: (A/ B/C) ; (D/ E/ F)

Dimana;

A = distribusi waktu antar kedatangan

B = distribusi waktu pelayanan

C = jumlah paralel saluran pelayanan

D = bentuk disiplin antrian

E = batas kapasitas sistem

F = besarnya populasi masukan

Beberapa simbol standar dari karakteristik-karakteristik ini dapat dituliskan dalam tabel berikut ini :

Kemungkinan simbol dalam antrian

KARAKERISTIK	SIMBOL	KETERANGAN
Distribusi antar kedatangan (A)	M	Eksponensial
	D	Deterministik
	Em	Erlang Tipe *m* (*m* = 1, 2, ...)
	GI	*General Independent*
Distribusi waktu pelayanan (B)	M	Ekponensial
	D	Deterministik
	Em	Erlang Tipe *m* (*m* = 1, 2, ...)
	G	*General*
Jumlah pelayanan (C)		1, 2, 3, ...∞
Disiplin Antrian (D)	FIFO	*First-in first- out*

	LIFO	*Last-in first-out*
	SIRO	*Service Order Random Order*
	PRI	*Priority*
	GD	*General Dicipline*
Batas kapasitas sistem (E)		1, 2, 3, …,∞
Besarnya Populasi masukan (F)		1, 2, 3, …,∞

<u>*Contoh*</u> :

Notasi ($M / M / 2$) ; (FIFO / ∞ / ∞)

Menyatakan suatu proses antrian dengan waktu antar kedatangan dan pelayanan Eksponensial, dua pelayanan paralel, disiplin Antrian FIFO, tidak ada batas jumlah maksimal dalam sistem dan besar populasi masukan tak berhingga. Di dalam banyak situasi, hanya tiga simbol pertama yang digunakan. Dalam prakteknya tiga simbol yang kedua diabaikan, sistem pendatang yang pertama masuk menjadi yang pertama keluar (D = FIFO), tidak ada batas yang ditentukan (E = ∞), dan besar populasi masukan tak berhingga (F = ∞).

2.4. Fungsi pembangkit

2.4.1. Fungsi pembangkit

Definisi 2.

Jika $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ adalah barisan bilangan riil dan G(z) = $\sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ ada, maka *G(z)* disebut fungsi pembangkit dari barisan $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Fungsi pembangkit dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial, yaitu dapat menyelesaikan persamaan korespondensi untuk fungsi pembangkit dengan menjabarkan ekspansi deretnya dan kemudian mendapatkan koefisien-koerfisien $\{g_n\}$, dimana g_n adalah suatu distribusi probabilitas dari variabel random nonnegatif diskrit sehingga $Pr\{N=n\}=g_n$ dan z^n adalah fungsi dari variabel random *N*.

Contoh ;

Akan menentukan fungsi pembangkit $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ dari g_n dimana ;

$$g_{n+2} - 2g_{n+1} + g_n = a \quad \text{(n= 1, 2, 3, ...)dengan syarat batas } g_0 = g_1 = 0$$

Penyelesaian:

Pertama kalikan seluruh suku dengan z^n dan kemudian dijumlahkan dari 0 sampai ∞ dan diperoleh ;

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_{n+2}z^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1}z^n + \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} az^n$$

$$z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} g_{n+2}z^{n+2} - 2z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1}z^{n+1} + G(z) = \frac{a}{1-z}$$

$$z^{-2}\{\sum_{n=-2}^{\infty} g_{n+2}z^{n+2} - g_0z^0 - g_1z^1\} - 2z^{-1}\{\sum_{n=-1}^{\infty} g_{n+1}z^{n+1} - g_0z^0\} + G(z) = \frac{a}{1-z}$$

$$z^{-2}[G(z) - g_1 - g_0] - 2z^{-1}[G(z) - g_0] + G(z) = \frac{a}{1-z}$$

Gunakan syarat batas, kemudian diperoleh bahwa ;

$$z^{-2}G(z) - 2z^{-1}G(z) + G(z) = \frac{a}{1-z}$$

$$G(z)\{z^{-2} - 2z^{-1} + 1\} = \frac{a}{1-z}$$

$$G(z) = \frac{a}{(1-z)(z^{-2} - 2z^{-1} + 1)} = \frac{a}{(1-z)z^{-2}(1 - 2z + z^2)} = \frac{az^2}{(1-z)(1-z)^2}$$

$$= \frac{az^2}{(1-z)^3}$$

Kemudian diekspansikan sisi kanan ke persamaan tersebut dalam deret pangkat untuk memperoleh koefisien-koefisiennya yaitu, (g_n).

Diketahui deret geometri yang diberikan oleh ;

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{untuk } 0 < z < 1$$

Kemudian ambil derivatif kedua dari dua sisinya sehingga diperoleh

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2} = \frac{2}{(1-z)^3}$$

Oleh karena itu

$$G(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{az^2}{2} n(n-1)z^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{an(n-1)}{2} z^n$$

Jadi fungsi pembangkit dari g_n adalah $G(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{an(n-1)}{2} z^n$

maka diperoleh koefisien dari z^n yaitu $\left(\frac{an(n-1)}{2}\right)$ oleh karena itu

$$g_n = \frac{an(n-1)}{2}$$

2.4.2. Fungsi pembangkit probabilitas

Definisi 3.

Jika f_n adalah suatu distribusi probabilitas dari variabel random nonnegatif diskrit sehingga $\Pr\{N = n\} = fn$ (n = 0, 1, 2, ...) maka

$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ disebut fungsi pembangkit probabilitas karena fungsi pembangkit ini membentuk probabilitas $\{f_n\}$.

Selanjutnya dari $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ maka

$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Pr\{N=n\}z^n = E[z^n]$ dengan $E[z^n]$ adalah ekspektasi dari fungsi z^n dari varibel random N kemudian didapatkan bahwa $F(1)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n = 1$ dari *F(z)* yang diberikan dari derivatif I dan derivatif II

$F'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n f_n z^{n-1}$ dan

$F''(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) f_n z^{n-2}$ maka ekspektasi $E[N]$ disajikan sebagai

$E[N]=\sum_{n=0}^{\infty} n f_n = F'(1)$ oleh karena itu

$E[N(N-1)]=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) f_n = F''(1)$ maka

$E[N^2]=E[N(N-1)]+E[N]=F''(1)+F'(1)$

Sehingga varian N disajikan sebagai

$Var[N]=E[N^2]-[E(N)]^2=F''(1)+F'(1)-[F'(1)]^2$

Contoh :

Andaikan diketahui fungsi pembangkit probabilitas sebagai berikut $F(z) = e^{-\lambda} e^{\lambda z}$ maka akan ditentukan rataan, varian, dan distribusi probabilitasnya

Penyelesaian:

Rataan μ dalam fungsi pembangkit probabilitas diperoleh sebagai

$$\mu = F'(z) = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda z} \,|_{z=1} = 1$$

$$= e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda$$

Sedangkan untuk menemukan variannya digunakan differensial kedua

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) f_n = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 f_n - n f_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 f_n - \sum_{n=0}^{\infty} n f_n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 f_n - \mu$$

Sehingga varian σ^2 dapat diberikan sebagai

$$\sigma^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 f_n - \mu^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, f_n + \mu - \mu^2$$

$$= F''(1) + \mu - \mu^2 = \left[e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda z} \right]_{z=1} + \lambda - \lambda^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Untuk mendapatkan distribusi probabilitas sepenuhnya disini dapat dengan cara menemukan ekspansi deret pangkat *F(z)*, yaitu:

$$F(z) = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda z)^n}{n!}$$

Oleh karena itu koefisien dari z^n adalah $\frac{e^{\lambda} \lambda^n}{n!}$ maka $f_n = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$ merupakan suatu distribusi Poisson.

2.4.3. Fungsi pembangkit momen

Definisi 4.

Fungsi pembangkit momen (f.p.m) dari peubah acak X didefinisikan dengan $M_x(t) = E[e^{tx}]$

$$\text{Jadi } M_x[t] = E[e^{tx}] = \begin{cases} \int e^{tx} f(x)dx \text{ , jika } x \text{ kontinyu} \\ \\ \sum_x e^{tx} f(x) \text{ , jika } x \text{ diskret} \end{cases}$$

Contoh:

Akan menentukan fungsi pembangkit momen peubah acak eksponensial X dan menunjukkan bahwa $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ dan $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

Penyelesaian:

Dari definsi fungsi pembangkit momen dan diketahui bahwa fungsi densitas dari distribusi eksponensial adalah $f(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, maka diperoleh:

$$M_x[t] = E[e^{tx}] = \int e^{tx} f(x)dx = \int_0^\infty {}^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda - t)x} dx = \frac{\lambda}{(\lambda - t)}$$

Jadi fungsi pembangkit momen dari distribusi eksponensial adalah $\frac{\lambda}{(\lambda - t)}$

dan $\quad M_x'[t] = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}$

$$M_x''[t] = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

$E[X]$ diporoleh dari;

$$E[X] = M_x'[0] = \frac{\lambda}{(\lambda - 0)^2} = \frac{1}{\lambda}$$

Dan

$$E[X^2] = M_x''[0] = \frac{2\lambda}{(\lambda - 0)^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Sehingga

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

terbukti bahwa distribusi eksponensial mempunyai $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ dan $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$