BAB II
TEORI PENUNJANG

2.1 BEBERAPA DEFINISI DASAR DALAM GRAPH

Definisi 2.1.1 :

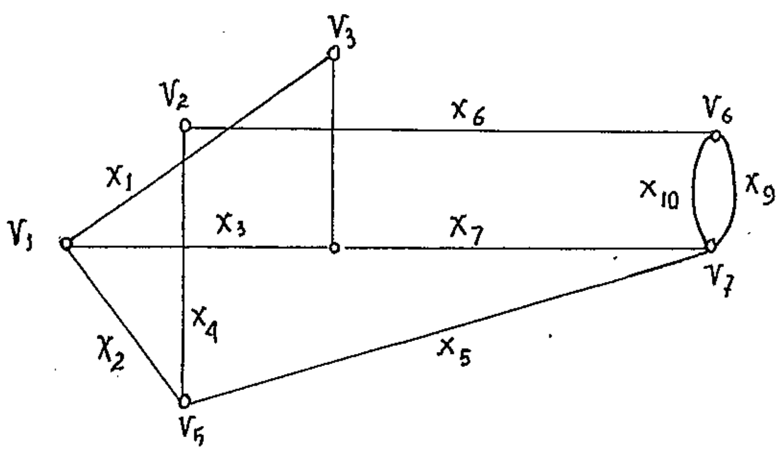
Suatu Graph G = [V,X] adalah suatu himpunan yang terdiri dari titik-titik V = V [G] yang tidak kosong dan berhingga dan himpunan garis -garis X = X (G) berhingga dan boleh kosong.

Contoh :

suatu Graph G = [V,X]

dengan $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 \}$ dan

$X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} \}$

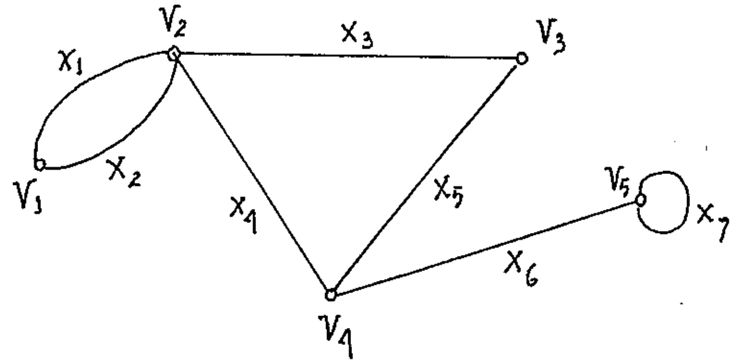


Gambar 2.1.1

Definisi 2.2.2 :

Dua buah garis disebut paralel jika garis tersebut mempunyai dua ujung yang sama dan garis yang kedua titik ujungnya berimpit disebut Loop.

Contoh :



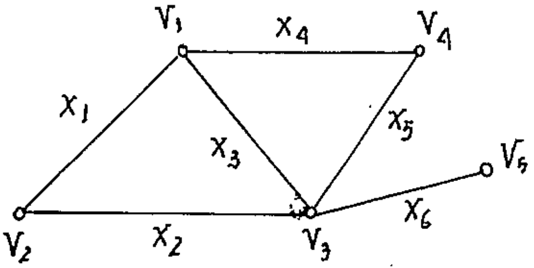
Gambar 2.1.2

Pada gambar 2.1.2, X_1 dan X_2 adalah dua buah garis yang paralel sedang garis X_7 adalah Loop.

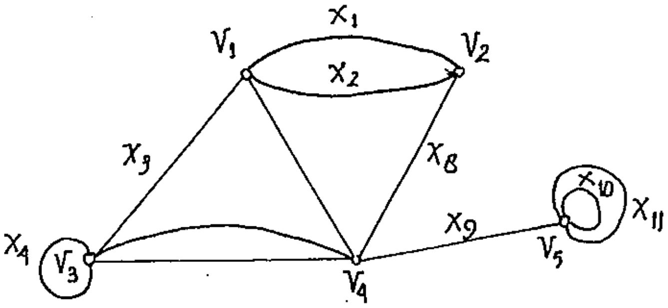
Definisi 2.1.3.

Graph G = (V,X) disebut Simple graph jika tidak memuat garis paralel atau loop. Dan disebut Multigraph jika memuat garis paralel atau loop.

Contoh :



(a) Simple Graph



(b) Multigraph

Gambar 2.1.3.

Definisi 2.1.4.

Dua titik V_1 da V_2 dikatakan adjacent bila titik V_i dan V_j dihubungkan dengan garis.

Dua garis X_i dan X_j dikatakan adjacent bila keduanya mempunyai satu titik persekutuan.

Contoh :

Pada gambar 2.1.3 a, V_1 dan V_2 adjacent
V_1 dan V_4 adjacent
X_1 dan X_3 adjacent
X_1 dan X_4 adjacent

dan seterusnya.

Definisi 2.1.5.

Titik V_i insident dengan garis X_j atau garis X_j insiden dengan titik V_i bila titik V_i merupakan titik ujung dari garis X_j.
Banyaknya garis yang insident pada titik V_i disebut degree V_i dilambangkan dengan $d(V_i)$.
Untuk suatu [p,q] graph, dimana p merupakan banyaknya garis dan q merupakan banyaknya titik berlaku :

$$\Sigma\, dV_i = 2\ q$$

Contoh :

pada gambar 2.1.3 :

$d(V_1) = 3$

$d(V_2) = 2$

$d(V_3) = 4$

$d(V_4) = 2$

$d(V_5) = 1$

sehingga total degree pada gambar 2.1.3 :

$d(V_1) + d(V_2) + d(V_3) + d(V_4) + d(V_5)$

$= 3 + 2 + 4 + 2 + 1$

$= 12$

Akibat dari sifat $\Sigma\, dV_i = 2q$ adalah Lemma dibawah ini

Lemma :

Banyaknya titik dengan degree ganjil pada graph $G = [V,X]$ merupakan bilangan genap.

Bukti :

Himpunan titik-titik V_i dipisahkan menjadi X dan Y dimana X merupakan titik-titik dengan degree ganjil dan Y merupakan titik-titik dengan degree genap, maka persamaan $\Sigma\, dV_i = 2q$ dapat ditulis dalam bentuk :

$\Sigma\, d(V_i) = \Sigma\, d(V_x) + \Sigma\, d(V_y)$

atau

$\Sigma\, d(V_x) = \Sigma\, d(V_i) - \Sigma\, d(V_y)$

Karena selisih dua bilangan genap juga merupakan bilangan genap, maka ruas kiri dari persamaan terakhir merupakan bilangan genap. Selanjutnya karena setiap $d(V_x)$ adalah bilangan ganjil maka banyaknya titik harus genap agar diperoleh jumlah yang hasilnya genap.

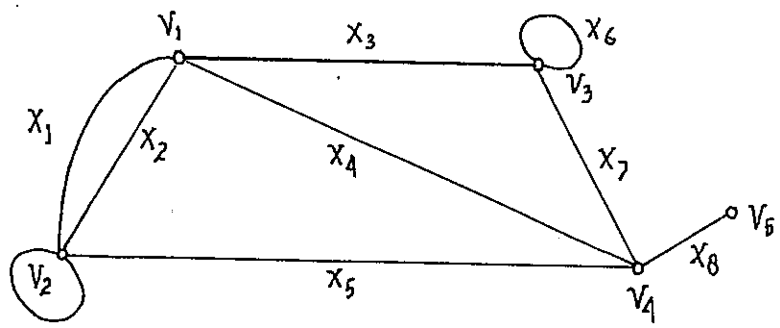
2.2. CONNECTED GRAPH

Definisi 2.2.1 :

Walk adalah deretan titik-titik dan garis-garis secara bergantian, dimulai dan diakhiri dengan titik, dimana setiap garis insident dengan titik dikanan kirinya. Kalau walk tertutup titik awal sama dengan titik akhir.

Walk dimana titik maupun garis tidak boleh diulang disebut path, sedangkan suatu path tertutup yang dimulai dan diakhiri dengan titik yang sama disebut Cycle.

Contoh :



Gambar 2.2.1

Pada gambar 2.2.1 :

"Walk" dari V_1 ke V_5 diambil sebagai berikut :

$V_1\ X_2\ V_2\ X_2\ V_1\ X_3\ V_3\ X_6\ V_3\ X_7\ V_4\ X_8\ V_5$

atau $V_1\ V_2\ V_1\ V_3\ V_3\ V_4\ V_5$

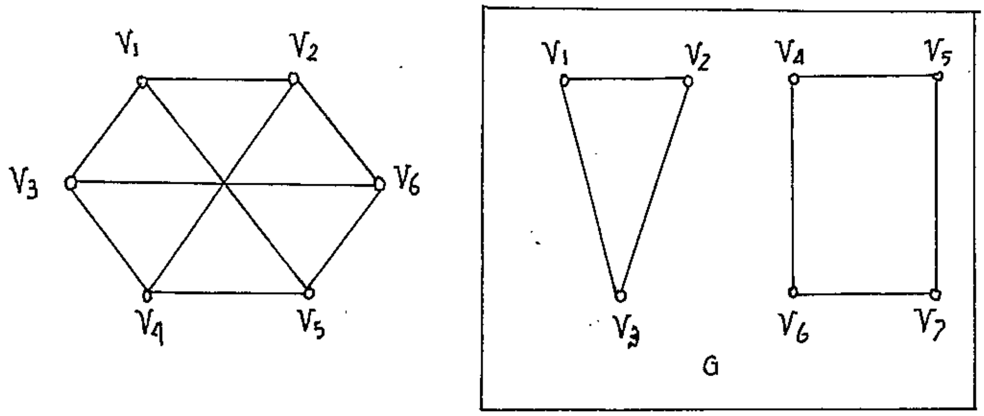
"Path" dari V_1 ke V_5 yaitu : $V_1\ X_1\ V_2\ X_5\ V_4\ X_7\ V_5$ atau $V_1\ V_2\ V_4\ V_5$

"Cycle" dari V_1 ke V_5 yaitu : $V_1\ X_1\ V_2\ X_5\ V_4\ X_7\ V_3\ X_3\ V_3$ atau $V_1\ V_2\ V_4\ V_3\ V_1$

Definisi 2.2.2. :

Graph G = [V,X] disebut Connected jika untuk setiap dua titik dihubungkan dengan sekurang-kurangnya satu path dan jika tidak demikian disebut Disconnected.

Contoh :



(a) (b)

Gambar 2.2.2. (a) Connected Graph

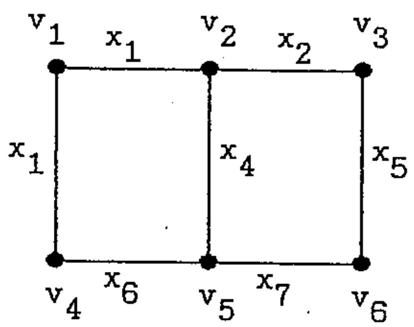
(b) Disconnected Graph

Definisi 2.2.3. :

Suatu subgraph dari G adalah suatu graph yang mempunyai titik-titik dan garis-garis yang ada dalam G. Jika G_1 adalah subgraph dari G, maka G adalah supergraph dari G_1.

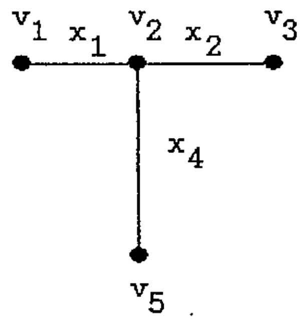
Contoh :

G :



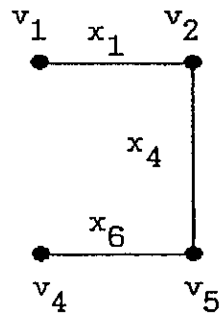
(a) Graph G

G_1 :



(b)

G_2 :



(c)

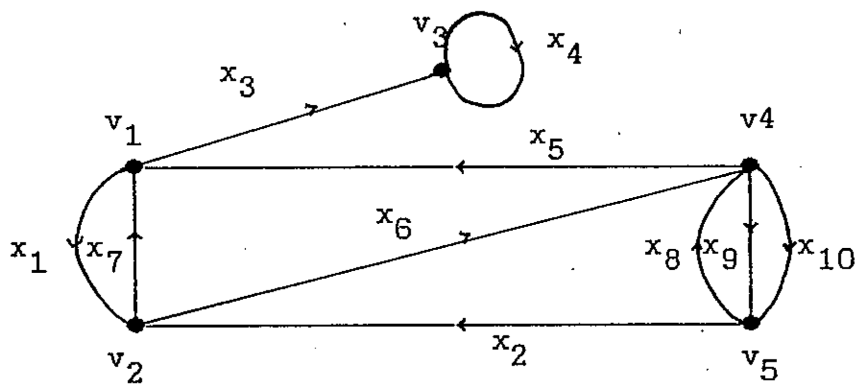
Gambar 2.2.3. (b) (c) Subgraph dari G

2.3. DIRECTED GRAPH

Definisi 2.3.1. :

Directed graph adalah graph (V.X) dimana V berhingga dan jika $X \neq 0$ anggotanya merupakan garis berarah.

Contoh :

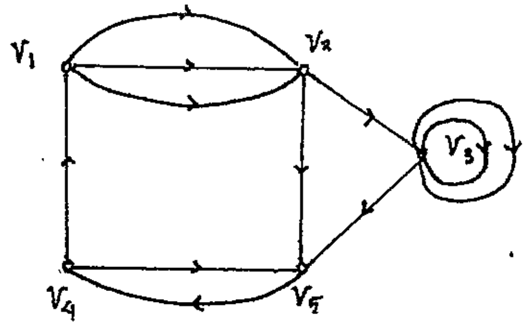


Gambar 2.3.1.

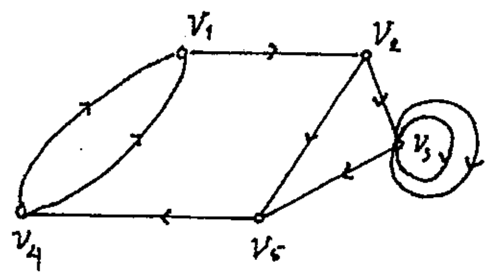
Definisi 2.3.2. :

(p , s) digraph adalah Suatu directed graph dimana α (i , j) $\leq$ p untuk semua i $\neq$ j , dan α (i , j) $\leq$ s untuk semua i dimana p dan s mrupakan bilangan bulat non negatip. Jika p = s , (p , s) digraph disebut p-digraph

Contoh :



(a)



(b)

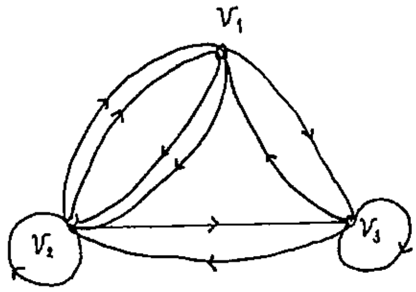
Gambar 2.3.2. : (a) (3,2) digraph

(b) 2-digraph

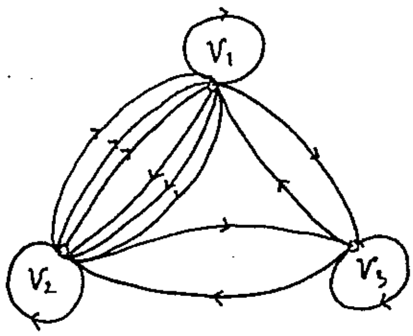
Definisi 2.3.3. :

Directed graph dipandang sebagai suatu relasi simetrik jika setiap dua titik X_i dan X_j memuat garis berarah (X_i, X_j) juga garis berarah (X_j, X_i) dan graphnya disebut Simetrik digraph

Contoh :



Simetrik digraph pada 2-digraph



Simetrik digraph pada 3 digraph

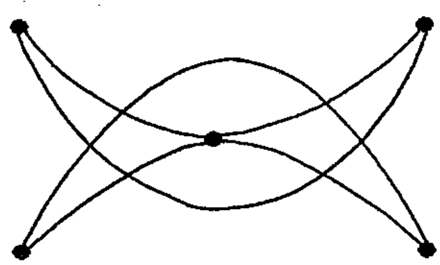
Gambar 2.3.3.

2.4. EULER GRAPH

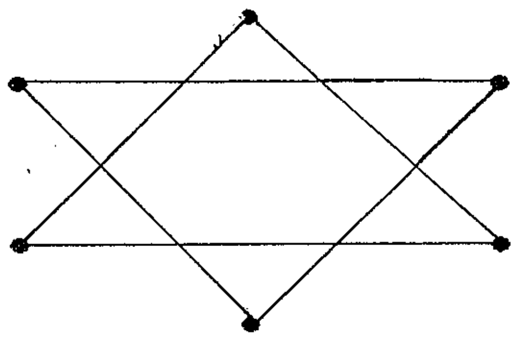
Definisi 2.4.1. :

Jika suatu Walk tertutup dalam suatu graph memuat semua garis dari graph maka walk disebut Euler Line dan graphnya Euler Graph Euler graph tidak mempunyai titik terpisah karena itu Euler graph selalu Connected.

Contoh :



(a)



(b)

Gambar 2.4.1. Dua Euler Graph

Teorema 2.4.1.

Suatu connected graph G adalah Euler graph jika dan hanya jika semua titik dari G adalah degree genap.

Bukti :

Misal G adalah Euler graph maka memuat Euler

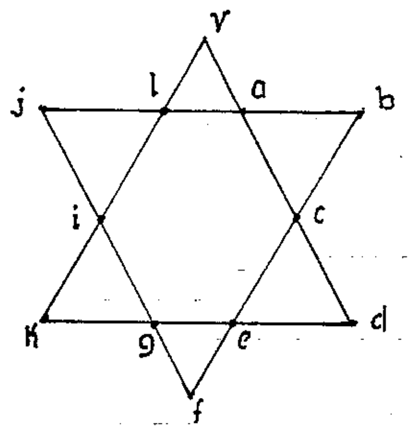
Line (yaitu walk tertutup). Dalam masalah ini walk dinyatakan sebagai, setiap kali walk bertemu pada titik V dan melewati dua garis insident pada V dengan satu masuk pada V dan lainnya keluar. Ini berlaku untuk semua titik dari walk, sebab berturut-turut masuk dan keluar titik yang sama pada permukaan dan akhir dari walk. Demikian jika G adalah Euler graph, degree dari setiap titik adalah genap. Untuk membuktikan syarat cukup, asumsikan bahwa semua titik dari G adalah degree genap. Dibentuk suatu walk yang dimulai pada sembarang titik V dan melewati garis dari G sedemikian sehingga tidak ada garis yang dilewati lebih dari satu kali. Bermula setiap titik adalah degree genap, masuk pada suatu titik dan keluar pada titik yang sama dan tidak akan berhenti pada suatu titik tetapi hanya pada V dan V merupakan degree genap. Jika ini walk tertutup h, rencana melewati semua garis dari dari G, G adalah Euler graph. Jika tidak, garis dalam h dipindahkan dari G dan didapat subgraph h' yang dibentuk oleh garis yang ditinggalkan dari G. Karena G dan h semua titiknya mempunyai degree genap, maka degree titik h' juga genap. Lagi pula, h' pasti berhubungan dengan h sedikitnya pada satu titik a, maka G

Connected. Mulai dari a, dapat dibentuk lagi suatu walk baru dalam graph h′. Karena semua titik dari h′ adalah degree genap, walk dalam h′ harus berakhir pada titik a, tetapi walk dalam h′ dapat dikombinasikan dengan h. Untuk bentuk suatu walk baru, dimana berawal dan berakhir pada titik V dan mempunyai garis lebih banyak dari h.

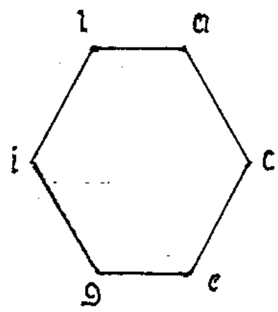
Proses dapat diulangi sampai diperoleh suatu walk tertutup yang mengelilingi semua garis dari G. Jadi G adalah Euler graph.

Ilustrasi :

Walk tetutup h



Subgraph h′



Walk baru dalam h′

a,c,e,g,i,l

Teorema 2.4.3.

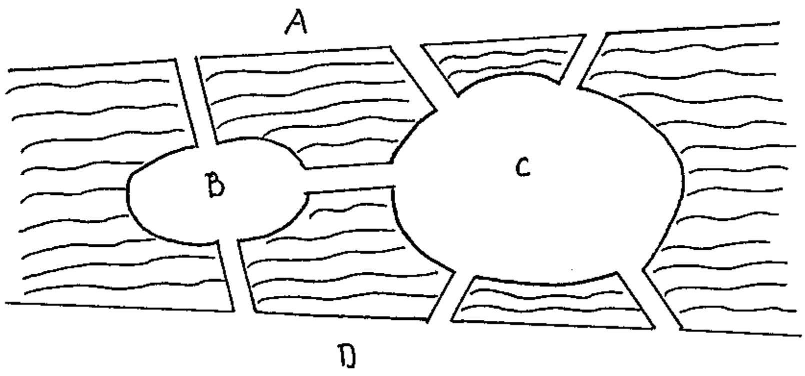
Jika G adalah Connected dan mempunyai titik dengan degree ganjil yang jumlahnya genap (2S > 0) maka terdapat path-path $P_1, P_2, \ldots . P_s$ yang akan mengunakan semua garis dari G tepat satu kali. Setiap $P_1, P_2, \ldots P_s$ berawal titik ganjil dan berakhir lagi titik ganjil.

Bukti :

Jika terdapat titik ganjil jumlahnya harus genap. jika jumlahnya adalah 2, dibagi dalam s bagian dan suatu bentuk baru G_1 digabungkan dengan G garis baru tiap titik gabungan. Sepasang dari titik. Dengan teorema 2.4.1. terdapat suatu cycle C dalam G_1 melewati semua garis dari G_1 tepat satu kali.
Terlihat bahwa path menggunakan semua garis dari G, path berawal titik ganjil dan berakhir lagi titik ganjil.

Aplikasi dari teorema 2.4.2 adalah Masalah Jembatan Konnigsberg :

Sebuah sungai mengalir melewati kota, dan terdapat dua pulau, pulau B dan pulau C, ada jembatan diantara pulau B dan pulau C dan juga dua jembatan untuk setiap pantai dari pulau C dan satu jembatan untuk tiap pantai dari pulau B. Masalahnya adalah untuk melewati setiap jembatan tanpa melewati setiap jembatan lebih dari satu kali.

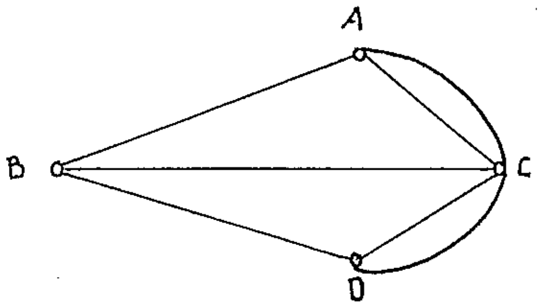


Gambar 2.4.2. Masalah Jembatan Konnigsberg

Penyelesaian :

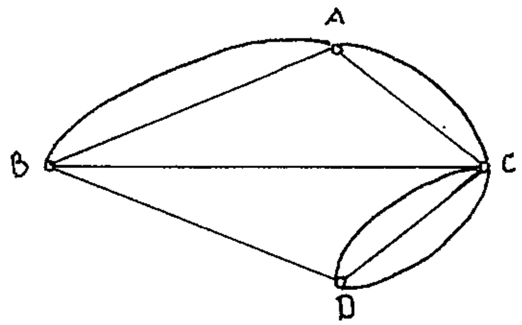
Jika diambil titik dasar pada pantai dan pada dua pulau terlihat bahwa masalahnya adalah melewati semua garis pada gambar 2.4.3 dalam sebuah path tunggal.

Karena 4 (empat) titik semuanya dari graph adalah ganjil. Teorema 2.4.2 memperlihatkan bahwa ini diambil paling sedikit dua path terpisah untuk melewati semua garis dan juga masalah awal dari perjalanan melewati semua tujuh jembatan tanpa persimpangan tiap jembatan dua kali adalah tidak mungkin.



Gambar 2.4.3.Graph dari masalah jembatan

Jadi diambil dua path terpisah :



Gambar 2.4.4 Graph dari masalah jembatan setelah ditambah dua path terpisah