BAB II

MATERI DASAR

2.1. HIMPUNAN

DEFINISI : 1

Himpunan adalah sekelompon obyek-obyek yang berada dalam satu kesatuan. Obyek-obyek ini disebut elemen atau anggota-anggota himpunan.

Dinotasikan dengan huruf besar.

Misalkan : A, B, X, Y,...

Contoh : 3

1. Nama-nama dosen Matetika F. MIPA UNDIP.
2. Nama-nama bulan yang jumlahnya 31 hari di tahun Masehi.

DEFINISI : 2

Himpunan semesta adalah suatu himpunan dari mana himpunan lainnya dibentuk.

Notasi : Himpunan semesta dilambangkan dengan huruf besar, biasanya dengan huruf S atau X.

Contoh : 4

X adalah himpunan bilangan asli.

DEFINISI : 3

Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B, jika setiap elemen himpunan A juga merupakan elemen himpunan B.

Notasi :

$A \subset B$, dibaca A himpunan bagian B.

$A \not\subset B$, dibaca A bukan himpunan bagian B.

Contoh : 5

Jika A : { 3,9,11 }

B : { 1,2,3,4,5,6,7,9,10}

maka $A \subset B$

$3 \in A$

DEFINISI : 4

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai elemen sama sekali.

Notasi : $\emptyset$

DEFINISI : 5

Dua hompunan A dan B adalah sama, ditulis A = B, jika hanya jika $A \subset B$ dan $B \subset A$.

Contoh : 6

Diketahui A = {2,4,6,8,10}

B = {10,8,6,4,2}

maka $A \subset B$ dan $B \subset A$ jadi A = B.

DEFINISI 6.

Gabungan himpunan A dan B adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri semua anggota himpunan A saja atau anggota B saja, atau semua anggota di himpunan A dan B.

Secara matematis ditulis : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$

Contoh :7, A = {1,2,3,4,5}

B = (2,3)

maka $A \cup B = \{ 1,2,3,4,5\}$

DEFINISI : 7

Irisan himpunan A dan B adalah himpunan yang anggota-anggota himpunan A yang anggota-anggota terdiri dari anggota -anggota himpunan A yang sekaligus merupakan angota-angota himpunan A yang sekaliggus merupakan anggota-anggota dari himpunan B.

Notasi : $A \cap B$

Secara matematis ditulis,

$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$

Contoh : 8

Diketahui $A = \{1,2,3,4,5\}$

$B = \{ 2,3\}$

Maka $A \cap B= \{2,3\}$

DEFINISI : 8

Jika A suatu himpunan dan X adalah himpunan semesta,maka A komplement adalah suatu himpunan yang anggotanya dari X, tetapi bukan merupakan anggota himpunan A.

Notasi : $A^c = \{ x \mid x \in X,\ x \notin A \}$

Contoh : 9

Diketahui $X = \{ 1,2,3,5,4,5,6,7,8,9,10 \}$

$A = \{ 2,4,6,8,10 \}$

Maka $A^c = \{ 1,3,5,7,9 \}$

Maka $A^c = \{1,3,5,7,9\}$

2.2. FUNGSI DAN PEMETAAN

DEFINISI : 9

f disebut fungsi dari A ke B, jika setiap anggota pada himpunan A maka f menentukan dengan tunggal pada himpunan B.

Ditulia :

$f : A \longrightarrow B$

A : daerah asal (domain)

B : daerah kawan (ko.domain)

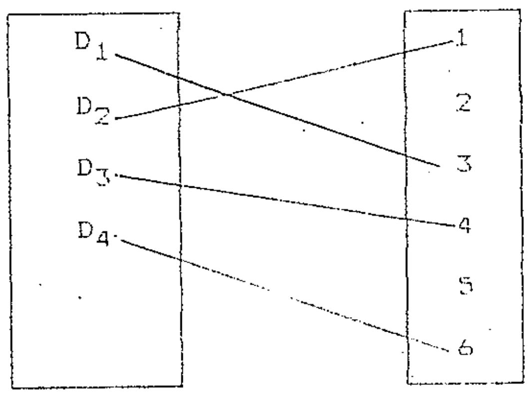
Contoh : 10

A himpunan 4 dadu, yaitu $A = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$

B himpunan bilangan-bilangan mata dadu 1 sampai 6, yaitu $B = \{1,2,3,4,5,6\}$

Suatu lemparan menentukan suatu fungsi dari A ke B.

$A \xrightarrow{f} B$



Ternyata setiap anggota pada himpunan A menentukan dengan tunggal anggota pada himpunan B.

2.3. PENGERTIAN HIMPUNAN FUZZY

DEFINISI : 10

Jika X himpunan semesta, maka himpunan fuzzy $\underset{\sim}{A}$ dari X adalah merupakan fungsi $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ ke bilangan riil pada interval tertutup [0,1] untuk setiap $x \in X$.

Fungsi $\mu_{\underset{\sim}{A}}$: $X \longrightarrow [0,1]$ dinamakan fungsi keanggotaan X dalam A.

Bilamana X adalah himpunan berhingga $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oleh adalah himpunan fuzzy $\underset{\sim}{A}$ dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\underset{\sim}{A} = \{ (x_1 \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1)), \ldots, (x_2 \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2)), \ldots (x_n \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_n)) \}$$

Dalam hal demikian suatu elemen $x \in X$ dapat dikatakan :

a. Bukan anggota $\underset{\sim}{A}$ jika $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0$

b. Anggota $\underset{\sim}{A}$ dengan derajat keanggotaan yang rendah, jika $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \approx 0$

c. Anggota A dengan derajat keanggotaan yang tinggi, jika $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \approx 1$

d. Anggota A seutuhnya, jika $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1$

2.4. KONSEP DASAR DARI HIMPUNAN FUZZY

Untuk penggambarannya, ditunjukkan derajat keanggotaan pada himpunan semesta X dalam empat himpuman fuzzy yang berbeda.

Misal ada :

X = {5,10,20,30,40,50,60,70,80,}

Himpunan fuzzy tersebut adalah $\underset{\sim}{A}$ =bayi,

$\underset{\sim}{B}$ = dewasa, $\underset{\sim}{C}$ = muda dan $\underset{\sim}{D}$ = tua.

Derajat keanggotaan untuk himpunan fuzzy tersebut:

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(5) = 0$	$\mu_{\underset{\sim}{B}}(5) = 0$	$\mu_{\underset{\sim}{C}}(5) = 1$	$\mu_{\underset{\sim}{D}}(5) = 0$
$\mu_{\underset{\sim}{A}}(10) = 0$	$\mu_{\underset{\sim}{B}}(10) = 0$	$\mu_{\underset{\sim}{C}}(10) = 1$	$\mu_{\underset{\sim}{D}}(10) = 0$
$\mu_{\underset{\sim}{A}}(20) = 0$	$\mu_{\underset{\sim}{B}}(20) = 0{,}8$	$\mu_{\underset{\sim}{C}}(20) = 0{,}8$	$\mu_{\underset{\sim}{D}}(20) = 0{,}1$
$\mu_{\underset{\sim}{A}}(30) = 0$	$\mu_{\underset{\sim}{B}}(30) = 1$	$\mu_{\underset{\sim}{C}}(30) = 0{,}5$	$\mu_{\underset{\sim}{D}}(30) = 0.2$
$\mu_{\underset{\sim}{A}}(40) = 0$	$\mu_{\underset{\sim}{B}}(40) = 1$	$\mu_{\underset{\sim}{C}}(40) = 0{,}2$	$\mu_{\underset{\sim}{D}}(40) = 0{,}4$
$\mu_{\underset{\sim}{A}}(50) = 0$	$\mu_{\underset{\sim}{B}}(50) = 1$	$\mu_{\underset{\sim}{C}}(50) = 0{,}1$	$\mu_{\underset{\sim}{D}}(50) = 0.6$
$\mu_{\underset{\sim}{A}}(60) = 0$	$\mu_{\underset{\sim}{B}}(60) = 1$	$\mu_{\underset{\sim}{C}}(60) = 0$	$\mu_{\underset{\sim}{D}}(60) = 0{,}8$
$\mu_{\underset{\sim}{A}}(70) = 0$	$\mu_{\underset{\sim}{B}}(70) = 1$	$\mu_{\underset{\sim}{C}}(70) = 0$	$\mu_{\underset{\sim}{D}}(70) = 1$
$\mu_{\underset{\sim}{A}}(80) = 0$	$\mu_{\underset{\sim}{B}}(80) = 1$	$\mu_{\underset{\sim}{C}}(80) = 0$	$\mu_{\underset{\sim}{D}}(80) = 1$

Dari keterangan maka dapat dibuat tabel sebagai berikut :

UMUR	A=BAYI	B=DEWASA	C=MUDA	D=TUA
5	0	0	1	0
10	0	0	1	0
20	0	0,8	0,8	0,1
30	0	1	0,5	0,2
40	0	1	0,2	0,4
50	0	1	0,1	0,6
60	0	1	0	0,8
70	0	1	0	1
80	0	1	0	1

TABEL 1

DEFINISI : 11

Support dari himpunan fuzzy $\underset{\sim}{A}$ dalam X adalah suatu himpunan yang terdiri dari elemen x yang mempunyai derajat keanggotaan dalam $\underset{\sim}{A}$ ditulis :

$$\text{Supp } \underset{\sim}{A} = \{ x \in X \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > 0 \}$$

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$: derajat keanggotaan X dalam $\underset{\sim}{A}$.

Contoh : 11

Support dari himpunan fuzzy muda dari tabel.1.

Adalah Supp C = {5,10,20,30,40,50}

DEFINISI : 12

Himpunan Fuzzy $\underset{\sim}{A}$ kosong adalah suatu himpunan yang terdiri atas elemen X yang mempunyai derajat keanggotaan 0, untuk semua elemen dari himpunan X.

Ditulis :

$$\text{Supp } \underset{\sim}{A}_{nol} = \{ x \in X \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0 \}$$

Contoh : 12

Himpunan fuzzy bayi, disini disebut himpunan fuzzy kosong, karena $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0, \ \forall x \in X$.

2.5. OPERASI SEDERHANA PADA HIMPUNAN FUZZY

2.5.1. GABUNGAN (UNION)

DEFINISI 13

Jika x suatu himpinan semesta A dan B adalah himpunan fuzzy dari x. Maka suatu gabungan dari dua himpunan fuzzy didefinisikan: $\mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = \max \{ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \}, \forall x \in X$.

Contoh 13 :

Dari Tabel 1.

Carilah gabungan $\underset{\sim}{C}$ dan $\underset{\sim}{D}$.

Diketahui : x = {5,10,20,30,40,50,60,70,80}

$\underset{\sim}{C}$ = {(5|1),(10|1),(20|0,8),
(30|0,5),(40|0,2),(50|0,1),
(60|0), (70|0), (80|0)}

$\underset{\sim}{D}$ = {(5|0), (10|0), (20|0,1), (30|0,2),
(40|0,4),(50|0,6), (60|0,8),
(70|1), (80|1)}

Ditanyakan : C ∪ D = ?

Jawab : C ∪ D = {(5|1), (10|1), (20|0,8),
(30|0,5), (40|0,4),(50|0,6),
(60|0,8), (70|1), (80|1)}

2.2. IRISAN (INTERSEKSI)

DEFINISI 14

Jika x himpunan semesta. $\underset{\sim}{A}$ dan $\underset{\sim}{B}$ adalah dua himpunan fuzzy dari x. Maka suatu irisan dua himpunan fuzzy didefinisikan, oleh : $\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(x) = \min\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\}$, $x \in X$

Contoh 14 :

Carilah irisan antara dewasa dan muda. Daftar terlihat pada Tabel 1.

Penyelesaian :

Diketahui : $x = \{ 5,10,20,30,40,50,60,70,80 \}$

$\underset{\sim}{B} = \{ (5|0),(10|0),(20|0,8),(30|1),(40|1),(50|1),(60|1),(70|1),(80|1) \}$

$\underset{\sim}{C} = \{ (5|1),(10|1),(20|0,8),(30|0,5),(40|0,2),(50|0,1),(60|0),(70|0),(80|0) \}$

Ditanyakan : $\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C} = ?$

Jawab : $\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C} = \{(5|0),(10|0),(20|0,8),(30|0,5),(40|0,2),(50|0,1),(60|0),(70|0),(80|0) \}$

2.3. KOMPLEMEN

DEFINISI 15

Jika x suatu himpunan semesta. Maka $\bar{\underset{\sim}{A}}$, Komplemen dari $\underset{\sim}{A}$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \forall x \in X.$$

Contoh 15 :

Carilah Komplemen dari himpunan fuzzy tua

Daftar terlihat pada Tabel 1.

Penyelesaian :

Diketahui : $x = \{5,10,20,30,40,50,60,70,80\}$

$\underset{\sim}{D} = \{(5|0),\ (10|0),(20|0{,}1),(30|0{,}2),$
$(40|0{,}4),(50|0{,}6),\ (60|0{,}8),$
$(70|1),\ (80|1)\}$

Ditanyakan : $\underset{\sim}{D} = ?$

Jawab : $\mu_{\bar{\underset{\sim}{D}}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{D}}(x)$

$= \{ 1,\ 1,\ 0{,}9,\ 0{,}8,\ 0{,}6,\ 0{,}4,\ 0{,}2,$
$0,\ 0 \}$

Jadi : $\bar{\underset{\sim}{D}} = \{ (5|1),\ (10|1),\ (20|0{,}9),\ (30|0{,}8),$
$(40|0{,}6),(50|0{,}4),\ (60|0{,}2),\ (70|0),$
$(80|0{,}7) \}$

DEFINISI 16

Derajad keanggotaan $\bar{\underset{\sim}{A}}$ (Komplemen $\underset{\sim}{A}$) adalah bergantung pada derajad keanggotaan $\underset{\sim}{A}$.

Dengan kata lain : $\mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}(x) = h(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x))$

dimana, h = fungsi Komplementasi yaitu suatu fungsi yang mempunyai sifat $h(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$

THEOREMA 1

Jika h adalah fungsi Komplementasi maka

$h\ \{h\ (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\} = \mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}(x)$

$\mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}(x)$ = derajat keanggotaan X dalam $\bar{\underset{\sim}{A}}$

Bukti :

Dari definisi 15, $\mu_{\bar{A}}(x) = h\ (\mu_{A}(x))$

$= 1 - \mu_{A}(x)$

dimana h adalah fungsi Komplementasi sehingga

$h\ \{h\ (\mu_{\bar{A}}(x)\} = h\ \{h\ (h\ (\mu_{\bar{A}}(x)\ \}$

$= h\ \{h\ (1\ (\mu_{A}(x)\ \}$

$= h\ \{1 - 1 + (\mu_{A}(x)\ \}$

$= \{h\ (\mu_{A}(x)\ \}$

$= \mu_{\bar{A}}(x)$

terbukti bahwa $h\ \{h(\mu_{\bar{A}}(x)\ \} = \mu_{\bar{A}}(x)$

THEOREMA 2

Jika $\mu_{A}(x_1) + \mu_{A}(x_2) = 1$, maka $\mu_{\bar{A}}(x_1) + \mu_{\bar{A}}(x_2) = 1$

$\forall x_1, x_2 \in X$

$\mu_{A}(x)$ = derajad keanggotaan X dalam A

$\mu_{\bar{A}}(x)$ = derajad keanggotaan X dalam $\bar{A}$

Bukti :

Dari definisi 15, $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_{A}(x)$

Sehingga untuk $\mu_{\bar{A}}(x_1) = 1 - \mu_{A}(x_1) \Longrightarrow$

$\mu_{\bar{A}}(x_1) = 1 - \mu_{A}(x_1)$

$\mu_{A}(x_2) = 1 - \mu_{A}(x_2) \Longrightarrow$

$\mu_{\bar{A}}(x_2) = 1 - \mu_{A}(x_2)$

Diketahui :

$\mu_{A}(x_1) + \mu_{A}(x_2) = 1$

$1 - \mu_{\bar{A}}(x_1) + 1 - \mu_{\bar{A}}(x_2) = 1$

$2 - \mu_{\bar{A}}(x_1) - \mu_{\bar{A}}(x_2) = 1$

$- \mu_{\bar{A}}(x_1) - \mu_{\bar{A}}(x_2) = 1 - 2$

$\mu_{\bar{A}}(x_1) + \mu_{\bar{A}}(x_2) = 1$ terbukti

THEOREMA : 3

$$\mu_{A}(x_1) - \mu_{A}(x_2) = \mu_{\bar{A}}(x_2) - \mu_{\bar{A}}(x) \ \forall x_1, x_2 \in X$$

Bukti :

$$\mu_{A}(x_1) = 1 - \mu_{\bar{A}}(x_1) \quad , \ \forall x_1 \in X$$
$$\mu_{A}(x_2) = 1 - \mu_{\bar{A}}(x_2) \quad , \ \forall x_2 \in X$$

sehingga :

$$\begin{aligned} \mu_{A}(x_1) - \mu_{A}(x_2) &= 1 - \mu_{\bar{A}}(x_1) - (1 - \mu_{\bar{A}}(x_2)) \\ &= 1 - \mu_{\bar{A}}(x_1) - 1 + \mu_{\bar{A}}(x_2) \\ &= - \mu_{\bar{A}}(x_1) + \mu_{\bar{A}}(x_2) \end{aligned}$$

Terbukti, $\mu_{A}(x_1) - \mu_{A}(x_2) = \mu_{\bar{A}}(x_2) - \mu_{\bar{A}}(x_1)$

2.3.4. INKLUSI (INCLUSION)

DEFINISI : 17

Jika X adalah suatu himpunan semesta $\underset{\sim}{A}$ dan $\underset{\sim}{B}$ adalah himpunan fuzzy dari X, maka dapat dikatakan bahwa $\underset{\sim}{A}$ inklusi di dalam $\underset{\sim}{B}$ jika hanya jika :

$$\forall x \in X \ , \ \mu_{A}(x) \leq \mu_{B}(x)$$

yang ditulis $\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B}$

Contoh : 16

Misalkan X = { 40,50,60,70,8 } dan

$\underset{\sim}{C}$ = { (40 | 0,2), (50 | 0,1), (60 | 0),(70 | 0)}

$\underset{\sim}{D}$ = { (40 |0,4), (50 |0,6), (70 | 1,(80 | 1) }

dari tabel.1.

Selidiki, apakah $\underset{\sim}{C} \subseteq \underset{\sim}{D}$

Penyelesaian :

Dari yang diketahui, diperoleh :

$\mu_{\underset{\sim}{C}}(40) = 0,2 \quad < \quad \mu_{\underset{\sim}{D}}(40) = 0,4$

$\mu_{\underset{\sim}{C}}(50) = 0,1 \quad < \quad \mu_{\underset{\sim}{D}}(50) = 0,6$

$\mu_{\underset{\sim}{C}}(60) = 0 \quad < \quad \mu_{\underset{\sim}{D}}(60) = 0,8$

$\mu_{\underset{\sim}{C}}(70) = 0 \quad < \quad \mu_{\underset{\sim}{D}}(70) = 1$

$\mu_{\underset{\sim}{C}}(80) = 0 \quad < \quad \mu_{\underset{\sim}{D}}(80) = 1$

Ternyata $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x) < \mu_{\underset{\sim}{D}}(x), \quad x \quad X$

Jadi $\underset{\sim}{C} \subset \underset{\sim}{A}$

2.5.5. KESAMAAN (EQUALITY)

DEFINISI : 18

Jika X adalah suatu himpunan semesta $\underset{\sim}{A}$ dan $\underset{\sim}{B}$ adalah dua himpunan fuzzy dari X. Maka $\underset{\sim}{A}$ disebut sama dengan $\underset{\sim}{B}$ jika :

$\forall x \in X \ . \ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$..........1

Dan bisa ditulis $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}$.

Jika paling sedikit satu $x \in X$ sedemikian sehingga persamaan (1) $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ tidak terpenuhi, maka dikatakan bahwa $\underset{\sim}{A}$ dan $\underset{\sim}{B}$ tidak sama ditulis

$\underset{\sim}{A} \neq \underset{\sim}{B}$

2.6. SIFAT-SIFAT HIMPUNAN FUZZY

Jika $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ dan $\underset{\sim}{C}$ masing-masing adalah himpunan fuzzy , maka berlaku :

1. KOMUTATIF : $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{A}$

   $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$

2. ASOSIATIF : $\underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cup C$

   $\underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cap \underset{\sim}{C}$

3. IDEMPOTEN : $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$

$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$

4. DISTRIBUTIF : $\underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cap (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{C})$

$\underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cup (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{C})$

5. $\underset{\sim}{A} \cap \emptyset = \emptyset$

$\underset{\sim}{A} \quad \emptyset = A$

dimana $\emptyset$ adalah himpunan kosong, sedemikian hingga $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) = 0.$

2.7. OPERASI LAIN

DEFINISI : 19

Hasil kali A dan B didefinisikan sebagai berikut:

$\forall_x \in X, \mu_{\underset{\sim}{A}.\underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) . \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$

dimana X, adalah himpunan semesta

$\underset{\sim}{A}$ & $\underset{\sim}{B}$: adalah himpunan fuzzy.

DEFINISI : 20

Jumlah aljabar himpunan fuzzy $\underset{\sim}{A}$ dan $\underset{\sim}{B}$ dinotasikan $\underset{\sim}{A} \hat{+} \underset{\sim}{B}$, didefinisikan,

$\forall_x \in X, \mu_{\underset{\sim}{A}} \hat{+} \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}} + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) . \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$

X adalah himpunan semesta

Contoh : 17

Dari Tabel.1.

Diketahui :

X = { 5,10,20,30,40,50,60,70,80}

$\underset{\sim}{B}$ = { (5|10, (10|0), (20|0,8), (30|1), (40|1)

(50|0,1), (60|1), (70|1), (80| 1) }

$\underset{\sim}{C}$ = { (5|1), (10,1), (20|0,8), (30|0,5, (40|0,2)

(50|0,1), (60|0), (70|1), (80|0) }

Ditanyakan : $\underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{C}$ dan $\underset{\sim}{B} \hat{+} \underset{\sim}{C}$

Penyelesaian :

$\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) = \{ 0,\ 0,\ 0{,}8,\ 1{,}1{,}1{,}1{,}1{,}1\}$

$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \{1{,}1\ ,0{,}8\ ,0{,}5,\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0\}$

$\mu_{\underset{\sim}{B}\cdot\underset{\sim}{C}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$

$= \{0;\ 0;\ 0{,}64;\ 0{,}5\ ;\ 0{,}2\ ;\ 0{,}1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 0\}$

Jadi $\underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{C}$ = {(5|0, (10|0), (20|0,64), (30|0,5), (40|0,2), (50|0,1), (60|0), (70|4), (80|0)}

$\mu_{\underset{\sim}{B}\hat{+}\underset{\sim}{C}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$

Sehingga :

$\mu_{\underset{\sim}{B}\hat{+}\underset{\sim}{C}}(5) = 0 + 1 - 0 = 1$

$\mu_{\underset{\sim}{B}\hat{+}\underset{\sim}{C}}(10) = 0 + 1 - 0 = 1$

$\mu_{\underset{\sim}{B}\hat{+}\underset{\sim}{C}}(20) = 0{,}8 + 0{,}8 - 0{,}64 = 0{,}96$

$\mu_{\underset{\sim}{B}\hat{+}\underset{\sim}{C}}(30) = 1 + 0{,}5 - 0{,}5 = 1$

$\mu_{\underset{\sim}{B}\hat{+}\underset{\sim}{C}}(40) = 1 + 0-{,}2 - 0{,}2 = 1$

$\mu_{\underset{\sim}{B}\hat{+}\underset{\sim}{C}}(50) = 1 + 0{,}1 - 0{,}1 = 1$

$\mu_{\underset{\sim}{B}\hat{+}\underset{\sim}{C}}(60) = 1 + 0 - 0 = 1$

$\mu_{\underset{\sim}{B}\hat{+}\underset{\sim}{C}}(70) = 1 + 1 - 1 = 1$

$\mu_{\underset{\sim}{B}\hat{+}\underset{\sim}{C}}(80) = 1 + 0 - 0 = 1$

Jadi $\underset{\sim}{B}\hat{+}\underset{\sim}{C}$ = {(5|1), (10|1), (20|0,96), (30|1) (50|1), (60|1), (70|1), (80|1)}

Dengan operasi-operasi di atas maka berlaku sifat-sifat di bawah. Jika diketahui $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{C}$ masing-masing himpunan fuzzy.

1. Komutatif :

a). A. B = B. A

Bukti : $\mu_{\underset{\sim}{AB}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$

$= \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$

$\mu_{\underset{\sim}{AB}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{BA}}(x)$

Terbukti $\underset{\sim}{AB} = \underset{\sim}{BA}$

b). $\underset{\sim}{A} \,\hat{+}\, \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \,\hat{+}\, \underset{\sim}{A}$

Bukti :

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$
$$= \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$$
$$= \mu_{\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B}}(x)$$

$\underset{\sim}{A} \,\hat{+}\, \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \,\hat{+}\, \underset{\sim}{A}$ terbukti.

2. Asosiatif :

a) $(\underset{\sim}{A}.\underset{\sim}{B}).\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}.(\underset{\sim}{B}.\underset{\sim}{C})$

Bukti :

$$(\mu_{\underset{\sim}{AB}}(x)) \cdot \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)) \cdot \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$$
$$= \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$$
$$= \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \cdot (\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{C}}(x))$$

Terbukti : $(\underset{\sim}{A}.\underset{\sim}{B}).\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}.(\underset{\sim}{BC})$

b). $(\underset{\sim}{A} \,\hat{+}\, \underset{\sim}{B}) + \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} + (\underset{\sim}{B} \,\hat{+}\, \underset{\sim}{C})$

Bukti

$$\mu_{(\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B})\hat{+}\underset{\sim}{C}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$$
$$= \{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\} + \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)\,) - \{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) +$$
$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\} \cdot \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$$
$$= \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\} + \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x).$$
$$\cdot\, \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\} \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{C}}(x).$$
$$= \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x).$$
$$\cdot\, \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$$
$$= \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \{\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) -$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\{\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)+\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)\}-$$
$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\{\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)+\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)\}$$
$$=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)+\mu_{\underset{\sim}{B}+\underset{\sim}{C}}(x)-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{B}\hat{+}\underset{\sim}{C}}(x)$$
$$=\mu_{\underset{\sim}{A}\hat{+}(\underset{\sim}{B}\hat{+}\underset{\sim}{C})}(x)$$

Ternyata $\mu_{(\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B})\hat{+}\underset{\sim}{C}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}\hat{+}(\underset{\sim}{B}\hat{+}\underset{\sim}{C})}(x)$

Jadi terbukti $(\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B})\hat{+}\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}\hat{+}(\underset{\sim}{B}\hat{+}\underset{\sim}{C})$

3.Hukum De Morgan

a). $\overline{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}} = \overline{\underset{\sim}{A}}\hat{+}\overline{\underset{\sim}{B}}$

Bukti :

$$\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}}}(x) = 1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \quad .... \quad 2$$
$$\mu_{(\overline{\underset{\sim}{A}}\hat{+}\overline{\underset{\sim}{B}})}(x) = [1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)]+[1-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)]-[1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)].[1-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)]$$
$$= 2-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)-1+\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)+\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$
$$= 1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \quad .... \quad 3$$

Dari (2) & (3) terbukti $\overline{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}} = \overline{\underset{\sim}{A}}\hat{+}\overline{\underset{\sim}{B}}$

b). $\overline{\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B}} = \overline{\underset{\sim}{A}}\cdot\overline{\underset{\sim}{B}}$

Bukti :

$$\mu_{(\overline{\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}})}(x) = 1-[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)]$$
$$= 1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)+\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \quad .... \quad 4$$
$$\mu_{(\overline{\underset{\sim}{A}}.\overline{\underset{\sim}{B}})}(x) = [1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)]\ .\ [1-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)]$$
$$= 1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)+\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \quad .... \quad 5$$

Dari (4) & (5) terbukti $\overline{\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}} = \overline{\underset{\sim}{A}}\cdot\overline{\underset{\sim}{B}}$

2.8. INDEX KEFUZZYAN

DEFINISI : 21.

Jika $\underset{\sim}{A}$ himpunan fuzzy, dan $\underset{\approx}{A}$ menyatakan himpunan sederhana yang paling dekat,maka $\underset{\approx}{A}$ disebut himpunan sederhana terdekat apabila :

$$\mu_{\underset{\approx}{A}}(x) = \{\ 0\ ,\ \text{jika}\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) < 0{,}5$$

1 , jika $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geq 0,5$

Contoh : 18

Misalkan $x = \{ a,b,c,d,e,f,g \}$

$\underset{\sim}{A} = \{(a|0,2),\ (b|0,8),\ (c|0,5),\ (d|0,3)$
$(e|1),\ (f|0),\ (g|0,9)\}$

Carilah :

Penyelesaian :

$\mu_{\underset{\approx}{A}}(a) = 0$, sebab $\mu_{\underset{\sim}{A}}(a) = 0,2 < 0,5$

$\mu_{\underset{\approx}{A}}(b) = 1$, sebab $\mu_{\underset{\sim}{A}}(b) = 0,8 > 0,5$

$\mu_{\underset{\approx}{A}}(c) = 1$, sebab $\mu_{\underset{\sim}{A}}(c) = 0,5$

$\mu_{\underset{\approx}{A}}(d) = 0$, sebab $\mu_{\underset{\sim}{A}}(d) = 0,3 < 0,5$

$\mu_{\underset{\approx}{A}}(e) = 1$, sebab $\mu_{\underset{\sim}{A}}(e) = 1 > 0,5$

$\mu_{\underset{\approx}{A}}(f) = 0$, sebab $\mu_{\underset{\sim}{A}}(f) = 0 < 0,5$

$\mu_{\underset{\approx}{A}}(g) = 1$, sebab $\mu_{\underset{\sim}{A}}(g) = 0,9 > 0,5$

Jadi $\underset{\approx}{A} = \{ (a|0),\ (b|1),\ (c|1),\ (d|0),\ (e|1),$
$(f|0),\ (g|1) \}$

2.9. HIMPUNAN SEDERHANA ORDE α

DEFINISI : 22

Misalkan α suatu bilangan riil, dimana $0 \leq \alpha \leq 1$, dan $\underset{\sim}{A}$ himpunan fuzzy.

Himpunan sederhana Orde α dari $\underset{\sim}{A}$ ditulis $\underset{\sim}{A}_\alpha$, didefinisikan :

$\underset{\approx}{A}_\alpha = \{ x \mid x \in X,\ \mu_{\underset{\sim}{A}} \geq \alpha \}$

Contoh : 19

Diketahui :

$X = \{ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 \}$

$\underset{\sim}{A} = \{ (x_1|0,8),\ (x_2|0,3),\ (x_3|1),\ (x_4|0,3),$

$(x_5|0{,}6)$, $(x_6|0{,}2)$, $(x_7|0{,}5)$ }

Carilah $\underset{\sim}{A}_{0,3}$ dan $\underset{\sim}{A}_{0,7}$

Penyelesaian :

$$\underset{\sim}{A}_{0,3} = \{ (x_1|1), (x_2|0), (x_3|1), (x_4?1), (x_5|1), (x_6|0), (x_7|1), \}$$

$$\underset{\sim}{A}_{0,7} = \{ (x_1|1), (x_2|0), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|0), (x_6|0), (x_7|0), \}$$

$$= \{ x_1, x_3 \}$$