BAB II

MATERI DASAR

2.1. BEBAS LINIER DAN BERGANTUNG LINIER

Definisi 1.

Himpunan m buah vektor $\{u_1, u_2, \ldots u_m\}$ disebut bebas linier (linierly independent), apabila :
$c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_mu_m = 0$, hanya terpenuhi oleh :
$c_1 = c_2 = c_m = 0$.

Definisi 2.

Himpunan m buah vektor $\{u_1 , u_2 , \ldots , u_m\}$ disebut bergantung linier (linierly dependent) , apabila terdapat $c_1 , c_2 , \ldots , c_m$ yang tidak semuanya nol. Sedemikian hingga :

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_mu_m = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Teorema 1.

Jika sebagian (himpunan bagian) dari m buah vektor $\{u_1 , u_2 , \ldots , u_m\}$ bergantung linier maka keseluruhan m buah vektor tersebut bergantung linier.

Bukti :

Ambil sembarang p vektor, sehingga $p < m$ bergantung linier, katakan $u_1, u_2, \ldots, u_p$, maka akan terdapat skalar-skalar $c_1, c_2, \ldots , c_p$, sedemikian hingga : $c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_pu_p = 0$ . .... (8)
Ambil kemudian $c_{p+1} = c_{p+2} = c_m = 0$, sehingga per -

samaan (8) akan menjadi :

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_pu_p + c_{p+1}u_{p+1} + \ldots + c_mu_m = 0$$

Sehingga akan terdapat $c \neq 0$ (c antara $c_1, c_2, \ldots c_p$)

jadi m vektor tersebut bergantung linier.

Teorema 2.

Jika himpunan m vektor $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ adalah bebas linier maka sebagian (himpunan bagian)nya juga bebas linier.

Bukti:

Andaikan himpunan bagian tersebut bergantung linier ,menurut Teorema (1) keseluruhan m vektor adalah bergantung linier. Suatu kontradiksi, jadi pengandaian tidak benar, haruslah himpunan bagian tersebut bebas linier.

Definisi 3.

Jika b dapat dinyatakan sebagai :

$b = \lambda_1u_1 + \lambda_2u_2 + \ldots + \lambda_nu_n$,maka b disebut suatu kombinasi linier dari $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Teorema 3.

Jika satu dari vektor-vektor $u_1, u_2, \ldots, u_n$ kombinasi linier dari yang lain maka vektor-vektor $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bergantung linier.

Bukti :

Misalkan $u_1 = \lambda_2u_2 + \lambda_3u_3 + \ldots + \lambda_nu_n$, maka $-u_1 + \lambda_2u_2 + \lambda_3u_3 + \ldots + \lambda_nU_n = 0$. Hal ini menyatakan bahwa n vektor-vektor itu bergantung linier , karena ada koefesien u yang tidak sama dengan nol atau ada konstanta $\neq 0$.

2.2.MATRIKS,DETERMINAN DAN EIGEN VALUE

2.2.1.MATRIKS

Definisi 4.

Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riel - atau bilangan kompleks) yang disusun atau dijajar kan secara empat persegi panjang (menurut baris-baris atau kolom-kolom).

skalar-skalar itu elemen matriks, untuk batasnya-diberikan :

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

Definisi 5.

Matriks bujur sangkar adalah matriks yang mempunyai ordo n.

Pandang sebuah matriks $D = (d_{ij})$, $i=1,2,\ldots n$ dan $j= 1,2,\ldots,n$;yang berarti bahwa banyaknya baris = n serta banyaknya kolom = n.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & & d_{nn} \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots.(9)$$

Boleh juga dituliskan matriks $D_{(nxn)} = (d_{ij})$.

(n x n) disebut ukuran ordo dari matriks.

2.2.2.DETERMINAN

Definisi 6.

Determinan adalah harga numerik dari matrik bu - jur sangkar.

Pada setiap matriks bujur sangkar D , kita da - pat menghubungkan sebuah numerik yang disebut - determinan D. Determinan D dinyatakan oleh $|D|$ atau det (D) ditulis dalam bentuk:

$$|D| = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{nn} \end{vmatrix} \qquad \ldots\ldots \quad (10)$$

Pernyataan (10) juga dikatakan sebagai determinan dengan orde-n.

Definisi 7.

Minor dari d_{ij} adalah determinan orde n-1 yang-dibentuk dengan melenyapkan baris ke-i dan ko - lom ke-j dari $|D|$, minor dari d_{ij} dinyatakan - M_{ij} .

Definisi 8.

Jika $|D|$ sebuah determinan ordo-n, maka :

$$|D| = \sum_{i=1}^{n} d_{ij} \, (-1)^{i+j} M_{ij} \, , \qquad \ldots\ldots \quad (11)$$

untuk sembarang nilai tetap j. Atau

$$|D| = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \, (-1)^{i+j} M_{ij} \, , \qquad \ldots\ldots \quad (12)$$

untuk sembarang nilai tetap-i.

Bila kita menghitung $|D|$ dengan rumus (11), kita uraikan $|D|$ menjadi minor-minor dari kolom ke-j. Dengan cara yang sama , rumus (12) membicarakan uraian dari $|D|$ menjadi minor-minor dari baris ke-i.

2.2.2.1.SIFAT-SIFAT DETERMINAN

a. Suatu determinan tidak berubah nilainya, jika satu baris atau kolom ditambahkan pada baris atau kolom lain

b. Tanda determinan akan berubah apabila dua baris atau kolom ditukar tempatnya.

$$\det (D) = - \det (D)$$

c. Harga determinan menjadi c kali ,bila suatu baris atau kolom dikalikan dengan c (skalar).

2.2.3.EIGEN VALUE

Definisi 9.

D suatu matriks bujur sangkar , λ skalar yang memenuhi $D.V = \lambda V$, untuk vektor kolom $V \neq 0$ maka λ disebut eigen value dari matriks D.

Eigen value dari matriks bujur sngkar D dapat dicari dengan cara sebagai berikut :

λ skalar memenuhi persamaan $D.V = \lambda V$, dengan vektor kolom $v = 0$. Dapat dinyatakan sebagai :

$$D.V = \lambda E.V \qquad \ldots\ldots (13)$$

dengan E suatu matriks satuan. Persamaan (13) dapat diubah menjadi :

$$(D.V - \lambda.E.V) = 0$$

atau

$$(D - \lambda.E).V = 0 \qquad \ldots\ldots (14)$$

Persamaan (14) ini merupakan suatu sususnan persamaan linier homogen yang mana diinginan -

solusi non trivial $V \neq 0$, maka akan berlaku :

$$\det (D - \lambda E) = 0 \text{ atau } | D - \lambda E | = 0 \quad \ldots(15)$$

persamaan (15) disebut persamaan karakteristik λ, dan dapat pula disajikan dalam bentuk :

$$\lambda^N + c_1 \lambda^{N-1} + c_2 \lambda^{N-2} + \ldots + C_N = 0 .$$

Dengan N ordo dari matriks D dan $c_1, c_2, \ldots, c_m$ suatu konstanta.

2.3. DIFERENSIAL DAN INTEGRAL

3.1. DIFERENSIAL

Mendeferensialkan f(x) terhadap x mengandung pengertian yaitu menentukan diferensial dari f(x) terhadap x.

Diberikan Y= f(x) suatu fungsi kontinue pada suatu interval. Jika x bertambah dengan Δx, maka Y bertambah dengan ΔY. Sehingga berlaku :

$$\begin{array}{rcl} Y + \Delta Y & = & f(x+\Delta x) \\ Y & = & f(x) \quad - \\ \hline \Delta Y & = & f(x + \Delta x) - f(x) \end{array}$$

Jadi $\dfrac{\Delta Y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Definisi 10.

Diferensial Y=f(x) terhadap x adalah:

Jika $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\Delta Y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, ada

dapat ditulis :

$$\frac{dY}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Definisi 11.

Diferensial tingkat tinggi dari f(x) terhadap x yaitu bila $Y = f(x)$, maka :

$f'(x) = \frac{dY}{dx}$, disebut diferensial tingkat 1

$f''(x) = \frac{d^2Y}{dx^2}$, disebut diferensial tingkat 2

$\vdots \qquad \vdots$

$f^n(x) = \frac{d^NY}{dx^N}$, disebut diferensial tingkat N

2.3,2.INTEGRAL

Mengintegralkan f(x) pada suatu interval sumbu x mengandung pengertian yaitu menentukan integral dari f(x) pada interval sumbu x yang ditentukan.

Definisi 12.

f(x) fungsi kontinue pada suatu interval, - fungsi F(x) disebut anti derivative atau integral - f(x) pada interval $X = (x_i, x_j)$ dapat ditulis :

$F(x) = \int f(x)\, dx$, jika $\frac{d F(x)}{dx} = f(x)$

Teorema 4.

Jika f(x) fungsi kontinue pada suatu interval dan $Y = \int f(x)\, dx$, maka berlaku $\frac{dY}{dx} = f(x)$.

Bukti :

Ambil $Y = \int f(x)\, dx = F(x) + c$, dimana - c = konstanta sembarang .... (16)

Dengan mendeferensialkan persamaan (16) terhadap x akan diperoleh :

$$\frac{d\ Y}{d\ x} = \frac{d\ F(x)}{d\ x} + \frac{d\ c}{d\ x} \qquad \ldots\ldots\ldots (\ 17\ )$$

Dengan $\frac{d\ c}{d\ x} = 0$, menurut definisi (9), persamaan (17) akan menjadi :

$$\frac{d\ Y}{d\ x} = \frac{d\ F(x)}{d\ x} \qquad \ldots\ldots\ldots (\ 18\ )$$

menurut definisi (12) $\frac{d\ F(x)}{d\ x} = f(x)$. Sehingga - persamaan (18) dapat dinyatakan :

$$\frac{d\ Y}{d\ x} = f(x)$$

2.4. PERSAMAAN DIFERENSIAL, KOMPLEKS DAN KWADRAT

4.1. PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER (PD LINIER)

Suatu PD linier orde n adalah persamaan yang berbentuk :

$$a_n(x)Y^n + a_{n-1}Y^{n-1} + \ldots + a_1(x)Y' + a_0(x)Y = f(x) \quad \ldots(19)$$

Kita misalkan bahwa koefesien-koefesien $a_n(x)$, - a_{n-1} , ... , $a_0(x)$ dan fungsi f(x) merupakan fungsi - fungsi yang kontinue dan koefesien pertama $a_n(x) \neq 0$, untuk setiap $x \in I$. Selang I disebut selang definisi (selang asal) dari PD itu. Jika f(x) identik dengan - nol, PD (19) akan homogen, Jika f(x) tak identik nol, PD (19) disebut tak homogen. Dari PD (19) dapat di - singkat :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ Y^i = f(x) \qquad \ldots\ldots\ (\ 20\ )$$

Definisi 13.

Untuk setiap PD tak homogen (19), ada satu hubungan PD homogen yang ditentukan oleh :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, Y^i = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Definisi 14.

Jika n fungsi-fungsi $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Membentuk - sistem penyelesaian fundamental untuk persamaan - (21) , maka fungsi Y_h dapat ditentukan oleh :

$$Y_h = c_1Y_1 + c_2\, Y_2 + \ldots + c_n\, Y_n \quad \ldots . \ (22)$$

dimana c_i konstanta sembarang .

Teorema 5.

Jika Y_1 , Y_2 , ..., Y_n membentuk sistem penyelesaian fundamental untuk persamaan (21) ,dan jika - Y_p suatu penyelesaian khusus dari persamaan (20) maka penyelesaian umum (Y_u) dari persamaan (32) dapat disajikan dalam bentuk :

$$Y_u = Y_h + Y_p = c_1Y_1 + c_2Y_2 + \ldots + c_nY_n + Y_p \ \ldots \ (23)$$

Bukti :

Cukup ditunjukan bahwa Y seperti yang ditulis dalam persamaan (23) ,memenuhi persamaan (20) dan bahwa - setiap penyelesaian Y dari persamaan (20) dapat ditulis dalam bentuk persamaan (23). Dengan mensubstitusikan Y kedalam persamaan (20),sehingga akan diperoleh :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, Y^i = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ (c_1Y_1+c_2Y_2+\ldots+c_nY_n+Y_p)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ (c_1 Y_1^i + c_2 Y_2^i + \ldots + c_n Y_n^i + Y_p^i\ )$$

$$= c_1 \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ Y^i + c_2 \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ Y^i + \ldots +$$

$$c_n \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ Y^i + \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ Y^i$$

maka :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ Y^i = c_1.0 + c.0 + \ldots + c_n.0 + f(x)$$

$$= f(x)$$

Jelaslah,bahwa fungsi Y seperti yang didefinisikan oleh persamaan (23),yang memenuhi persamaan (20). Sekarang ambil y sembarang penyelesaian persamaan-(20). Akan dibuktikan bahwa y dapat ditulis dalam bentuk persamaan (23). Ini sama dengan membuktikan bahwa $y - Y_p$, memenuhi PD homogen (21) yaitu :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ (\ y - Y_p\ )^i = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ y^i - \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ Y^i$$

$$= f(x) - f(x)$$

$$= 0$$

2.4.2.BILANGAN KOMPLEKS

Definisi 15.

Bilangan kompleks adalah pasangan berurutan dari - bilangan real dan dituliskan sebagai (x,y),dengan x,y real.

Penulisan yang lain : $Z = x + iy$, dengan $i = \sqrt{-1}$

Definisi 16.

Bilangan kompleks a + bi dan c + di adalah sama -

bila dan hanya bila a=c dan b=d.

Definisi 17.

Bilangan kompleks konjugate/sekawan dari $Z = x + iy$ dimaksudkan adalah bilangan kompleks $\bar{Z} = x - iy$.

Bilangan kompleks $Z = x + iy$, dapat juga dinyatakan dengan $Z = R(z) + i\ I(z)$, dimana $R(z)$ adalah ba - gian real dari z dan $I(z)$ adalah bagian imaginier - dari z. Jadi $x = R(z)$ dan $y = I(z)$. Setiap bilangan kompleks bilangan kompleks dapat pula disajikan - dalam bentuk polarnya :

$Z = x + iy = r (\cos \theta + i \sin \theta)$, dimana

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = || z ||$$

Dapat juga tertulikan $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$,

$e = 2{,}718$.

Definisi 18.

Persamaan idientitas :

a. $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

b. $\cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta$

c. $\sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta$

d. $\mathrm{Sin}^3 \theta = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta$

e. $\mathrm{Cos}^3 \theta = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta$

f. $\mathrm{Cos}^2 \theta \cos 3\theta = \frac{1}{2} \cos 3\theta + \frac{1}{4} \cos 5\theta + \frac{1}{4} \cos \theta$

g. $\mathrm{Cos}\ \theta \cos^2 3\theta = \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 5\theta + \frac{1}{4} \cos 7\theta$

h. $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

i. $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

j. $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

Definisi 19.

Apabila persamaan diferensial dengan koefesien - riel :

$$a_2Y'' + a_1Y' + a_0Y = 0\ ,\ a_2 \neq 0 \quad \ldots. \quad (24)$$

dengan λ_1 dan λ_2 adalah akar-akar persamaan karak - teristik dari persamaan (24) yaitu :

$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$, maka bentuk penyele saian dari persamaan karateristik tersebut adalah :

a. Untuk akar-akar riel dan berlainan $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$Y(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$$

dengan c_1, c_2 konstanta sembarang

b. Untuk akar-akar yang sama $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$Y(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}\,x$$

dengan c_1, c_2 konstata sembarang.

c. Untuk akar-akar kompleks sekawan $\lambda_{1,2} = k \pm il$

$$Y(x) = c_1\ e^{k+il} + c_2\ e^{k-il}$$

$$= e^{kx}(c_1\cos lx + ic_1\sin lx) +$$

$$e^{kx}(c_2\cos lx + ic_2\sin lx)$$

$$= e^{kx}(\ (c_1+c_2)\cos lx + (c_1-c_2)i\sin lx)$$

misal $c_1 + c_2 = A_1$; $c_1 - c_2 = B_1$

$$Y(x) = e^{kx} (A_1 \cos lx + B_1 \sin lx).$$

2.4.3. PERSAMAAN KWADRAT

Definisi 20.

Persamaan kwadrat adalah suatu persamaan yang variabelnya mempunyai pangkat tertinggi sama dengan dua.

Bentuk umum persamaan kwadrat :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ ,dengan } a \neq 0$$

mempunyai akar-akar :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

2.5. DERET FOURIER

Definisi 21.

Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan mempunyai periode T atau fungsi periodik dengan periode T, jika untuk semua x, berlaku :

$f(x + T) = f(x)$.

Disini T adalah suatu konstanta yang positif. Harga terkecil $T > 0$ disebut periode terkecil dari $f(x)$.

Definisi 22.

Suatu fungsi $f(x)$ disebut fungsi ganjil jika berlaku :

$f(-x) = -f(x)$.

Definisi 23.

Suatu fungsi $f(x)$ disebut fungsi genap jika memenuhi : $f(-x) = f(x)$

Contoh 2.

$f(x) = \cos \hat{x}$, untuk $\hat{x} = 30^o$

Jawab:

$f(-x) = \cos(-x) = \cos x$, sehingga berlaku :

$f(30) = \cos 30^o = 0,5\sqrt{3}$

$f(-30) = \cos(-30) = \cos 30^o = 0,5\sqrt{3}$

Jadi untuk $x=30^o$, berlaku : $f(-x) = f(x)$, atau sifat fungsi genap menurut definisi (23).

Definisi 24.

Suatu deret fungsi dengan bentuk :

$$f(x) = a_o + \sum_{i=0}^{n} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \ldots.(25)$$

atau

$$f(x) = a_o + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx$$

$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx$$

disebut deret Forier.

Konstanta-konstanta a_o, a_n, dan b_n $(n=1,2,3,\ldots)$, disebut koefesien dari deret fourier. Apabila deret - (25) konvergen, maka jumlah deret merupakan suatu - fungsi f(x) yang periodik dengan periode 2π . Dengan demikian fungsi $f(x) = f(x + 2\pi)$, atau - dapat dinyatakan sebagai deret fourier yang konver - gen dalam interval dengan panjang 2π.

Untuk menentukan harga-harga koefesien dari - a_0 , a_n ,dan b_n dengan menggunakan definisi (24) yang tertentu pada interval (-L,L).

Definisi 25.

Sifat integral sinus dan cosinus pada interval $(-L,L)$, sebagai berikut :

a. $\int_{-L}^{L} \cos mx \cos nx\, dx = 0 \quad , m \neq n$

$= L \quad , m = n$

b. $\int_{-L}^{L} \sin mx \sin nx\, dx = 0 \quad , m \neq n$

$= L \quad , m = n$

c. $\int_{-L}^{L} \sin mx \cos nx\, dx = 0 \quad , m \neq n$

$= L \quad , m = n$

Teorema 6.

Didefinisikan deret fourier pada interval $(-L,L)$, yaitu :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad \ldots (26)$$

maka koefesien fouriernya :

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

untuk $f(x)$ diluar berlaku : $f(x+2L) = f(x)$ atau $f(x)$ memiliki periode $2L$.

Bukti :

Diberikan deret fourier seperti dalam persamaan (26) yang dikalikan dengan $\cos \frac{m\pi x}{L}$, diintegralkan :

$$\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{m\pi x}{L}\, dx = \int_{-L}^{L} a_0 \cos \frac{m\pi x}{L}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_{-L}^{L} f(x) \; a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L}\, dx + \int_{-L}^{L} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L}\, dx \Big)$$

Menurut definisi (25) a dan b maka :

$$\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = a_n L$$

sehingga diperoleh :

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

persamaan (26) dikalikan dengan $\sin \frac{m\pi x}{L}$,

diintegralkan :

$$\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{m\pi x}{L}\, dx = \int_{-L}^{L} a_0 \sin \frac{m\pi x}{L}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_{-L}^{L} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$\sin \frac{m\pi x}{L}\, dx + \int_{-L}^{L} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L}\, dx \Big)$$

Menurut definisi (25) b dan c maka :

$$\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = b_n L$$,sehingga diperoleh:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx .$$

Persamaan (26) diintegralkan sehingga didapat :

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = \int_{-L}^{L} a_0\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_{-L}^{L} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx + \int_{-L}^{L} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \Big)$$

$$= a_0 \; x \Big|_{-L}^{L}$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 2\, a_0\, L$$,maka diperoleh :

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx .$$

2.6. DETERMINAN WRONSKIAN

Definisi 26.

Misalkan Y_1 , Y_2 ,...,Y_n n buah fungsi-fungsi - yang semuanya dan turun-turunannya sampai dengan -

turunan ke n-1 kontinue pada selang $a \leq x \leq b$, Wron - skian dari Y_1 , Y_2 , ... , Y_n dihitung pada x , di- nyatakan oleh $\Delta (Y_1 , Y_2 , \ldots , Y_n ; x)$ dan diten- tukan sebagai determinan :

$$\Delta (Y_1,Y_2,\ldots,Y_n ;x) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n \\ Y_1' & Y_2' & \cdots & Y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_1^{n-1} & Y_2^{n-1} & & Y_n^{n-1} \end{vmatrix} = \Delta(x)$$

Tiap fungsi yang muncul dalam determinan ini di hi - tung pada x .

Teorema 7.

Pandang Y_1 , Y_2 ,..., Y_n solusi persamaan diferensial orde n. Jika $\{Y_1 , Y_2 ,\ldots, Y_n\}$ merupa- kan solusi yang memenuhi definisi (2), maka $\Delta(Y_1 , Y_2 ,\ldots, Y_n ; x) = 0$, untuk setiap $x \in I$

Bukti :

Apabila solusi Y_1 , Y_2 ,..., Y_n dapat di - deferensialkan pada interval I akan memenuhi defini- si (2) pada I, maka ada konstanta sekurng -kurangnya satu dari c_1 , c_2 ,...,c_n yang tidak sama dengan nol sedemikian hingga :

$$c_1Y_1(x) + c_2Y_2(x) + \ldots + c_nY_n(x) = 0 , \forall x \in I \quad ..(27)$$

Karena solusi-solusi itu dapat dideferensialkan se - hingga persamaan (27) akan menjadi :

$$c_1Y_1'(x) + c_2Y_2'(x) + \ldots + c_nY_n'(x) = 0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ldots\ldots (28)$$
$$c_1Y_1^{n-1}(x) \quad c_2Y_2^{n-1}(x) \ldots\ldots c_nY_n^{n-1}(x) = 0$$

Dari persamaan linier (27) dan (28) digabung akan menjadi :

$$\begin{aligned} c_1Y_1(x) + c_2Y_2(x) + \ldots + c_nY_n &= 0 \\ c_1Y_1'(x) + c_2Y_2'(x) + \ldots + c_nY_n' &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ c_1Y_1^{n-1}(x) + c_2Y_2^{n-1}(x) \ldots c_nY_n^{n-1}(x) &= 0 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots (29)$$

Persamaan (29) dapat disajikan dalam bentuk matriks- sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \ldots & Y_n(x) \\ Y_1'(x) & Y_2'(x) \ldots & Y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_1^{n-1}(x) & Y_2^{n-1}(x) \ldots & Y_n^{n-1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karena memenuhi definisi (2) maka ada $c_i \neq 0$, $i=1,2,.n$ sehingga persamaan (29) dipenuhi apabila :

$$\Delta(Y_1(x),Y_2(x),\ldots,Y_n(x);x) = \begin{vmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \ldots Y_n(x) \\ Y_1'(x) & Y_2'(x) \ldots Y_n'(x) \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ Y_1^{n-1}(x) & Y_2^{n-1}(x) \quad Y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

Oleh karena itu $\Delta(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n;\ x) = 0$, $\forall\ x \in I$.

Teorema 8.

Pandang $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ solusi persamaan (19) orde-n . $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ merupakan solusi yang memenuhi definisi (1), jika dan hanya jika $\Delta(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n; x) \neq 0$, $\forall\, x \in I$.

Bukti ;

($\Rightarrow$) Jika $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ merupakan solusi yang memenuhi definisi (1), maka ada konstanta $c_1 = c_2 = c_n = 0$ sedemikian hingga sesuai persamaan (27), karena solusi itu dapat dideferensialkan sehingga persamaan (27) berubah menjadi persamaan (28). Dari uraian diatas didapat persamaan linier seperti persamaan (29).

Karena harga konstanta $c_1 = c_2 = c_n = 0$, maka

$$\Delta(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n; X) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_n \\ Y_1' & Y_2' & \ldots & Y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_1^{n-1} & Y_2^{n-1} & & Y_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

Oleh karena itu $\Delta(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n; x) \neq 0$, $\forall\, x \in I$.

($\Leftarrow$) Karena

$$\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_n \\ Y_1' & Y_2' & \ldots & Y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_1^{n-1} & Y_2^{n-1} & & Y_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ,maka}$$

untuk selanjutnya bukti ini diambil n=2 , sehingga menjadi :

$$\begin{vmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \\ Y_1'(x) & Y_2'(x) \end{vmatrix} = Y_1(x)\, Y_2'(x) - Y_2(x)\, Y_1'(x) \neq 0$$

dari sini terdapat hubungan :

$Y_1(x)\, Y_2'(x) \neq Y_2(x)\, Y_1'(x)$. Oleh karena nilainya tidak sama yang berarti tidak berkelipatan maka menurut definisi (1) harga $c_1 = c_2 = c_n = 0$,sehingga $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ merupakan solusi yang memenuhi definisi (1).

2.7. KONSEP KESTABILAN

Pandang sistem persamaan diferensial :

$$X' = f(t,x)\ ,\ t \geq t_0 \geq 0 \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (30)$$

dimana f dan x merupakan vektor-vektor di R^n, dan f kontinue pada selang $[t_0, \infty)$ atau $I = [t_0, \infty)$ dan $S_\rho = \{ x \in R^n : \|x\| < \rho \}$, $\rho > 0$.

Definisi 27.

Solusi x(t) dikatakan stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\partial = \partial(\varepsilon) > 0$ sehingga setiap solusi Y(t) dari sistem persamaan diferensial (30) pada I yang memenuhi :

$$\| Y(t_0) - X(t_0) \| < \partial$$

juga memenuhi :

$$\| Y(t) - X(t) \| < \varepsilon ,\ \forall\ t \geq t_0$$

solusi sistem persamaan diferensial (30) yang tidak memenuhi dikatakan tidak stabil.

COntOh 3 .

Pandang persamaan diferensial berikut :

$x' = -x \quad , \quad t \geq 0$ .... (31)

Solusi persamaan diferensial (31) yang memenuhi -
$Y(0) = c$, dengan c konstanta sembarang adalah :
$Y(t) = c\, e^{-t}$. Akan diselidiki apakah solusi $X(t)=0$
, $t \geq 0$ stabil ?

Jawab :

Ambil $\varepsilon > 0$ sembarang. Maka :

$$\|Y(0) - X(0)\| = \|c - 0\| = \|c\|$$

dan,

$$\|Y(t) - X(t)\| = \|ce^{-t}-0\| = \|c\|e^{-t} \leq \|c\| , \quad t \geq 0.$$

Selanjutnya ambil ∂ dengan $0 < \partial \leq \varepsilon$. Maka untuk - seiap solusi $Y(t) = c\, e^{-t}$ dengan $\|c\| < \partial$ berlaku :

$$\|Y(0) - X(0)\| = \|c\| < \partial$$

dan

$$\|Y(t) - X(t)\| < \|c\| < \partial \leq \varepsilon , \quad t \geq 0 .$$

Jadi solusi $X(t) = 0$, $t \geq 0$ adalah stabil.

Contoh 4.

Pandang persamaan diferensial berikut :

$x' = x \quad , t \geq 0$ .... (32)

Solusi persamaan diferensial (32) adalah :
$Y(t) = c\, e^{t}$, $t \geq 0$, dengan c konstanta sembarang
Akan diselidiki apakah solusi $X(t) = 0$, $t \geq 0$ stabil atau tidak ?

Jawab :

Ambil $\varepsilon > 0$ sembarang . Maka :

$\|Y(t) - X(t)\| = \|c\, e^{t} - 0\| = \|c\|\, e^{t}$, jika $t \to \infty$,dengan $\|c\| \neq 0$. Jadi untuk t yang cukup besar berlaku :

$\|Y(t) - X(t)\| > \varepsilon$

Karena itu solusi $X(t) = 0$, $t \geq 0$ tak stabil.