BAB II

MATERI PENUNJANG

Tujuan bab ini adalah untuk memperkenalkan konsep peluang pada garis riil, variabel acak X dan vektor acak **X** atau variabel acak X berdimensi-n, mendefinisikan dan menggambarkan distribusi peluang dan fungsi distribusi, fungsi kepadatan serta fungsi karakteristiknya.

Selain itu dalam bab ini akan dijelaskan beberapa definisi tentang distribusi stabil dari variabel acak dan sifat-sifat variabel acak stabil. Dari sifat-sifat variabel acak stabil ini nantinya dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa variabel acak X mempunyai distribusi stabil *simetris* atau distribusi stabil *tegas*.

2.1. Peluang Kejadian pada Garis Riil

Ruang sampel $\Im$ terdiri dari himpunan seluruh bilangan riil, atau himpunan titik-titik pada garis riil. Karena tidak mungkin untuk mendefinisikan seluruh subyek dari ruang sampel $\Im$, maka ruang peluang pada garis riil dapat dipandang sebagai kejadian untuk seluruh interval $x_1 \leq x \leq x_2$ beserta takberhingga terhitung gabungan dan irisannya. Semua kejadian pada garis riil dari himpunan $\Im$ ini didefinisikan sebagai himpunan Borel yang memuat seluruh titik-titik pada selang terbuka dan tertutup.

Definisi 2.1.1 :

Jika f(x) adalah suatu fungsi kontinu sedemikian sehingga,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \text{ untuk } f(x) \geq 0 \qquad (2.1.1)$$

maka peluang kejadian $\{X \leq x_i\}$ adalah

$$P\{X \leq x_i\} = \int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx \qquad (2.1.2)$$

Bentuk ini juga dapat menentukan peluang seluruh kejadian dalam ruang sampel $\Im$. Misalnya, dapat dihitung peluang $\{x_1 < X \leq x_2\}$ yang terdiri dari titik-titik pada selang (x_1,x_2) dengan

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \qquad (2.1.3)$$

2.2. Variabel Acak

Variabel acak adalah suatu bilangan X(ξ) yang ditetapkan pada setiap hasil suatu eksperimen (ξ). Bilangan ini dapat merupakan perolehan pada permainan untung-untungan, voltase suatu sumber acak, harga suatu komponen acak atau kuantitas numerik lain yang menjadi perhatian pada hasil eksperimen

Definisi 2.2.1

Suatu variabel acak X adalah proses penentuan bilangan X(ξ) untuk setiap ξ. Fungsi yang dihasilkan harus memenuhi 2 syarat di bawah ini,

1. Himpunan $\{X \leq x\}$ adalah kejadian untuk setiap x
2. Peluang kejadian $\{X = \infty\}$ dan $\{X = -\infty\}$ sama dengan nol

   $P\{X = \infty\} = 0$, $P\{X = -\infty\} = 0$

Syarat kedua menyatakan bahwa, meskipun diperbolehkan X berharga $+\infty$ atau $-\infty$ untuk suatu hasil, namun tetap diharapkan agar hasil-hasil tersebut membentuk himpunan dengan peluang nol.

2.2.1. Fungsi Distribusi

Elemen-elemen himpunan yang termuat dalam kejadian $\{X \leq x\}$ berubah, untuk sebarang x . Akibatnya peluang $\{X \leq x\}$ adalah bilangan yang bergantung pada x. Bilangan ini dinyatakan dengan $F_X(x)$ atau F(x) , yang disebut sebagai fungsi distribusi (kumulatif) variabel acak X.

Definisi 2.2.1.1

Fungsi distribusi variabel acak X adalah fungsi

$$F(x) = P\{X \leq x\} \qquad (2.2.1)$$

yang didefinisikan untuk setiap x dari $-\infty$ sampai ∞.

Untuk variabel acak kontinu, fungsi distribusinya disebut juga sebagai fungsi distribusi peluang, mengingat (2.1.1) dan (2.1.2), maka fuingsi distribusi peluang untuk seluruh kejadian adalah sama dengan satu. Sehingga (2.2.1) dapat ditulis sebagai,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \text{ untuk } f(x) \geq 0.$$

contoh 2.1

Misalkan bahwa variabel acak X adalah sedemikian hingga $X(\xi) = a$ untuk setiap ξ dalam a ($X : \xi \rightarrow a$). Selanjutnya akan ditentukan fungsi distribusinya.

- Bila $x \geq a$ maka $X(\xi) = a \leq x$ untuk setiap ξ. Karena itu

  $$F(x) = P\{X \leq x\} = P(a) = 1, \quad x \geq a$$

- Bila $x < a$ maka $\{X \leq x\}$ adalah kejadian mustahil , karena $X(\xi) = a$. Sehingga

  $$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{\phi\} = 0, \quad x < a.$$

2.2.2. Fungsi kepadatan

Fungsi kepadatan f(x) merupakan turunan dari fungsi distribusi F(x), yaitu

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{2.2.3}$$

dikenal juga sebagai fungsi frekuensi variabel acak X.

Dari (2.2.1), F(x) dapat dipandang sebagai bentuk integral,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \qquad (-\infty < x < \infty),$$

untuk $f(x) \geq 0$.

2.3. Vektor acak

Suatu vektor acak adalah vektor

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{2.3.1}$$

dimana komponen-komponen X_i adalah variabel acak.

Definisi 2.3.1

Fungsi distribusi vektor acak (2.3.1) atau variabel acak berdimensi-n , didefinisikan sebagai,

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n). \qquad (2.3.2)$$

Fungsi kepadatan gabungan variabel acak X_i didefinisikan sebagai,

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1, \ldots, \partial x_n} \qquad (2.3.3)$$

Fungsi distribusi (2.3.2) dapat dinyatakan sebagai,

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dx_n \qquad (2.3.2)$$

untuk $f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$

Fungsi kepadatan peluang untuk setiap variabel acak X_i disebut sebagai *fungsi kepadatan marginal.*

2.4. Fungsi Karakteristik

Sangat sering menggunakan sebuah fungsi tertentu dalam mendapatkan momen-momen dari sebuah distribusi peluang. Fungsi tertentu ini disebut fungsi *pembangkit momen* $M_X(\theta)$, yang didefinisikan sebagai nilai harapan dari $e^{\theta X}$. Secara matematis digambarkan,

$$M_X(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta X} f(x)\, dx, \quad \text{untuk X kontinu.} \qquad (2.4.1)$$

Untuk distribusi-distribusi peluang tertentu, fungsi pembangkit momennya mungkin tidak ada untuk seluruh nilai riil dari θ. Dalam permasalahan ini dapat digunakan fungsi karakteristik $\Phi(\theta)$, didefisikan sebagai nilai harapan dari $e^{i\theta X}$. Selanjutnya fungsi eksponensial $e^{i\theta X}$ ini didefinisikan sebagai,

$$e^{i\theta X} = \cos\theta X + i\sin\theta X$$

dimana θ bernilai riil dan $i^2 = -1$.

Fungsi karakteristik $\Phi(\theta)$ dari variabel acak X ini adalah transformasi Fourier dari fungsi kepadatan f(x) dan digunakan untuk menyederhanakan operasi yang meliputi variabel acak X, atau biasa disebut sebagai penaksiran momen X, dan reduksi konvolusi diantara dua kepadatan untuk perkalian transformasinya.

Definisi 2.4.1

Fungsi karakteristik variabel acak X didefinisikan dengan

$$\Phi(\theta) = E\{\exp i\,\theta X\} \tag{2.4.2}$$

merupakan nilai ekspektasi fungsi komplek $e^{i\theta X} = \cos\theta X + i\sin\theta X$ dan diberikan dalam bentuk integral

$$\Phi(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} f(x)dx. \tag{2.4.3}$$

Dari bentuk di atas dengan menggunakan rumus inversi transformasi Fourier terlihat bahwa

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\theta)\exp(-i\theta X)\,d\theta.$$

Fungsi karakteristik kedua variabel acak X, didefinisikan sebagai

$$\psi(\theta) = \ln \Phi(\theta). \tag{2.4.4}$$

2.4.1. Fungsi Karakteristik Gabungan (Bivariat)

Fungsi karakteristik gabungan variabel acak X_1 dan X_2 didefinisikan sebagai integral

$$\Phi(\theta_1,\theta_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) \exp i(\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2)\, dx_1\, dx_2. \tag{2.4.5}$$

Dari bentuk di atas dan rumus inversi dimensi dua untuk transformasi Fourier terlihat bahwa

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\theta_1,\theta_2) \exp(-i(\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2))\, d\theta_1\, d\theta_1. \tag{2.4.6}$$

Menurut (2.4.2), fungsi karakteristik gabungan gabungan dua variabel acak X_1 dan X_2 (2.4.5) dapat dinyatakan sebagai,

$$\Phi(\theta_1,\theta_2) = E\{\exp i(\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2)\}. \tag{2.4.7}$$

Logaritma fungsi karakteristik gabungan didefinisikan dengan,

$$\Psi(\theta_1,\theta_2) = \ln \Phi(\theta_1,\theta_2) \tag{2.4.8}$$

sebagai fungsi karakteristik gabungan kedua variabel acak X_1 dan X_2.

Fungsi karakteristik marginalnya adalah,

$$\Phi_{x1}(\theta) = E\{\exp i\theta X_1\} \text{dan } \Phi_{x2}(\theta) = E\{\exp i\theta X_2\}.$$

2.4.2. Fungsi Karakteristik Vektor Acak

Fungsi karakteristik vektor acak atau fungsi karakteristik variabel acak berdimensi-n, didefinisikan sebagai fungsi

$$\Phi(\theta) = E\{\exp i\theta \mathbf{X}\} = E\{\exp i(\theta_1 X_1 + \ldots + \theta_n X_n\} \tag{2.4.9}$$

dimana $\Phi(\theta) = \Phi(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$.

Sebagai aplikasi akan ditunjukkan bahwa bila variabel acak X_i independen dengan kepadatan masing-masing $f_i(x_i)$, maka kepadatan $f_Z(Z)$ jumlahan $Z = X_1 + ... + X_n$ sama dengan konvolusi kepadatan X_i

$$f_Z(Z) = f_1(z) * \ldots * f_n(z) \tag{2.4.10}$$

2.5. Distribusi Stabil

Definisi 2.5.1

Variabel acak X dikatakan mempunyai distribusi stabil jika semuaA, B > 0, maka ada C > 0 , dan D adalah riil sedemikian sehingga

$$AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D, \tag{2.5.1}$$

dengan $C^\alpha = A^\alpha + B^\alpha$, untuk $\alpha \in (0, 2]$.

X_1 dan X_2 adalah salinan independen dari X.

" $\stackrel{d}{=}$ " adalah notasi untuk persamaan distribusi.

Variabel acak X mempunyai distribusi stabil *tegas* jika (2.5.1) terpenuhi dengan D = 0. Dan mempunyai distribusi *simetris* jika $X \stackrel{d}{=} -X$.

Contoh 2.2

Jika X variabel acak Gaussian dengan mean μ dan varian v^2 ($X \sim N(\mu, v^2)$), maka X stabil dengan $\alpha = 2$, mengingat

$$AX_1 + BX_2 \sim N((A+B)\,\mu,\,(A^2+B^2)\,\nu^2),$$

sehingga (2.5.1) terpenuhi dengan $C = (A^2+B^2)^{1/2}$ dan $D = (A+B-C)\,\mu$.

Definisi 2.5.2.

Variabel acak X dikatakan mempunyai distribusi stabil jika untuk setiap $n \geq 2$, dengan C_n adalah bilangan positif dan D_n adalah bilangan riil sedemikian sehingga

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n \qquad (2.5.2)$$

dengan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah salinan independen dari X.

Definisi 2.5.3

Variabel acak X dikatakan mempunyai distribusi stabil jika paramater $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$, dan μ riil sehingga fungsi karakteristiknya mempunyai bentuk :

$$E\exp\ i\theta X = \begin{cases} \exp\left\{-\sigma^{\alpha}|\theta|^{\alpha}\left(1 - i\beta(\text{sign}\,\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu\theta\right\} & \text{jika } \alpha \neq 1 \\ \exp\left\{-\sigma|\theta|\left(1 + i\beta\frac{2}{\pi}(\text{sign}\,\theta)\ln|\theta|\right) + i\mu\theta\right\} & \text{jika } \alpha = 1 \end{cases} \qquad (2.5.3)$$

Parameter α adalah indeks kestabilan dan

$$\text{sign}\ \theta = \begin{cases} 1 & \text{jika } \theta > 0, \\ 0 & \text{jika } \theta = 0, \\ -1 & \text{jika } \theta < 0. \end{cases} \qquad (2.5.4)$$

Parameter σ, β dan μ adalah unik .

2.6. Sifat-sifat Variabel Acak Stabil

Sifat 2.6.1

Misalnya X_1 dan X_2 variabel acak dengan $X_i \sim S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \mu_i)$, i =1, 2, ...

maka $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, dengan

$$\sigma = (\sigma_1{}^\alpha + \sigma_2{}^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \beta = \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha} \text{ dan } \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Bukti :

Untuk $\alpha \neq 1$

Karena, $X_1 \sim S_\alpha(\sigma_1, \beta_1, \mu_1)$

$X_2 \sim S_\alpha(\sigma_2, \beta_2, \mu_2)$, maka

menurut definisi 2.5.3, fungsi karakteristiknya berbentuk sebagai berikut :

$$E \exp i\theta X_1 = \exp\{-\sigma_1{}^\alpha |\theta|^\alpha [1 - i\beta_1 (\text{sign } \theta) \tan\frac{\pi\alpha}{2}] + i\theta\mu_1\}$$

$$E \exp i\theta X_2 = \exp\{-\sigma_2{}^\alpha |\theta|^\alpha [1 - i\beta_2 (\text{sign } \theta) \tan\frac{\pi\alpha}{2}] + i\theta\mu_2\}.$$

Maka fungsi karakteristik untuk jumlahan variabel acak $X_1 + X_2$ menjadi

$E \exp i\theta (X_1 + X_2) = (E \exp i\theta X_1)(E \exp i\theta X_2)$

$\ln E \exp i\theta (X_1 + X_2) = \ln (E \exp i\theta X_1) + \ln (E \exp i\theta X_2)$

$$= -(\sigma_1{}^\alpha + \sigma_2{}^\alpha)|\theta|^\alpha + i|\theta|^\alpha \text{sign}(\theta)(\tan\frac{\pi\alpha}{2})(\beta_1\sigma_1{}^\alpha + \beta_2\sigma_2{}^\alpha) + i\theta(\mu_1 + \mu_2)$$

$$= -(\sigma_1{}^\alpha + \sigma_2{}^\alpha)|\theta|^\alpha \left[1 - i\frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha} \text{sign}(\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right] + i\theta(\mu_1 + \mu_2)$$

$$E \exp i\theta(X_1 + X_2) = \exp \{-(\sigma_1{}^\alpha + \sigma_2{}^\alpha)|\theta|^\alpha \ [\ 1-i\frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha} \text{sign}(\theta) \tan\frac{\pi\alpha}{2}]$$

$$+ i\theta(\mu_1 + \mu_2).$$

Sehingga mmemenuhi

$$X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu),$$

dengan, $\sigma = (\sigma_1{}^\alpha + \sigma_2{}^\alpha)^{1/\alpha}$, $\beta = \dfrac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}$ dan $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

Untuk bukti $\alpha = 1$, digunakan cara yang sama menurut definisi 2.5.3.

Sifat 2.6.2

Misalnya $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ dan untuk bilangan riil *a*, maka $X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$.

Bukti :

Untuk $\alpha \neq 1$,

Dengan menggunakan sifat 2.6.1 diketahui, fungsi karakteristik jumlahan X + a adalah

$$E \exp i\theta(X + a) = (E \exp i\theta X)(E \exp i\theta a)$$

$$\ln E \exp i\theta(X + a) = \ln(E \exp i\theta X) + \ln(E \exp i\theta a)$$

$$= -\sigma^\alpha |\theta|^\alpha [1 - i\beta\ (\text{sign}\ \theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}] + i\theta\mu + i\theta a$$

$$= -\sigma^\alpha |\theta|^\alpha [\ 1 - i\beta\ (\text{sign}\ \theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}] + i\theta(\mu + a)$$

$$E \exp i\theta(X + a) = \exp\{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha [\ 1 - i\beta\ (\text{sign}\ \theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}] + i\theta(\mu + a)\}$$

Sehingga memenuhi

$$X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a).$$

Untuk bukti $\alpha = 1$, digunakan cara yang sama.

Sifat 2.6.3

Misalnya $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ dan untuk bilangan riil a tidak nol, maka

$$aX \sim S_\alpha(|a|\sigma, \text{sign}(a)\beta, a\mu) \qquad \text{jika } \alpha \neq 1$$

$$aX \sim S_1(|a|\sigma, \text{sign}(a)\beta, a\mu - \frac{2}{\pi}a(\ln|a|\sigma\beta) \qquad \text{jika } \alpha = 1 \tag{2.6.1}$$

Bukti :

Menurut (2.5.3), untuk $\alpha \neq 1$

$$\{E \exp i\theta(aX)\} = \{E \exp i(\theta a)X)\}$$

$$\ln\{E \exp i(\theta a)X\} = -\sigma^\alpha |\theta a|^\alpha (1 - i\beta \,\text{sign}(a\theta)(\tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu(\theta a)$$

$$= -(\sigma|a|)^\alpha |\theta|^\alpha)[1 - i\beta \,\text{sign}(a)\,\text{sign}(\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}] + i(\mu a)\theta$$

Sehingga memenuhi

$$aX \sim S_\alpha(|a|\sigma, \text{sign}(a)\beta, a\mu).$$

Bukti untuk $\alpha = 1$, dengan cara yang sama.

Sifat 2.6.4

Untuk setiap $0 < \alpha < 2$

$$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0) \Leftrightarrow -X \sim S_\alpha(\sigma, -\beta, 0) \tag{2.6.2}$$

β merupakan parameter kemiringan distribusi α-stabil.

Bukti :

Untuk setiap $0 < \alpha < 2$, menurut sifat 2.6.3 dan $\mu = 0$ didapat,

$aX \sim S_\alpha(|a|\sigma, \mathrm{sign}(a)\beta, 0)$.

Jika diketahui $X \sim S_\alpha(|1|\sigma, \mathrm{sign}(1)\beta, 0) = S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$, dengan a =1, maka untuk a = -1 didapat

$-X \sim S_\alpha(|-1|\sigma, \mathrm{sign}(-1)\beta, 0) = S_\alpha(\sigma, -\beta, 0)$.

Begitu sebaliknya, sehingga (2.6.2) terpenuhi.

Sifat 2.6.5

$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ adalah simetris jika dan hanya jika $\beta = 0$ dan $\mu = 0$

Bukti :

$\Rightarrow$ Jika $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ adalah simetris, maka $X \stackrel{d}{=} -X$.

Sehingga diperoleh $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu) = -X \sim S_\alpha(\sigma, -\beta, \mu)$. Menurut sifat 2.6.3

$1\,X \sim S_\alpha(|1|\sigma, \mathrm{sign}(1)\beta, 1\mu) = (-1)X \sim S_\alpha(|-1|\sigma, \mathrm{sign}(-1)\beta, (-1)\mu)$

$$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu) = -X \sim S_\alpha(\sigma, -\beta, -\mu).$$

Persaman tersebut di atas terpenuhi bila $\beta = 0$ dan $\mu = 0$.

$\Leftarrow$ Jika $\beta = 0$ dan $\mu = 0$, mengingat $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0) = -X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$, maka X adalah distribusi simetris.

Sifat 2.6.6

Diberikan $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ dengan $\alpha \neq 1$, maka X adalah stabil tegas (*strictly*) jika dan hanya jika $\mu = 0$.

Bukti :

$\Rightarrow$ Diasumsikan X_1 dan X_2 adalah salinan independen dari X dan sebarang konstanta $A, B > 0$ sedemikian sehingga $AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D$ (definisi 2.5.1).

Karena $AX_1 \sim S_\alpha(|A|\sigma,\ \beta,\ A\mu)$ dan $BX_2 \sim S_\alpha(|B|\sigma,\ \beta,\ B\mu)$, dengan menggunakan sifat 2.6.1, 2.6.2 dan sifat 2.6.3, maka

$$E \exp i\theta (AX_1 + BX_2) = (E \exp i\theta AX_1)(E \exp i\theta BX_2)$$

$$\ln E \exp i\theta (AX_1 + BX_2) = \ln (E \exp i\theta AX_1) + \ln (E \exp i\theta BX_2)$$

$$= -\sigma^\alpha |A\theta|^\alpha [1 - i\beta \operatorname{sign}(A\theta) \tan\frac{\pi\alpha}{2}] + i\theta(A\mu) - \sigma_2{}^\alpha |B\theta|^\alpha [1 - i\beta \operatorname{sign}(B\theta) \tan\frac{\pi\alpha}{2}] + i\theta(B\mu)$$

$$= (-\sigma^\alpha A^\alpha)|\theta|^\alpha + i\beta \operatorname{sign}(A\theta) \tan\frac{\pi\alpha}{2} (\sigma^\alpha A^\alpha)|\theta|^\alpha + i\theta(A\mu) - (\sigma^\alpha B^\alpha)|\theta|^\alpha + i\beta \operatorname{sign}(B\theta) \tan\frac{\pi\alpha}{2} (\sigma^\alpha B^\alpha)|\theta|^\alpha + i\theta(B\mu)$$

Diketahui $\operatorname{sign}(A\theta) = \operatorname{sign}(A)\operatorname{sign}(\theta)$ dan $\operatorname{sign}(B\theta) = \operatorname{sign}(B)\operatorname{sign}(\theta)$, karena A, B positif, maka $\operatorname{sign}(A) = \operatorname{sign}(B) = 1$, sehingga

$$= -\sigma^\alpha (A^\alpha + B^\alpha)|\theta|^\alpha + i\beta \operatorname{sign}(\theta) \tan\frac{\pi\alpha}{2}\ \sigma^\alpha (A^\alpha + B^\alpha)|\theta|^\alpha + i\theta(A+B)\mu$$

$$= -\sigma^\alpha (A^\alpha + B^\alpha)|\theta|^\alpha [1 - i\beta \operatorname{sign}(\theta) \tan\frac{\pi\alpha}{2}] + i\theta(A+B)\mu$$

selanjutnya didapat

$$AX_1 + BX_2 \sim S_\alpha(\sigma\,(A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}, \beta, (A+B)\mu). \tag{2.6.3}$$

Dengan cara yang sama, menurut sifat 2.6.2 dan 2.6.3 didapat

$$CX + D \sim S_\alpha(\sigma\,(A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}, \beta, (A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}\mu + D) \tag{2.6.4}$$

dengan $C = (A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}$.

Mengingat $AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D$, maka (2.6.3) dan (2.6.4) mempunyai distribusi yang sama. Oleh karena itu lokasi parameternya harus sama, yaitu

$$(A+B)\mu = (A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}\mu + D$$

$$(A+B)\mu = C\mu + D$$

$$D = (A+B-C)\mu$$

Sehingga persamaan distribusi dalam (2.5.1) terpenuhi dengan $D = (A+B-C)\mu$. Karena X adalah stabil tegas dengan $D = 0$, maka $\mu = 0$.

$\Leftarrow$ Jika $\mu = 0$, mengingat $D = 0$, maka X adalah stabil tegas.

Akibat 2.6.1

Jika $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ dengan $\alpha \neq 1$, maka $X - \mu$ adalah stabil tegas

Bukti :

Jika $\alpha \neq 1$, dengan menggunakan sifat 2.6.2 didapat

$(X - \mu) \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + (-\mu)) = S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$

Dan menurut sifat 2.6.6, jika $\mu = 0$ mengingat $D = 0$, maka $X - \mu$ adalah stabil tegas.

Sifat 2.6.7

$X \sim S_1(\sigma, \beta, \mu)$ adalah stabil tegas jika dan hanya jika $\beta = 0$

Bukti :

Untuk $\alpha = 1$.

Diasumsikan X_1 dan X_2 salinan independen dari X, dan A>0, B>0 ada bilangan riil D

sedemikian sehingga $AX_1 + BX_2 \overset{d}{=} CX + D$ (definisi 2.5.1), dimana C = A+ B.

Karena $AX_1 \sim S_\alpha(A\sigma, \beta, A\mu)$ dan $BX_2 \sim S_\alpha(B\sigma, \beta, B\mu)$ dengan menggunakan

sifat 2.6.1 dan sifat 2.6.3, maka

$$E \exp i\theta(AX_1 + BX_2) = (E \exp i\theta AX_1)(E \exp i\theta BX_2)$$

$$\ln E \exp i\theta(AX_1 + BX_2) = \ln(E \exp i\theta AX_1) + \ln(E \exp i\theta BX_2)$$

$$= -\sigma|A\theta|(1 + i\beta \frac{2}{\pi}\text{sign}(A\theta)\ln|A\theta|) + i\theta(\mu A) - \sigma|B\theta|(1 + i\beta \frac{2}{\pi}\text{sign}(B\theta)\ln|B\theta|)$$
$$+ i\theta(\mu B).$$

$$= -\sigma A|\theta|[1 + (i\beta \frac{2}{\pi}\text{sign}(\theta)(\ln A + \ln|\theta|)] + i\theta(\mu A)$$
$$-\sigma B|\theta|[1 + (i\beta \frac{2}{\pi}\text{sign}(\theta)(\ln B + \ln|\theta|)] + i\theta(\mu B).$$

$$= -\sigma A|\theta| + [1 + i\beta \frac{2}{\pi}\text{sign}(\theta)\ln A + i\beta \frac{2}{\pi}\text{sign}(\theta)\ln|\theta|] + i\theta(\mu A)$$
$$-\sigma B|\theta| + [1 + i\beta \frac{2}{\pi}\text{sign}(\theta)\ln B + i\beta \frac{2}{\pi}\text{sign}(\theta)\ln|\theta|] + i\theta(\mu B)$$

$$= -\sigma A|\theta| + [1 + i\beta \frac{2}{\pi}\text{sign}(\theta)\ln|\theta|] + i\theta(\mu A - \frac{2}{\pi}\sigma\beta\, \text{sign}(\theta) A\ln A)$$
$$-\sigma B|\theta| + [1 + i\beta \frac{2}{\pi}\text{sign}(\theta)\ln|\theta|] + i\theta(\mu B - \frac{2}{\pi}\sigma\beta\, \text{sign}(\theta) B\ln B)$$

$$= -\sigma(A+B) + [1 + i\beta \frac{2}{\pi}\text{sign}(\theta)\ln|\theta|] + i\theta(\mu(A+B) - \text{sign}(\theta)\frac{2}{\pi}(A\ln A + B\ln B)\sigma\beta)$$

Selanjutnya dipenuhi

$$AX_1 + BX_2 \sim S_1(\sigma\ (A+B),\ \beta,\ \mu(A+B) - \frac{2}{\pi}\sigma\ \beta\ (A \ln A + B \ln B).$$

Dengan cara yang sama, menurut sifat 2.6.3 didapat

$$(A+B)X \sim S_1(\sigma\,(A+B),\ \beta,\ \mu(A+B) - \frac{2}{\pi}\sigma\ \beta\ (A+B \ln(A+B))$$

Karena $X \sim S_1(\sigma, \beta, \mu)$ adalah stabil tegas, maka $D = 0$, sehingga

$$AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} (A+B)X \text{ terpenuhi}$$

jika dan hanya jika,

$$\beta\ (A \ln A + B \ln B) = \beta\ (A+B) \ln(A+B),$$

untuk setiap $A > 0$dan $B > 0$. Jadi ruas kiri dan kanan adalah sama, jika dan hanya jika $\beta = 0$.

Sifat 2.6.8

Bila $1 < \alpha \leq 2$, parameter pergeseran μ sama dengan mean.

Bukti :

$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, untuk $1 < \alpha \leq 2$. Variabel acak X mempunyai mean berhingga. Bila $\alpha = 2$, maka X adalah Gaussian dengan mean μ(sesuai dengan definisi 2.5.3 dengan $\alpha = 2$). Selain itu, $X - \mu$ stabil tegas sesuai dengan akibat 2.6.1. Selanjutnya diasumsikan X_1 dan X_2 dua variabel independen. Menurut definisi 2.5.1, persamaan distribusi

$$A(X_1 - \mu) + B(X_2 - \mu) \stackrel{d}{=} (A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}(X - \mu)$$

terpenuhi untuk A, B > 0.

Dengan memasukkan ekspektasi pada kedua sisi

$$E[A(X-\mu)] + E[B(X-\mu)] = E[(A^{\alpha} + B^{\alpha})^{1/\alpha}(X-\mu)],$$

$$A(EX-\mu) + B(X-\mu) = (A^{\alpha} + B^{\alpha})^{1/\alpha}(EX-\mu),$$

jadi $EX = \mu$, untuk setiap $A>0$, $B > 0$.

Dari keempat parameter α, σ, β dan μ, parameter μ kurang begitu penting karena hanya mempengaruhi lokasi dan sering diasumsikan $\mu = 0$. Parameter kemiringan β, seperti dalam sifat 2.6.4 bahwa distribusi $S_{\alpha}(\sigma, \beta, 0)$ dikatakan mempunyai total kemiringan ke kanan bila $\beta = 1$ dan total kemiringan ke arah kiri bila $\beta = -1$.