BAB II
KONSEP DASAR

2.1. Induksi Matematika

Salah satu metode yang digunakan untuk membuktikan kebenaran suatu dalil adalah dengan metode induksi matematika yang mengikuti prinsip-prinsip sebagai berikut:

1. Prinsip Utama Induksi Matematika

   P(n) adalah suatu dalil yang didefinisikan (berlaku) untuk setiap bilangan asli n, jika :

   i. Pangkal : P(1) benar

   ii. Langkah : diasumsikan P(k) benar untuk n = k . Langkah ini disebut dengan hipotesa induksi.

   iii. Dengan menggunakan hipotesa induksi, dibuktikan bahwa untuk n = k+1, P(k+1) benar.

2. Prinsip Kedua Induksi Matematika

   P(n) adalah suatu dalil yang didefinisikan (berlaku) untuk setiap bilangan asli n, jika :

   i. Pangkal : P(1) benar

   ii. Langkah : diasumsikan P(k) benar untuk setiap bilangan asli k < m. Langkah ini disebut hipotesa induksi.

   iii. Dengan menggunakan hipotesa induksi, dibuktikan bahwa P(m) benar.

2.2. Himpunan

Himpunan adalah sekumpulan elemen-elemen yang didefinisikan dengan jelas.

Banyaknya anggota dari himpunan A dinotasikan dengan n(A).

Definisi 1

Interseksi dari dua himpunan H dan K, notasi $H \cap K$ adalah himpunan yang anggotanya terdiri dari elemen-elemen yang sekaligus berada dalam H maupun K.

$$H \cap K \text{ .=df. } \{ x \mid x \in H \text{ dan } x \in K \} .$$

Jika $H \neq \emptyset$ dan $K \neq \emptyset$ sedangkan $H \cap K = \emptyset$, maka H dan K disebut dua himpunan yang saling asing.

Definisi 2

Union dari dua himpunan H dan K, notasi $H \cup K$ adalah himpunan yang anggotanya terdiri atas elemen-elemen yang sekurang-kurangnya menjadi anggota dari salah satu himpunan H atau K.

$$H \cup K \text{ .=df. } \{ x \mid x \in H \text{ atau } x \in K \}$$

Sifat : $n(H \cup K) = n(H) + n(K) - n(H \cap K)$

Jika H dan K adalah dua himpunan yang saling asing, maka : $n(H \cup K) = n(H) + n(K)$

Suatu himpunan H dapat diuraikan terpisah (dekomposisi) ke dalam dua himpunan H' dan H" jika $H' \cup H'' = H$ dan $H' \cap H'' = \emptyset$.

Contoh 1

$H = \{ a,b,c,d \}$; $K = \{ a,c,e \}$

$H \cap K = \{ a,c \}$; $H \cup K = \{ a,b,c,d,e \}$

2.3. Dasar-dasar Graph

2.3.1 Graph dan Subgraph

Definisi 3

Suatu graph $G_u(V,E)$ atau disingkat graph G_u, dengan himpunan V adalah himpunan yang elemennya berupa titik (vertex) dan himpunan E adalah himpunan yang elemennya berupa pasangan berurutan (i,j) atau (j,i) yang disebut garis (edge) yang menghubungkan titik i dan titik j, dengan $i,j \in V$.

Garis (i,j) disebut insiden (bertemu) dengan titik i dan j, juga sebaliknya, titik i dan j disebut berinsiden dengan garis (i,j).

Garis-garis dalam graph G_u dapat disimbolkan dengan e_i.

Secara geometris, titik-titik digambarkan dengan lingkaran kecil atau dot dan garis-garis digambarkan dengan garis lengkung atau garis lurus.

Pasangan dari titik i dan j yang terhubung melalui beberapa garis berbeda disimbolkan dengan $(i,j)_1$, $(i,j)_2$, ... , $(i,j)_k$.

Untuk $k \geq 2$ garisnya disebut garis-garis paralel.

Untuk pasangan berurutan (i,i), garisnya disebut garis loop, dan jika terdapat dua atau lebih garis loop pada suatu titik maka garisnya juga disebut garis-garis paralel.

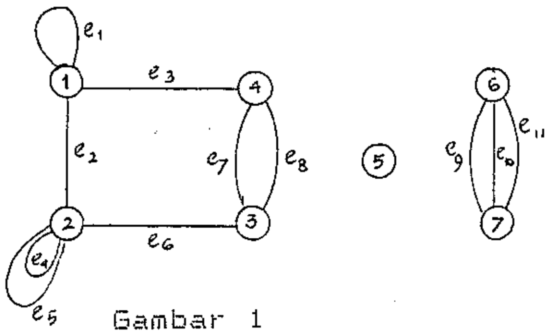
Definisi 4

Suatu titik yang tidak insiden dengan setiap garis disebut titik terasing (isolated point).

Contoh 2

Untuk menjelaskan definisi-definisi di atas, diberikan contoh sebagai berikut :

Suatu graph G_u :



Gambar 1

Gambar 1 menunjukkan graph $G_U(V,E)$ dengan

$V = \{ 1,2,3,4,5,6,7 \}$

$E = \{ (1,1), (1,2), (1,4), (2,2)_1, (2,2)_2, (2,3), (3,4)_1, (3,4)_2, (6,7)_1, (6,7)_2, (6,7)_3 \}$

Garis (1,1) pada titik 1 merupakan garis loop

Garis $(2,2)_1$ dan garis $(2,2)_2$ pada titik 2 merupakan 2 garis loop.

Garis $(3,4)_1$ dan garis $(3,4)_2$, yaitu dua garis yang menghubungan titik 2 dan titik 3 merupakan dua garis paralel, sedangkan garis $(6,7)_1$, $(6,7)_2$ dan $(6,7)_3$ merupakan tiga garis paralel.

Graph di atas mempunyai titik terasing, yaitu titik 5.

Garis-garis dalam suatu graph dapat disimbolkan dengan e_i, misalnya untuk gambar di atas :

Garis $(1,1) = e_1$

Garis $(1,2)$ = garis $(2,1) = e_2$

Garis $(3,4)_1$ = garis $(4,3)_1 = e_7$

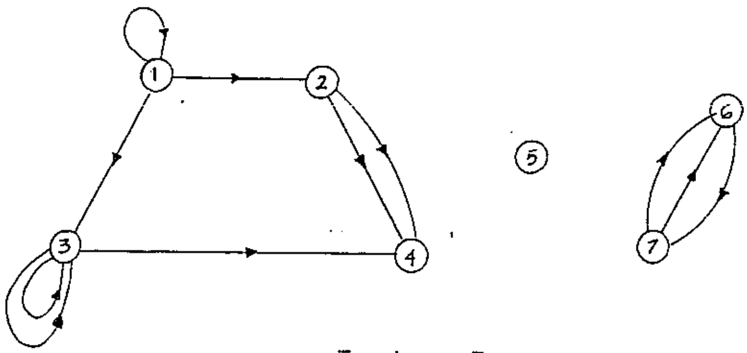
Garis $(3,4)_2$ = garis $(4,3)_2 = e_8$

Definisi 5

Suatu graph berarah (digraph) G(V,E) atau disingkat digraph G dengan himpunan V adalah himpunan yang elemennya berupa titik-titik dan himpunan E adalah himpunan yang elemennya berupa garis berarah (i,j), yakni garis berarah dari titik i ke titik j , dengan $i,j \in V$

Contoh 3

Suatu graph berarah G(V,E)



Gambar 2

dengan :

$V = \{ 1,2,3,4,5,6,7 \}$

$E = \{ (1,1),(1,2),(1,3),(2,4)_1,(2,4)_2,(3,3)_1,(3,3)_2, (3,4), (6,7),(7,6)_1,(7,6)_2 \}$

Garis (1,1) adalah garis loop

Garis (3,4) adalah garis berarah dari titik 3 ke titik 4

Garis $(2,4)_1$ dan $(2,4)_2$ adalah dua garis paralel berarah dari titik 2 ke titik 4, sedangkan titik 5 merupakan titik terasing.

Definisi 6

Untuk setiap digraph G_d, terdapat suatu graph tak berarah yang bersesuaian (dinotasikan G_u), dengan himpunan titik dan himpunan garisnya sama dengan G_d, hanya arah dari setiap garis pada G_d dihilangkan.

Contoh 4

Diberikan digraph G_d (Gambar 3.a) dan Graph G_u yang bersesuaian dengan G_d(Gambar 3.b).

(a) (b)

Gambar 3

Definisi 7

Derajat (degree) dari titik i pada suatu graph G, dinotasikan dengan d(i) adalah banyaknya garis yang bertemu (insiden) dengan titik i

Definisi 8

Derajat masuk (indegree) dari titik i pada suatu digraph G_d dinotasikan dengan $d^-(i)$, adalah banyaknya garis berarah yang masuk ke titik i.

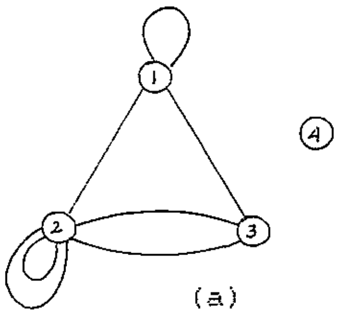
Derajat keluar (outdegree) dari titik i pada suatu digraph G_d dinotasikan dengan $d^+(i)$, adalah banyaknya garis berarah yang keluar dari titik i.

Pengertian derajat pada suatu digraph G_d sama dengan pengertian derajat pada graph G, yaitu banyaknya garis yang berinsiden dengan titik i, oleh sebab itu :

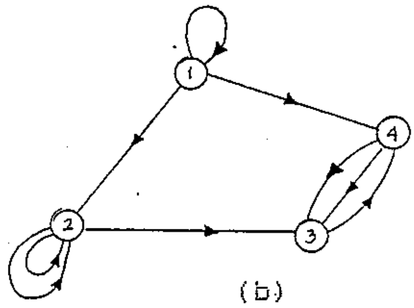
$$d(i) = d^+(i) + d^-(i)$$

Contoh 5

Diberikan graph G dan digraph G_d sebagai berikut :



(a)



(b)

Gambar 4

Gambar (a), titik 3 berderajat 3 atau d(3) = 3

titik 1 berderajat 4 atau d(1) = 4

titik 4, titik terasing : d(4) = 0

Gambar (b), indegree titik 3 = $d^-(3)$ = 3

outdegree titik 3 = $d^+(3)$ = 1

derajat titk 3 = d(3) = 4

Definisi 9

Subgraph dari graph G(V,E) adalah suatu graph $G_s(V_s,E_s)$ dengan V_s adalah himpunan bagian dari V dan E_s adalah himpunan bagian dari E.

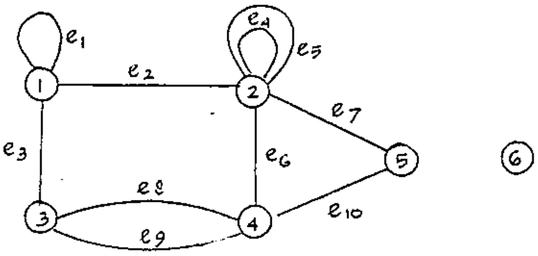
Sifat-sifat subgraph :

1. Jika V_s dan E_s adalah himpunan bagian sejati, maka $G_s(V_s,E_s)$ disebut subgraph sejati.
2. Jika V_s = V dan E_s adalah himpunan bagian sejati, maka $G_s(V_s,E_s)$ disebut spanning subgraph.
3. Jika V_s atau E_s merupakan himpunan kosong, maka $G_s(V_s,E_s)$ disebut graph nol (null graph) dan dinotasikan dengan Ø

Graph nol dan graph G merupakan subgraph dari setiap graph G.

Contoh 6

Diberikan graph G sebagai berikut :

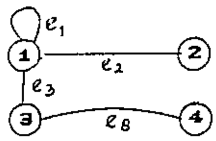


Gambar 5

dengan : $V = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$

$E = \{ e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10} \}$

Subgraph sejati dari G antara lain :

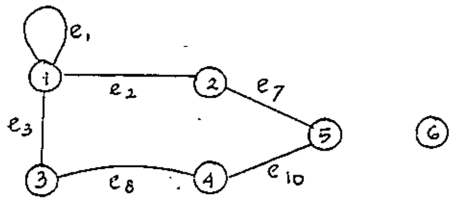


dengan $V_s = \{ 1,2,3,4 \}$

$E_s = \{ e_1,e_2,e_3,e_3 \}$

Gambar 5a

Spanning subgraph dari G antara lain :

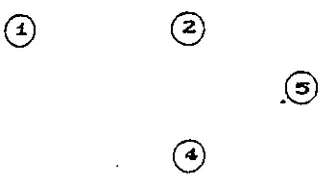


Gambar 5b

dengan $V_s = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$

$E_s = \{ e_1,e_2,e_3,e_7,e_8,e_{10} \}$

Graph nol pada G antara lain adalah :



dengan :

$V_s = \{ 1,2,4,5 \}$

$E_s = \emptyset$

Gambar 5c

Dalam hal ini subgraph yang tidak mempunyai titik terasing dapat dinotasikan sebagai "product" (perkalian titik) dari garis-garisnya. Pada contoh subgraph sejati dari G di atas dapat dituliskan $e_1 e_2 e_3 e_8$.

2.3.2. Graph Terhubung (Connected Graph)

Definisi 10

Path adalah suatu barisan garis berhingga :

$$(i_1, i_2),\ (i_2, i_3),\ \ldots\ ,\ (i_{k-1}, i_k)$$

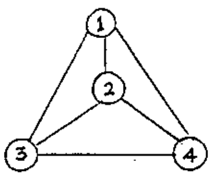
dengan setiap titik $i_1, i_2, \ldots, i_k$ adalah titik-titik yang berbeda.

Definisi 11

Cycle atau sirkuit adalah suatu path dengan $i_1 = i_k$.

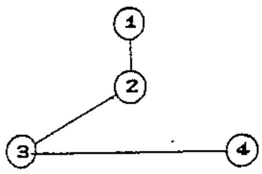
Contoh 7

Diberikan suatu graph G



Gambar6

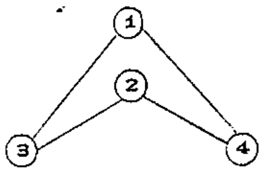
Path dari graph G tersebut antara lain adalah :



Gambar 6a

dengan barisan garis (1,2), (2,3), (3,4)

Sirkuit dari graph G di atas antara lain adalah :



Gambar 6b

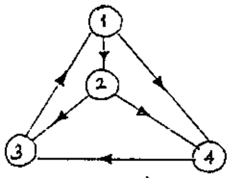
dengan barisan garis (1,3), (3,2), (2,4), (4,1)

Definisi 12

Path berarah adalah suatu barisan garis berarah yang berhingga : (i_1,i_2), (i_2,i_3), ... , (i_{k-1},i_k) dengan setiap titik i_1,i_2, ... ,i_k adalah titik-titik yang berbeda.

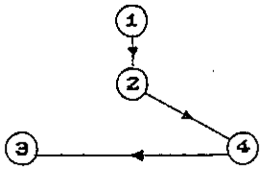
Contoh 8

Diberikan suatu digraph G_d :



Gambar 7a

Path berarah dari digraph G_d di atas antara lain :



Gambar 7b

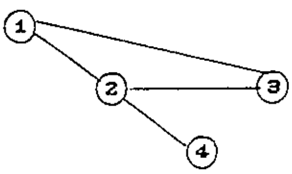
dengan barisan garis (1,2), (2,4), (4,3)

Definisi 13

Suatu graph disebut graph terhubung (connected graph) jika dan hanya jika setiap dua titik dihubungkan oleh suatu path, dan suatu graph disebut graph tak terhubung (disconnected graph) jika terdapat pasangan titik yang tidak dihubungkan oleh suatu path.

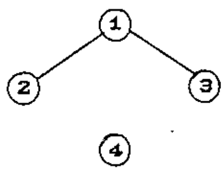
Contoh 9

Graph terhubung



Gambar 8a

Graph tak terhubung



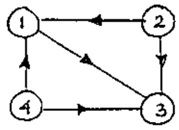
Gambar 8b

Definisi 14

Suatu digraph G_d disebut terhubung (connected digraph) jika graph tak berarah yang bersesuaian dengan G_d terhubung.

Contoh 10

Digraph terhubung :



Gambar 9

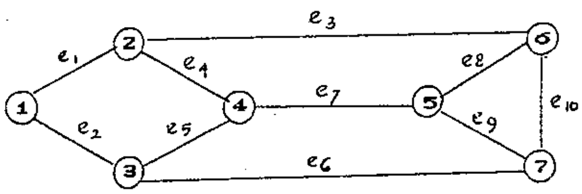
Definisi 15

Komponen suatu graph adalah subgraph terhubung yang memuat jumlah maksimal garisnya.

Titik terasing juga merupakan suatu komponen.

Contoh 11

Diberikan graph G sebagai berikut :

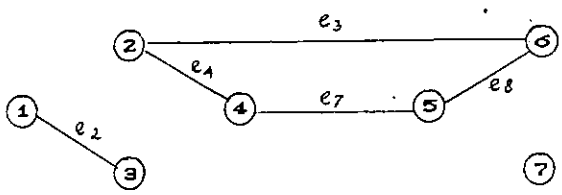


Gambar 10

dengan $V = \{ 1,2,3,4,5,6,7 \}$

$E = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10} \}$

Subgraph dari G misalnya :



Gambar 10a

dengan $V = \{ 1,2,3,4,5,6,7 \}$

$E = \{ e_2, e_3, e_4, e_7, e_8 \}$

Subgraph di atas mempunyai tiga komponen yaitu :

Komponen yang memuat titik-titik 2,4,5,6 ; komponen yang memuat titik-titik 1,3 ; dan komponen yang memuat titik 7 (titik terasing).

Dari definisi 13 dan 15, terlihat bahwa setiap graph terhubung terdiri dari satu komponen.

2.3.3. Tree

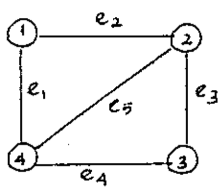
Definisi 16

Suatu spanning subgraph dari suatu graph disebut tree jika dan hanya jika subgraph itu terhubung dan tidak memuat sirkuit.

Garis dari suatu tree disebut ranting (branch).

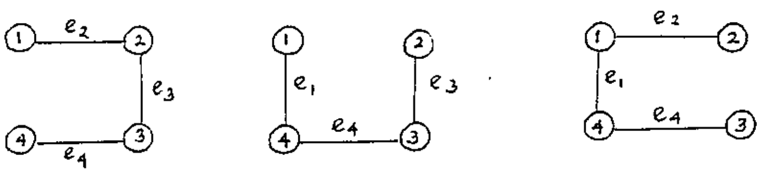
Contoh 12

Suatu graph G :



Gambar 11

Tree yang termuat dalam G antara lain adalah :



Gambar 11a

Teorema 1 (Teorema Equivalensi)

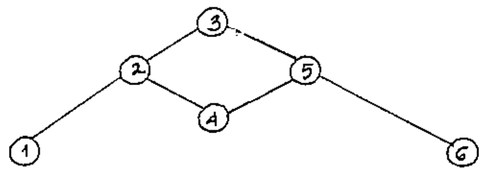
1. G adalah tree
2. Setiap dua titik dihubungkan dengan path tunggal
3. G terhubung dan n = b+1, dengan n adalah banyaknya titik dan b adalah banyaknya garis

Bukti :

1. Jika G tree maka setiap dua titik dihubungkan dengan path tunggal

   G tree berarti G terhubung dan tidak memuat sirkuit.

   Andaikan ada dua titik yang dihubungkan dengan path yang tidak tunggal, yaitu titik 2 dan 5.



   Dengan demikian antara titik 1 dan titik 6 dihubungkan oleh dua path, yaitu :

   path pertama : (1,2),(2,3),(3,5),(5,6)

   path kedua : (1,2),(2,4),(4,5),(5,6)

   Terlihat bahwa antara titik 2 dan titik 5 terjadi sirkuit, sehingga terdapat kontradiksi. Pengandaian salah.

   Jadi jika G tree maka setiap dua titik dihubungkan dengan path tunggal.

2. Jika setiap dua titik dihubungkan dengan path tunggal maka G terhubung dan $n = b+1$.

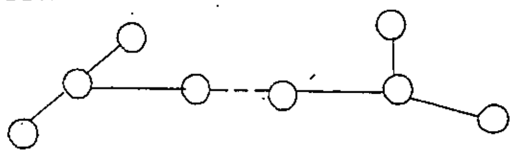
   Jelas bahwa jika setiap dua titik dihubungkan dengan suatu path pasti terhubung (sesuai definisi 13).

   Akan dibuktikan $n = b+1$ dengan induksi matematika.

   Berpangkal dari pengamatan bahwa teorema benar untuk $n = 1$, dengan contoh :

   1 ; $n = 1$, $b = 0$ memenuhi $n = b+1$ ($1 = 0+1$)

   Dengan menggunakan hipotesa induksi, yaitu benarnya teorema untuk G dengan n-1 titik atau kurang dari itu, akan dibuktikan teorema benar untuk G dengan n titik.



n_1 titik $\qquad$ n_2 titik

b_1 garis $\qquad$ b_2 garis

$n_1 = b_1 + 1$ $\qquad$ $n_2 = b_2 + 1$

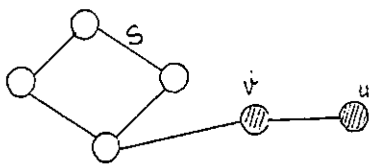
$$\begin{array}{l} n_1 = b_1 + 1 \\ n_2 = b_2 + 1 \\ \hline n_1 + n_2 = b_1 + b_2 + 1 + 1 \end{array} +$$

dengan $n = n_1 + n_2$ dan $b = b_1 + b_2 + 1$ sehingga G terhubung. Terbukti.

Jadi jika setiap dua titik dihubungkan dengan path tunggal, maka G terhubung dan $n = b + 1$

3. Jika G terhubung dan $n = b + 1$ maka G tree.

Andaikan terdapat sirkuit S dalam G pasti ada titik dari G di luar S. Dengan kata lain, G tidak mungkin terdiri dari S saja karena ketentuan $n = b + 1$, sedangkan dalam sirkuit S banyaknya garis = banyaknya titik.



Untuk setiap $u \notin S$ dapat dikawankan sekurang-kurangnya satu garis maka $b \geq n$ atau $n \leq b$, sehingga terjadi kontradiksi dengan $n = b + 1$ atau $n > b$. Pengandaian salah.

Jadi jika G terhubung dan $n = b + 1$, maka G tree.

Sehingga : G tree bhb setiap dua titik dihubungkan dengan path tunggal bhb G terhubung dan $n = b + 1$.

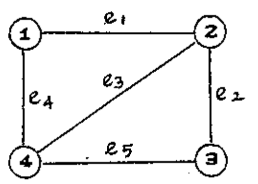
Definisi 17

Suatu spanning subgraph dari graph G disebut 2-tree dari G jika dan hanya jika mempunyai dua komponen dan tidak memuat sirkuit. Salah satu komponen dapat berupa titik terasing.

Pada umumnya, suatu 2-tree menunjukkan titik-titik tertentu yang disyaratkan dalam komponen berbeda yang dituliskan dengan indeks yang terpisah. Sebagai contoh, $t_{ab,cde}$ adalah simbol untuk suatu 2-tree dengan titik-titik a dan b dalam satu komponen dan titik-titik c, d dan e dalam komponen yang lain.

Contoh 13

Diberikan graph G :



Gambar 12

2-tree $t_{12,4}$ dalam G antara lain :

Gambar 12a

2-tree $t_{2,4}$ dalam G antara lain :

Gambar 12b

2.3.4. Graph Bobot

Definisi 18

Graph bobot adalah suatu graph yang di dalam setiap garisnya diberikan suatu bobot.

Digraph bobot adalah suatu graph berarah yang di dalam setiap garis berarahnya diberikan suatu bobot.

Notasi untuk bobot yang bersesuaian dengan garis (i,j) pada graph (digraph) G adalah f(i,j).

Definisi 19

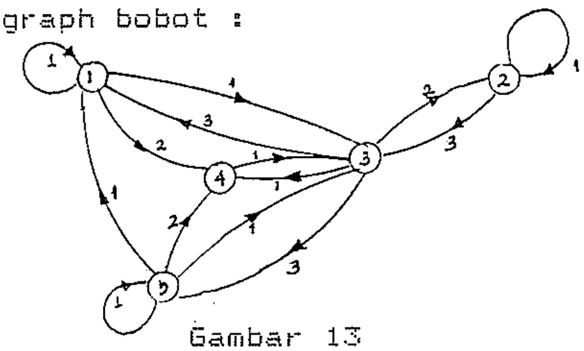
Jika G_s adalah subgraph dari digraph G, maka $f(G_s)$ adalah hasil kali bobot-bobot garis berarah pada G_s yang dinotasikan dengan :

$$f(G_s) = \prod f(i,j) \quad , \text{ untuk } G_s \neq \emptyset$$

$$f(\emptyset) = 1 \quad , \emptyset = \text{graph nol}$$

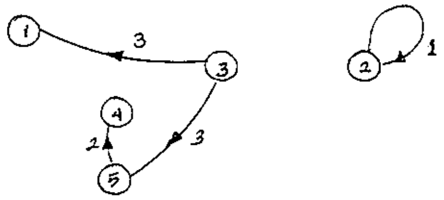
Contoh 14

Diberikan digraph bobot :



Gambar 13

Misal G_s adalah subgraph yang memuat garis (3,1), (3,5), (5,4) dan (2,2) seperti gambar berikut :



Gambar 13a

maka : $f(G_s) = f(3,1).f(3,5).f(5,4).f(2,2)$

$= 3 \ . \ 3 \ . \ 2 \ . \ 1 = 18$

Untuk kelas khusus dari subgraph G_{uv}, simbol :

$$\sum_{G_{uv}} f(G_{uv}) \text{ atau } \sum_{u,v} f(G_{uv})$$

menunjukkan jumlahan $f(G_{uv})$ dari himpunan semua G_{uv} yang mungkin dalam graph G.

2.4. Matriks dan Determinan

2.4.1. Matriks

Definisi 20

Matriks adalah sekumpulan bilangan / elemen yang disusun dalam bentuk empat persegi panjang secara teratur, pada baris-baris dan kolom-kolom.

Pandang matriks $A = [\ a_{ij}\ ]$ yang disusun dalam m buah baris dan n buah kolom :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks $A = [a_{ij}]$ disebut berordo m x n, karena terdiri dari m baris dan n kolom. Jika m = n maka matriks A disebut matriks bujursangkar berordo n.

Simbol a_{ij} menyatakan elemen matriks yang muncul pada baris ke-i dan kolom ke-j. Simbol i disebut indeks baris sedangkan simbol j disebut indeks kolom.

Contoh 15

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

A matriks bujur sangkar ordo 3

3 elemen baris ke-2 kolom ke-1

Pada matriks bujursangkar, unsur-unsur yang terletak pada garis hubung a_{11} dan a_{nn} disebut diagonal utama.

Definisi 21

Matriks $A^T = [b_{ij}]$ disebut matriks transpos dari matriks $A = [a_{ij}]$ yang berordo $m \times n$ bhb A^T berordo $n \times m$ dan $b_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap i dan j.

Contoh 16

$$P_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix} \qquad P^T_{3x2} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Definisi 22

Matriks A disebut matriks simetri jika $A^T = A$

Contoh 17

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

2.4.2. Determinan

Definisi 23

Untuk suatu matriks bujursangkar $A = [a_{ij}]$, jika M_{ij} adalah submatriks yang diperoleh dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j matriks A, maka det M_{ij} = $|M_{ij}|$ disebut minor dari elemen a_{ij} .

Definisi 24

Kofaktor dari elemen a_{ij} dari matriks $A = [a_{ij}]$ yang dinotasikan dengan A_{ij} adalah :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|$$

A_{ij} juga disebut kofaktor ordo 1 dari elemen a_{ij} .

Definisi 25

Determinan dari suatu matriks adalah jumlah perkalian elemen-elemen dari sebarang baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya.

Dengan kata lain :

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.A_{ij} = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + \dots + a_{in}.A_{in}$$

dengan i sebarang, disebut uraian baris ke-i.

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.A_{ij} = a_{1j}.A_{1j} + a_{2j}.A_{2j} + \dots + a_{nj}.A_{nj}$$

dengan j sebarang, disebut uraian kolom ke-j.

Contoh 18

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3 - b_3c_2 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} = -(b_1c_3 - b_3c_1)$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = b_1c_2 - b_2c_1$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_1.A_{11} + a_2.A_{12} + a_3.A_{13} \\ &= a_1(b_2c_3-b_3c_2) + a_2(b_3c_1-b_1c_3) + a_3(b_1c_2-b_2c_1) \\ &= a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1 \end{aligned}$$

Definisi 26

Untuk matriks bujursangkar $A = [a_{ij}]$, jika $M_{pq,rs}$ adalah matriks yang diperoleh dari matriks A dengan menghilangkan baris ke-p dan r dan kolom ke-q dan s, maka kofaktor orodo 2 dari elemen a_{pq} dan a_{rs}, yang dinotasikan $A_{pq,rs}$ adalah :

$$A_{pq,rs} = S(p-r).S(q-s).(-1)^{p+q+r+s}.\ |M_{pq,rs}|$$

dengan $p \neq r$; $q \neq s$; dan

$S(w) = 1$ jika $w > 0$ dan $S(w) = -1$ jika $w < 0$

Contoh 19

Diberikan matriks A

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

Kofaktor ordo 2 dari elemen a_{21} dan a_{33} adalah :

$$A_{21,33} = S(2-3).S(1-3).(-1)^{2+1+3+3}.\begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ d_2 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1).(-1).(-1).(a_2d_4 - a_4d_2)$$

$$= a_4d_2 - a_2d_4$$

Sifat-sifat determinan

1. Sebuah determinan dapat ditulis sebagai jumlah dua determinan dengan semua baris (kolom) sama, kecuali satu. Adapun jumlah dari baris (kolo,) yang tidak sama itu adalah merupakan baris (kolom) determinan

matriks yang semula.

2. Jika dalam suatu baris (kolom) dikalikan dengan λ, maka determinan tersebut akan menjadi λ kali determinan semula.
3. Determinan matriks yang elemen pada suatu baris (kolom) jika ditambahkan dengan λ kali elemen baris (kolom) lain adalah sama dengan determinan semula.

4a. Jika dua baris (kolom) ditukar tempatnya, maka determinan tersebut berubah tanda.

4b. Jika pada sebuah matriks dilakukan k kali pertukaran baris (kolom), maka nilai determinannya menjadi $(-1)^k$ kali determinan semula.

5. Nilai suatu determinan adalah nol, jika determinan tersebut mempunyai dua baris (kolom) yang sama.
6. Nilai suatu determinan adalah nol, jika determinan tersebut mempunyai elemen-elemen pada suatu baris (kolom) semuanya nol.

2.5. Matriks Equikofaktor

Definisi 27

Suatu matriks bujursangkar disebut matriks equikofaktor jika jumlah dari elemen-elemen pada setiap baris dan pada setiap kolomnyua adalah nol.

Contoh 20

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$ P matriks equikofaktor.

Teorema 2

Jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks bujursangkar dengan jumlah elemen pada setiap barisnya adalah nol, maka nilai kofaktor elemen-elemen yang terletak sebaris adalah sama.

Bukti :

Pandang $A = [a_{ij}]$ suatu matriks bujursangkar dengan jumlah elemen pada setiap barisnya adalah nol, dan A berordo n. Akan diperlihatkan bahwa $A_{ix} = A_{iy}$, $\forall$ i,x,y .

Tanpa menghilangkan sifat umum, lebih dulu diasumsikan $x > y$, sehingga :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1y} & \cdots & a_{1x} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2y} & \cdots & a_{2x} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ny} & \cdots & a_{nx} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \ldots \quad (1)$$

dengan $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 0$, $\forall$ i = 1,2, ... , n

Dengan menghilangkan elemen baris ke-i dan kolom ke-x didapat minor $|M_{ix}|$, yaitu :

$$|M_{ix}| = \begin{vmatrix} a_{11} & ..a_{1y} & ..a_{1,x-1} & a_{1,x+1} & ..a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i-1,1} & ..a_{i-1,y} & ..a_{i-1,x-1} & a_{i-1,x+1} & ..a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & ..a_{i+1,y} & ..a_{i+1,x-1} & a_{i+1,x+1} & ..a_{i-1,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n11} & ..a_{ny} & ...a_{n,x-1} & a_{n,x+1} & ..a_{nn} \end{vmatrix}$$

..... (2)

Karena jumlah elemen pada setiap barisnya adalah nol, maka untuk setiap j = 1,2,...,n berlaku :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} = 0 \iff \sum_{\substack{k=1\\k\neq y}}^{n} a_{jk} + a_{jy} = 0$$

$$\iff a_{jy} = -\sum_{\substack{k=1\\k\neq y}}^{n} a_{jk}$$

dengan a_{jy} adalah elemen-elemen matriks dalam kolom y, sehingga :

$$|M_{ix}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & -\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq y}} a_{1k} & \cdots & a_{1,x-1} & a_{1,x+1} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & -\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq y}} a_{2k} & \cdots & a_{2,x-1} & a_{2,x+1} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & -\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq y}} a_{nk} & \cdots & a_{n,x-1} & a_{n,x+1} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

.... (3)

Berdasarkan sifat determinan ke-1, maka semua elemen dalam kolom y dari $|M_{ix}|$ dapat ditambah dengan semua elemen yang sebaris, tanpa mengubah nilai $|M_{ix}|$, sehingga :

$\forall$ j = 1,2,...,n

$$-\sum_{\substack{k=1\\k\neq y}}^{n} a_{jk} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq y\\k\neq x}}^{n} a_{jk} = -\left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq y\\k\neq x}}^{n} a_{jk} + a_{jx}\right] + \sum_{\substack{k=1\\k\neq y\\k\neq x}}^{n} a_{jk}$$

$$= -\,a_{jx}$$

Dengan demikian setiap elemen dalam kolom y dapat diubah menjadi $-a_{jx}$, $\forall$ j = 1,2,...,n. Diperoleh :

$$|M_{ix}| = \begin{vmatrix} a_{11} & ..a_{1x} & ..-a_{1,x-1} & a_{1,x+1} & ..a_{1n} \\ a_{21} & ..a_{2x} & ..-a_{2,x-1} & a_{2,x+1} & ..a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & ..a_{ny} & ...-a_{n,x-1} & a_{n,x+1} & ..a_{nn} \end{vmatrix} \quad .... (4)$$

Menurut sifat determinan ke-2, didapat :

$$|M_{ix}| = -\begin{vmatrix} a_{11} & ..a_{1x} & ..\ a_{1,x-1} & a_{1,x+1} & ..a_{1n} \\ a_{21} & ..a_{2x} & ..\ a_{2,x-1} & a_{2,x+1} & ..a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & ..a_{ny} & ...\ a_{n,x-1} & a_{n,x+1} & ..a_{nn} \end{vmatrix} \quad .... (5)$$

Jika kolom y digeser ke sebelah kanan kolom (x-1), maka akan terjadi inversi (pertukaran kolom) sebanyak (x-1)-y, sehingga menurut sifat determinan ke-4b didapat :

$$|M_{ix}| = -(-1)^{x-y-1}\begin{vmatrix} a_{11} & ..a_{1,x-1} & a_{1x} & a_{1,x+1} & ..\ a_{1n} \\ a_{21} & ..a_{2,x-1} & a_{2x} & a_{2,x+1} & ..\ a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & ..a_{n,x-1} & a_{nx} & a_{n,x+1} & ..\ a_{nn} \end{vmatrix} \quad ..... (6)$$

$$= (-1)(-1)^{x-y-1}.\,|M_{iy}|$$

$$= (-1)^{x-y}.\,|M_{iy}|$$

dengan M_{iy} adalah submatriks A dengan menghilangkan elemen baris ke-i dan kolom ke-y.

Menurut definisi 24 , diperoleh :

$$A_{ix} = (-1)^{i+x} \cdot |M_{ix}|$$
$$= (-1)^{i+x} \cdot (-1)^{x-y} \cdot |M_{iy}|$$
$$= (-1)^{i+y} \cdot |M_{iy}|$$
$$= A_{iy}$$

Terbukti.

Teorema 3

Jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks equikofaktor, maka nilai kofaktor dari setiap elemen A adalah sama.

Bukti

Menurut teorema 2, telah dibuktikan bahwa $A_{ix} = A_{iy}$, $\forall$ i,x,y , untuk matriks A dengan jumlah elemen pada setiap barisnya adalah nol.

Jika A^T adalah tranpos dari matriks A, sehingga jumlah elemen pada setiap kolom A^T adalah nol, maka dalam A^T dipenuhi $A^T_{xi} = A^T_{yi}$, yaitu kofaktor dari elemen-elemen sekolom sama.

Karena diketahui A adalah matriks equikofaktor, maka dipenuhi bahwa nilai kofaktor elemen-elemen sebaris sama dengan nilai kofaktor elemen-elemen sekolom, atau :

$$A_{ij} = A_{xy} \quad , \forall \text{ i,j,x,y.}$$

Terbukti.

Sehingga sesuai dengan sebutannya, matriks equikofaktor adalah matriks yang mempunyai nilai kofaktor ordo satu sama untuk setiap elemennya.

Contoh 21

Diketahui matriks equikofaktor A :

$$A = \begin{bmatrix} a & -a & 0 & 0 \\ -a & a+b & -b & 0 \\ 0 & c-b & d+b & -c-d \\ 0 & -c & -d & c+d \end{bmatrix}$$

dengan mengambil sebarang elemen A, didapat :

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ a+b & -b & 0 \\ c-b & d+b & -c-d \end{vmatrix}$$

$$= (-1).-ab.(c+d) = ab(c+d)$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a+b & 0 \\ 0 & -c & c+d \end{vmatrix}$$

$$= (c+d).\{a.(a+b)-a.a\}$$

$$= ab(c+d)$$

Dengan cara yang sama dapat diperlihatkan bahwa nilai kofaktor dari setiap elemen matriks A adalah sama.

Teorema 4

Jika A adalah matriks bujursangkar dengan jumlah elemen pada setiap barisnya adalah nol, maka :

$$A_{pq,rs} = A_{pq,rv} - A_{ps,rv}$$

$\forall$ p.q,r,s,v , $p \neq r$ dan $q \neq s \neq v$

dengan $A_{pq,rs}$, $A_{pq,rv}$ dan $A_{ps,rv}$ berturut-turut adalah kofaktor ordo 2 dari elemen-elemen a_{pq} dan a_{rs} a_{pq} dan a_{rv}, a_{ps} dan a_{rv}.

Bukti :

Pandang $M_{pr,rs}$ adalah submatriks dari $A = [a_{ij}]$ dengan menghapus baris ke-p dan r dan kolom ke-q dan

s. Jika :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1v} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} & \cdots & a_{pv} & \cdots & a_{ps} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rq} & \cdots & a_{rv} & \cdots & a_{rs} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nv} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (7)$$

maka :

$$|M_{pq,rs}| = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot\cdot a_{1,q-1} & a_{1,q+1} \cdot\cdot a_{1v} \cdot\cdot a_{1,s-1} & a_{1,s+1} \cdot\cdot a_{1n} \\ \vdots \\ a_{p-1,1} & \cdots\cdots & & \vdots \\ a_{p+1,1} & \cdots\cdots \\ \vdots \\ a_{r-1,1} & \cdots\cdots & & \vdots \\ a_{r+1,1} & \cdots\cdots \\ \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\ldots\ldots\ldots (8)$$

Karena jumlah elemen pada setiap baris matriks A adalah nol, dan dengan menggunakan sifat determinan ke-1, yakni menjumlahkan elemen-elemen pada kolom v dengan elemen-elemen sebaris, maka elemen-elemen pada kolom v dalam $|M_{pq,rs}|$ adalah :

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq q,s}}^{n} a_{ik} + a_{iq} + a_{is} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{\substack{k=1\\k\neq q,s}}^{n} a_{ik} = -\ (a_{iq} + a_{is})$$

$\forall\ i = 1,2,\ldots,n$

Jika tanda negatif (−) dalam kolom v dihilangkan dan matriks yang diperoleh dinotasikan dengan $M''_{pq,rs}$, maka diperoleh :

$$|M_{pq,rs}| = -\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1,q-1}a_{1,q+1}\cdots(a_{1q}+a_{1s})\cdots a_{1,s-1}a_{1,s+1}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots a_{2,q-1}a_{2,q+1}\cdots(a_{2q}+a_{2s})\cdots a_{2,s-1}a_{2,s+1}\cdots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{n,q-1}a_{n,q+1}\cdots(a_{nq}+a_{ns})\cdots a_{n,s-1}a_{n,s+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} . \qquad \ldots\ldots (9)$$

$$= -\ |M''_{pq,rs}|$$

Jika M''_1 dan M''_2 berturut-turut adalah matriks yang diperoleh dari $M''_{pq,rs}$ dengan mengambil $a_{is} = 0$ dan $a_{iq} = 0$, $\forall\ i = 1,2, \ldots ,n$, sehingga :

$$|M''_1| = \begin{vmatrix} a_{11}\cdots & a_{1,q-1} & a_{1,q+1}\cdots & a_{1q}\cdots & a_{1,s-1} & a_{1,s+1}\cdots & a_{1n} \\ a_{21}\cdots & a_{2,q-1} & a_{2,q+1}\cdots & a_{2q}\cdots & a_{2,s-1} & a_{2,s+1}\cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}\cdots & a_{n,q-1} & a_{n,q+1}\cdots & a_{nq}\cdots & a_{n,s-1} & a_{n,s+1}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \ldots\ldots (10)$$

$$|M_2''| = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,q-1} & a_{1,q+1} \cdots a_{1s} \cdots a_{1,s-1} & a_{1,s+1} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2,q-1} & a_{2,q+1} \cdots a_{2s} \cdots a_{2,s-1} & a_{2,s+1} \cdots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} \cdots a_{n,q-1} & a_{n,q+1} \cdots a_{ns} \cdots a_{n,s-1} & a_{n,s+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Maka menurut sifat determinan ke-1 didapat :

$|M''_{pq,rs}| = |M''_1| + |M''_2|$

Tanpa memperhatikan tanda dan urutan kolomnya, $|M''_1|$ dan $|M''_2|$ berturut-turut bersesuaian dengan $|M_{ps,rv}|$ dan $|M_{pq,rv}|$.

Untuk memperoleh matriks $M_{ps,rv}$, kolom a_{iq} dalam M''_1 harus dilakukan inversi sebanyak :

(v−q−1) untuk $s < q < v$ atau $q < v < s$

(q−v−1) untuk $v < q < s$ atau $s < v < q$

(v−q−2) untuk $q < s < v$

(q−v−2) untuk $v < s < q$

Sedangkan untuk memperoleh matriks $M_{pq,rv}$, kolom a_{is} dalam M''_2 harus dilakukan inversi sebanyak :

(v−s−1) untuk $s < v < q$ atau $q < s < v$

(s−v−1) untuk $q < v < s$ atai $v < s < q$

(v−s−2) untuk $v < q < s$

(s−v−2) untuk $s < q < v$

Dapat diselidiki bahwa untuk semua kasus masing-masing menurut persamaan tunggal :

$|M''_1| = S(q-s).S(v-s).(-1)^{v-q-1}.|M_{ps,rv}|$

$|M''_2| = S(v-q).S(s-q).(-1)^{v-s-1}.|M_{pq,rv}|$

Selanjutnya :

$$A_{ps,rv} = S(p-r).S(q-s).(-1)^{p+q+r+s}.|M''_1| \quad ...... (12)$$

Karena :

$$S(p-r).S(q-s).(-1)^{p+q+r+s}.|M''_1|$$

$$=S(p-r)S(q-s)(-1)^{p+q+r+s}S(q-s)S(v-s)(-1)^{v-q-1}|M_{ps,rv}|$$

$$=S(p-r)S(q-s)S(q-s)S(v-s)(-1)^{p+q+r+s+v-q-1}|M_{ps,rv}|$$

$$=S(p-r).-S(s-v).(-1)^{p+r+s+v-1}.|M_{ps,rv}|$$

$$=S(p-r).S(s-v).(-1)^{p+r+s+v}.|M_{ps,rv}|$$

$$= A_{ps,rv}$$

Dengan cara yang sama, dapat diperlihatkan :

$$A_{pq,rv} = S(p-r).S(s-q).(-1)^{p+q+r+s}.|M''_2| \quad ...... (13)$$

Persamaan (12) dan (13) berturut-turut dapat dinyatakan dengan :

$$A_{ps,rv} = - S(p-r).S(q-s).(-1)^{p+q+r+s-1}.|M''_1|$$

$$A_{pq,rv} = S(p-r).S(q-s).(-1)^{p+q+r+s-1}.|M''_2|$$

Berdasarkan definisi 26, didapat :

$$\begin{aligned} A_{pq,rs} &= S(p-r).S(q-s).(-1)^{p+q+r+s}.|M_{pq,rs}| \\ &= S(p-r).S(q-s).(-1)^{p+q+r+s}.(-1)|M''_{pq,rs}| \\ &= S(p-r).S(q-s).(-1)^{p+q+r+s-1}.[|M''_1|+|M''_2|] \\ &= - A_{ps,rv} + A_{pq,rv} \\ &= A_{pq,rv} - A_{ps,rv} \end{aligned}$$

Terbukti.

Contoh 22

Diketahui matriks equikofaktor pada contoh 21.

Untuk menentukań kofaktor ordo 2 $A_{34,13}$ dengan menggunakan teorema 4, maka

$$A_{34,13} = A_{34,11} - A_{33,11}$$

dengan

$$A_{34,11} = 1.1.(-1)^{9}. \begin{vmatrix} a+b & -b \\ -c & -d \end{vmatrix}$$

$$= ad + bd + bc$$

$$A_{33,11} = 1.1.(-1)^{8} \begin{vmatrix} a+b & 0 \\ -c & c+d \end{vmatrix}.$$

$$= ac + ad + bc + bd$$

Sehingga

$$A_{34,13} = ad + bd + bc - ac - ad - bc - bd = -ac$$

Jika perhitungan $A_{34,13}$ dilakukan berdasarkan definisi 26 didapat :

$$A_{34,13} = 1.1.(-1)^{11}. \begin{vmatrix} -a & a+b \\ 0 & -c \end{vmatrix} = -ac$$

2.6. Digraph yang bersesuaian dengan Matriks Equikofaktor

Matriks equikofaktor yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah matriks equikofaktor yang berbentuk :

$$Y = \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=2}^{n} y_{1k} & -y_{12} & -y_{13} & \cdots & -y_{1n} \\ -y_{21} & \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq 2}}^{n} y_{2k} & -y_{23} & \cdots & -y_{2n} \\ \vdots & & & & \\ -y_{n1} & -y_{n2} & -y_{n3} & & \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{n} y_{nk} \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (14)$$

dengan $\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} y_{ik} - \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} y_{ki} = 0 \ , \ \forall \ i = 1,2, \ \ldots \ ,n$

Matriks Y sering disebut sebagai matriks indefinite - admittance yang digunakan dalam analisa jaringan listrik.

Contoh 23

Matriks equikofaktor yang akan dibahas dalam tulisan ini misalnya:

$$Y = \begin{bmatrix} a+b & -b & -a & 0 \\ -b & b+c+d-e & -d & -c+e \\ -a & -d+e & a+d+f & -e-f \\ 0 & -c & -f & f+c \end{bmatrix}$$

Definisi 28

Digraph yang bersesuaian dengan matriks equikofaktor Y pada persamaan (14), yang berordo n, dinotasikan dengan G(Y) adalah digraph dengan n buah titik sedemikian sehingga jika $y_{ij} \neq 0$ dan $i \neq j$, maka terdapat garis berarah dari titik i ke titik j dengan bobot y_{ij} , untuk $i,j = 1,2, \ \ldots \ , n$.

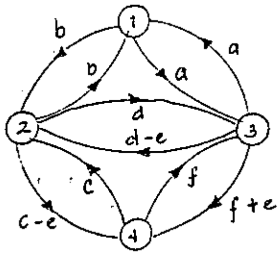
Contoh 24

Untuk matriks equikofaktor pada contoh 23 :

Bentuk digraph yang bersesuaian dengan Y adalah digraph dengan 4 buah titik, dengan :

- bobot pada garis berarah (1,2) adalah b
- bobot pada garis berarah (1,3) adalah a
- bobot pada garis berarah (2,4) adalah c-e

dan seterusnya sehingga diperoleh :



Gambar 14

2.7. Tree Berarah

Definisi 29

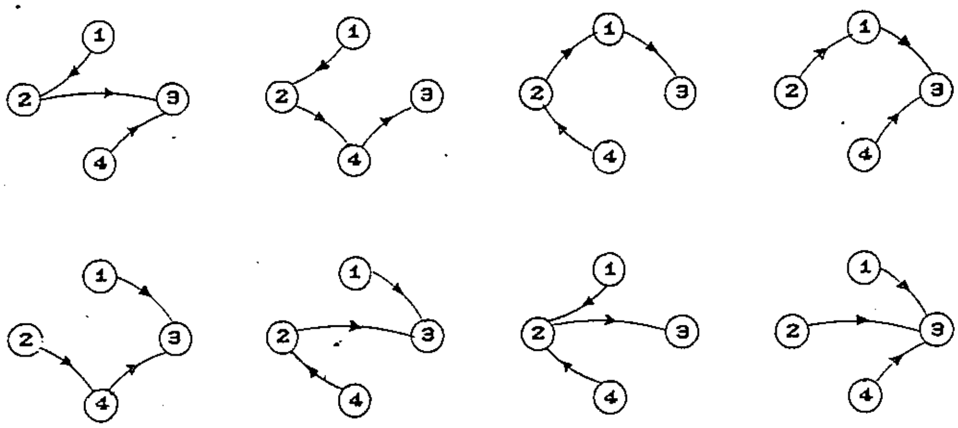
Suatu subgraph dari digraph G yang dinotasikan dengan t_i disebut tree berarah yang bersesuaian dengan titik i, memenuhi :

i. t_i merupakan suatu tree pada G (t_i terhubung dan tidak memuat sirkuit).

ii. derajat keluar dari setiap titik pada t_i adalah satu, kecuali titik i yang mempunyai derajat keluar nol.

Contoh 25

Digraph pada gambar 14 mempunyai himpunan tree berarah t_3 yaitu :



Gambar 15

Titik-titik 1,2 dan 4 mempunyai derajat keluar = 1

Titik 3 mempunyai derajat keluar = 0

Definisi 30

Suatu subgraph dari digraph G yang dinotasikan dengan $t_{i,j}$ disebut 2-tree berarah pada G yang bersesuaian dengan titik i dan j, memenuhi :

i. $t_{i,j}$ merupakan suatu 2-tree pada G (definisi 17)

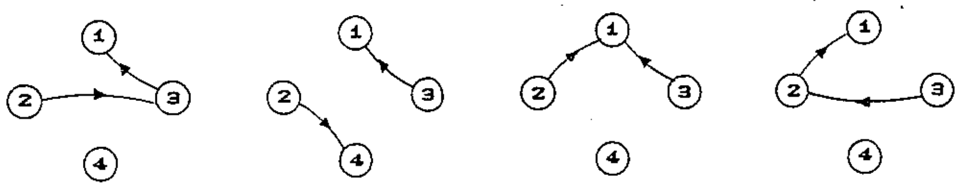
ii. derajat keluar dari setiap titik pada $t_{i,j}$ adalah satu, kecuali titik i dan j yang mempunyai derajat keluar nol.

Definisi 31

Notasi $t_{ab,cd}$ menunjukka 2-tree berarah dengan titik a dan b dalam satu komponen dan titik c dan d dalam komponen lainnya, sedangkan titik a dan c adalah titik-titik yang mempunyai derajat keluar nol.

Contoh 26

Digraph G pada gambar 14 mempunyai himpunan 2-tree berarah $t_{13,4}$ yaitu :



Gambar 16

titik 1 dan 3 dalam satu komponen, titik 4 dalam komponen lain, titik 1 dan 4 masing-masing berderajat keluar nol.

Definisi 32

Matriks tree berarah yang bersesuaian dengan digraph

G dengan n titik, dinotasikan D(G) adalah suatu matriks bujursangkar berordo n, sedemikian sehingga jika $D(G) = [d_{ij}]$, maka d_{ii} menyatakan derajat keluar titik i dalam G dan $-d_{ij}$, $i \neq j$ menyatakan banyaknya garis berarah dari titik i ke titik j dalam G, untuk $i,j = 1,2, \ldots ,n$, tanpa memperhatikan garis loop.

Contoh 27

Matriks tree berarah dari digraph G pada gambar 14 adalah :

$$D(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$d_{22} = 3$ menyatakan derajat keluar titik 2

$d_{32} = 1$ menyatakan banyaknya garis berarah dari titik 3 ke titik 2

dan seterusnya.