BAB II

TEORI DASAR

2.1. Turunan Dalam Ruang Berdimensi Satu (n = 1)

Ada dua jenis fungsi yang dapat dibedakan berdasarkan peubahnya atau nilai fungsinya. *Pertama,* diberikan contoh $f(x) = x^2$, yang mengaitkan bilangan riil x dengan bilangan riil lain $f(x)$. $f(x)$ ini disebut sebagai fungsi *bernilai* riil dari *peubah* riil. Jenis fungsi yang *kedua,* diilustrasikan oleh $f(x) = (x^3, e^x)$, mengaitkan bilangan riil x dengan vektor $f(x)$. Fungsi itu disebut fungsi bernilai *vektor* dari peubah *riil.* Andaikan bahwa fungsi f adalah suatu fungsi dengan satu peubah. Turunan fungsi f adalah suatu fungsi yang ditulis dengan f' sedemikian sehingga nilai fungsi ini untuk setiap x dalam daerah asal f diberikan oleh :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{, jika limit ini ada}$$

Fungsi baru f' dengan daerah asal f disebut *fungsi turunan* dari f. Proses mencari f' dari f inilah yang disebut *penurunan*

2.1.1. Kemonotonan dan Kecekungan

Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang I (terbuka , tertutup atau tak satupun), fungsi f dapat diputuskan sebagai fungsi naik atau fungsi turun dengan menggambar grafiknya. Namun sebuah grafik biasanya digambar dengan merajah beberapa titik dan menghubungkan titik titik tersebut menjadi suatu kurva mulus. Hal ini menimbulkan keraguan apakah grafik tidak bergoyang diantara titik titik yang dirajah. Oleh karena itu perlu diberikan suatu definisi yang jelas dan tepat.

Definisi 1 :

Misalkan f terdefinisi pada selang I (terbuka, tertutup atau tak satupun). Dapat dikatakan bahwa :

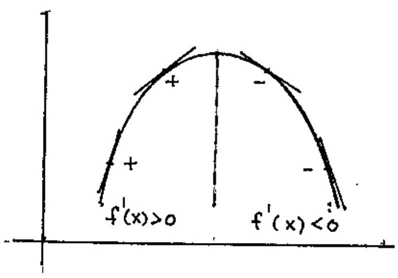
i. f dikatakan naik pada I jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

ii. f dikatakan turun pada I jika untuk setiap pasangan bilangan x_1 dan x_2 dalam I, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

iii. f dikatakan monoton pada I jika ia naik pada I atau turun pada I.

Kemonotonan suatu fungsi f (x) dapat lebih dijelaskan dengan mencari nilai **turunan pertamanya**. Turunan pertama f ' (x) menunjukkan kemiringan dari garis singgung pada grafik f (x) di titik x.

(Perhatikan gambar 1). Jika $f'(x) > 0$ maka garis singgung naik ke kanan. Sebaliknya jika $f'(x) < 0$, maka garis singgung turun ke kanan.



Gambar 1

Teorema 1 :

(Teorema Kemonotonan). Misalkan f kontinu pada selang I dan dapat didiferensialkan pada setiap titik dalam dari I.

i. Jika $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, maka f naik pada I

ii. Jika $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, maka f turun pada I

iii. Jika $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, maka f nilai stasioner pada I

Bukti :

Misalkan f terdefinisi pada selang I untuk semua x titik dalam dari I.

Jika $x \leqslant x + h \in I$, maka dapat ditulis

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

i. $f'(x) > 0$ berarti

$$f(x+h) - f(x) > 0 \Rightarrow f(x+h) > f(x)$$

Menurut *Definisi 1* fungsi $f(x)$ adalah *naik*

ii. $f'(x) < 0$ berarti

$$f(x+h) - f(x) < 0 \Rightarrow f(x+h) < f(x)$$

Menurut *Definisi 1* fungsi $f(x)$ adalah turun

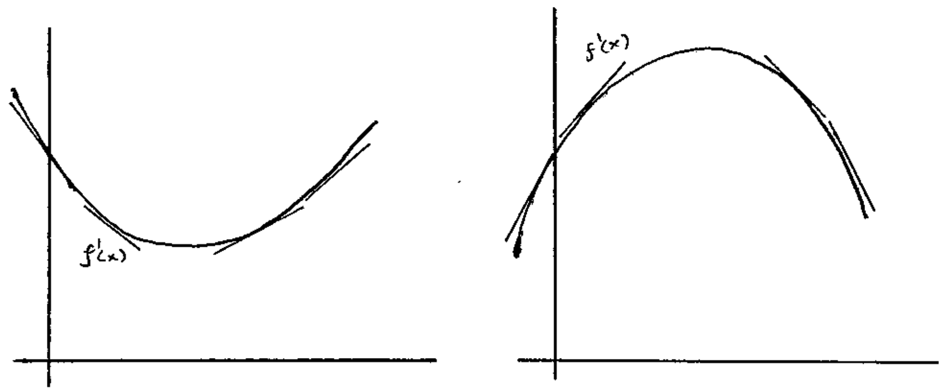
Untuk (iii) akan dibahas selanjutnya

Definisi 2 :

Misalkan $f(x)$ dapat didefinisikan pada selang terbuka $I = (a, b)$ dan grafik $f(x)$ dilikiskan dari kiri ke kanan.

Jika f ' (x) berliku secara tetap berlawanan arah jarum jam pada I, maka f (x) disebut **cekung ke atas**. Sebaliknya jika f ' (x) bergerak secara tetap searah jarum jam pada I, maka f (x) disebut **cekung ke bawah**.

Dalam gambar 2 membantu memperjelas definisi diatas



Gambar 2

f ' (x) berliku secara tetap berlawanan arah jarum jam berarti f ' (x) berganti tanda dari negatif menjadi positif dalam selang terbuka I = (a , b) dan fungsi f (x) merupakan fungsi cekung keatas. Sebaliknya f ' (x) berliku secara tetap searah jarum jam berarti f ' (x) berganti tanda dari positif menjadi negatif dalam selang terbuka I = (a , b) dan fungsi f (x) merupakan fungsi cekung ke bawah .

Turunan kedua juga memiliki hubungan yang signifikan dalam mempengaruhi *kecekungan* suatu fungsi f (x). Kecekungan yang disebut adalah cekung ke bawah atau cekung ke atas dari fungsi f (x). Turunan kedua ini merupakan turunan pertama dari fungsi f ' (x). Jadi turunan pertama fungsi f ' (x) juga mempengaruhi kecekungan suatu fungsi f (x).

Sehubungan dengan Teorema 1, terdapat kriteria sederhana untuk memutuskan dimana kurva cekung ke atas dan dimana cekung ke bawah, yaitu turunan kedua dari $f(x)$ yang adalah turunan pertama dari $f'(x)$.

Jadi f' naik jika $f''(x) > 0$, dan $f'(x)$ turun jika $f''(x) < 0$.

Teorema 2 :

(Teorema Kecekungan). Misalkan $f(x)$ terdiferensialkan dua kali pada selang terbuka (a, b).

i. Jika $f''(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, maka $f(x)$ cekung ke atas pada (a, b)

ii. Jika $f''(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, maka $f(x)$ cekung ke bawah pada (a, b)

Bukti :

Berdasarkan teorema 1 :

i. $f'(x) > 0, \ \forall x \in I \Rightarrow f(x)$ naik pada I

ii. $f'(x) < 0, \ \forall x \in I \Rightarrow f(x)$ turun pada I

dapat dinyatakan bahwa $f''(x)$ adalah turunan pertama $f'(x)$ I

misalkan $f'(x) = g(x)$, dari teorema 1 :

i. $g'(x) > 0, \ \forall x \in I \Rightarrow g(x)$ naik pada I

ii. $g'(x) < 0, \ \forall x \in I \Rightarrow g(x)$ turun pada I

Dari kedua pernyataan diatas dapat dituliskan

i. $f''(x) > 0, \ \forall x \in I \Rightarrow f'(x)$ naik pada I,

$f'(x)$ naik pada I $\Rightarrow f(x)$ cekung ke atas pada $I = (a, b)$

ii. $f''(x) < 0, \ \forall x \in I \Rightarrow f'(x)$ turun pada I,

$f'(x)$ turun pada I $\Rightarrow f(x)$ cekung ke bawah pada $I = (a, b)$

Misalkan $f(x)$ kontinu di $x = c$. Maka $(c, f(c))$ merupakan suatu titik *stasioner* dari grafik $f(x)$ jika $f(x)$ cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi lainnnya dari c atau tidak kedua – duanya.

Jika $f'(c) = 0$, maka $f(c)$ adalah nilai stasioner $f(x)$ pada $x = c$. Nilai stasioner mungkin nilai *maksimum* nilai *minimum*, atau titik belok horisontal pada grafik $f(x)$.

Teorema 3 :

(Teorema Titik Stasioner). Misalkan $f(x)$ kontinu di $x = c$ dan berlaku $f'(c) = 0$.

i. $f(x)$ mempunyai *nilai maksimum* $f(c)$, jika $f'(x)$ berganti tanda dari positif menjadi negatif.

ii. $f(x)$ mempunyai *nilai minimum* $f(c)$, jika $f'(x)$ berganti tanda dari negatif menjadi positif.

iii. $f(x)$ mempunyai titik belok horisontal pada $x = c$, jika $f'(x)$ tak berganti tanda.

Bukti :

Misalkan $f(x)$ cekung ke atas dan $f(x)$ kontinu di $x = c$, dan berlaku $f'(c) = 0$

Berdasarkan teorema 1,

$$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow f(x) \text{ naik pada I}$$

$$f'(x) < 0 \quad \Rightarrow f(x) \text{ turun pada I}$$

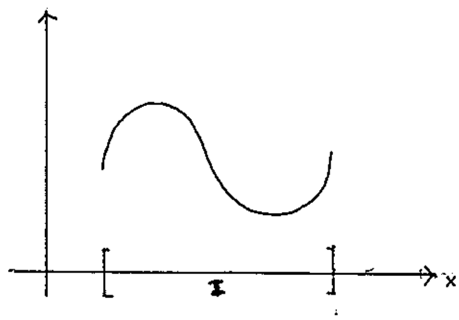
Dari permisalan diatas $f'(c) = 0$ akan ditunjukkan di $x = c$, $f(c)$ adalah nilai minimum.

Dalam interval $c - h \leqslant c \leqslant c + h$ dapat dinyatakan dua sisi berdasarkan intervalnya, yakni $(-\infty, c - h)$, $f'(x) < 0$ (teorema 1). Sebaliknya untuk interval $(c + h, \infty)$, $f'(x) > 0$. Berarti $f'(x)$ berganti tanda dari negatif ke positif dalam interval $c - h \leqslant c \leqslant c + h$. Pada $f'(c) = 0$ terbukti bahwa $f(c)$ adalah nilai minimum.

Untuk (ii) dan (iii) secara analog sama.

2.1.2. Maksimum dan Minimum

Perhatikan gambar 3 grafik fungsi $f(x)$ terlihat memiliki nilai maksimum dan minimum pada suatu titik dalam daerah asal I. Perlu suatu definisi yang jelas untuk menentukan titik dimana nilai maksimum atau minimum tercapai.



Gambar 3

Definisi 3 :

Misalkan I daerah asal f (x), memuat titik c, maka :

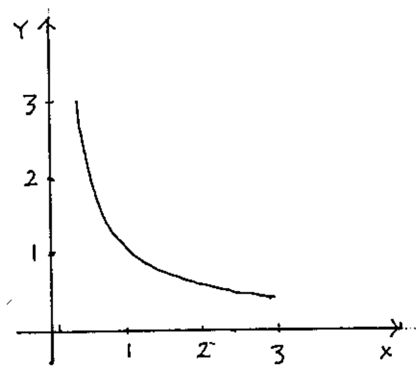
i. f (c) merupakan *nilai maksimum* f pada I jika $f(c) \geq f(x), \ \forall x \in I$

ii. f (c) merupakan *nilai minimum* f pada I jika $f(c) \leq f(x), \ \forall x \in I$

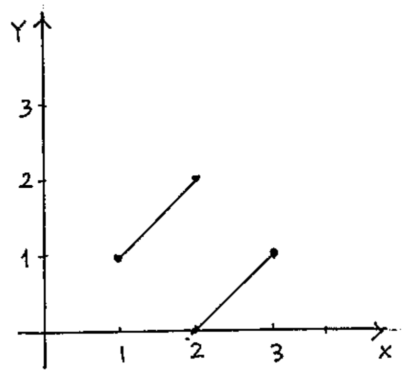
iii. f (c) merupakan *nilai ekstrim* f pada I jika f (x) nilai maksimum atau nilai minimum.

Timbul suatu pertanyaan keujudan mengenai kepastian suatu fungsi f (x) mempunyai nilai ekstrim pada I.

Pertama , tergantung pada himpunan I tersebut. Sebagai contoh fungsi f (x) = 1/x pada I = (0 , ∞), fungsi ini tidak mempunyai nilai maksimum atau minimum (gambar 4). Sebaliknya, fungsi yang sama pada I = [1 , 3], mempunyai nilai maksimum f (1) = 1 dan nilai minimum f (3) = 1/3. Pada I = (1 , 3] f tidak mempunyai nilai maksimum, dan nilai minimum f (3) = 1/3.



Gambar 4



Gambar 5

Kedua, tergantung pada tipe fungsi. Ambil suatu fungsi g (x) yang tak kontinu, (Gambar 5)

$$g(x) = \begin{cases} x & , \text{jika } 1 \leqslant x < 2 \\ x - 2 & , \text{jika } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

Pada I = [1 , 3], g tidak mempunyai nilai maksimum (menjadi cukup dekat ke angka 2 namun tak pernah mencapainya). Tetapi g mempunyai nilai minimum g (2) = 0.

Dari kedua kasus diatas menjelaskan teorema berikut.

Teorema 4 :

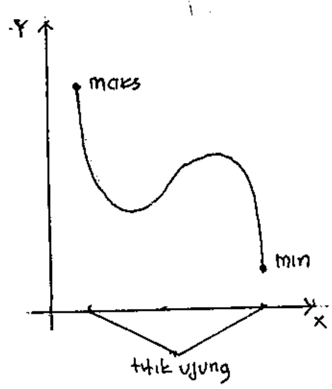
Jika f kontinu pada selang tertutu [a , b], maka f mencapai nilai maksimum dan nilai minimum.

Biasanya fungsi yang ingin dimaksimumkan atau diminimumkan akan memiliki suatu selang I sebagai daerah asalnya. Beberapa dari selang ini memuat *titik titik ujung,* beberapa tidak. Misalnya I = [a , b) memiliki ujung kedua – duanya ;

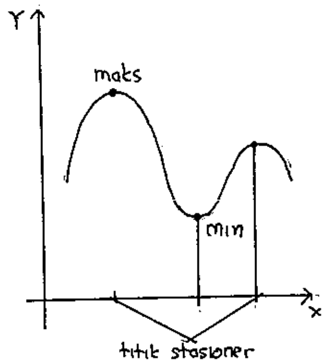
[a , b] hanya memuat titik ujung kanan; (a , b) tidak memiliki titik ujung satupun. Nilai – nilai ekstrim sebuah fungsi yang didefinisikan pada selang *tertutup* seringkali terjadi pada titik – titik ujung (Gambar 6).

Jika c sebuah titik dimana f ' (c) = 0, disebut c *titik stasioner.* Hal itu didasarkan dari fakta bahwa pada titik stasioner, grafik f mendatar, karena garis singgung mendatar. Nilai ekstrim seringkali terjadi pada titik titik stasioner (Gambar 7).

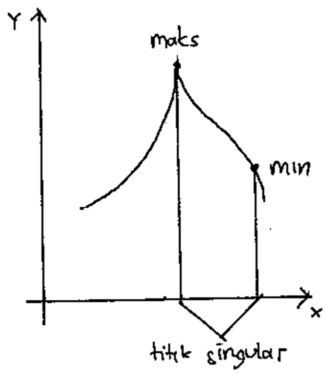
Kemudian jika c adalah titik dalam dari I, dimana f ' (c) tidak ada, disebut *titik singular*. Ini titik dimana grafik f mempunyai sudut tajam, garis singgung vertikal atau mungkin berupa lompatan. Nilai ekstrim dapat terjadi pada titik singular ini (Gambar 8).



Gambar 6



Gambar 7



Gambar 8

Teorema 5 :

(**Teorema Titik Kritis**). Misalkan f didefinisikan pada selang I yang memuat titik c, Jika f (c) merupakan titik ekstrim, maka c haruslah suatu titik kritis, yakni c berupa salah satu :

i. titik ujung dari I

ii. titik stasioner dari f (f ' (c) = 0)

iii. titik singular dari f (f ' (c) tak ada)

Bukti Pandang kasus dimana f (c) adalah nilai maksimum f pada I dan andaikan c bukan titik ujung atau titik singular. Akan cukup untuk memperlihatkan bahwa c adalah titik stasioner.

Sekarang, karena f (c) adalah nilai maksimum, $f(x) \leqslant f(c)$, $\forall x \in I$, dan

$$f(x) - f(c) \leqslant 0$$

Jadi jika $x < c \ni x - c < 0$ maka

1) $$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$$

Sedangkan jika x > c , maka

2) $$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$$

Karena f ' (c) ada maka jelas bukan titik singular.

Dari (1) dan (2) dapat ditarik kesimpulan bahwa f ' (c) = 0, yang adalah c sebagai titik stasioner.

2.2. Turunan Dalam Ruang Berdimensi Lebih Dari Satu (n > 1)

Fungsi – fungsi dan relasi dari R_1 ke R_1 telah dijelaskan dalam sub bab 2.1. Relasi dari R_1 ke R_1 dapat ditulis sebagai (x, y), yang merupakan suatu fungsi f (x) = y dengan satu peubah x. Sub bab 2.2 akan mendefinisikan relasi dari R_2 ke R_1, R_3 ke R_1, … , R_n ke R_1. Relasi R_n ke R_1 dapat ditulis sebagai (($x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$), y), yang merupakan suatu fungsi f (x) = y dengan beberapa peubah dalam **x**. apabila f adalah suatu fungsi dalam Rn dan ($x_1, x_2, ,,, , x_n$) adalah *domainnya,* maka y dituliskan sebagai f ($x_1, x_2, \ldots ,x_n$). Fungsi dengan peubah lebih dari satu ini sering dipergunakan dalam berbagai bidang untuk mempermudah penjelasan dalam ruang R_n akan diterangkan konsep limit untuk fungsi dalam R_2 dan R_3.

Definisi 4 :

Misalkan f adalah suatu fungsi dalam R_2 dan L adalah suatu konstanta, maka limit f (x , y) untuk (x , y) → (a , b) adalah L, ditulis

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

Bila

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni f(x,y) \text{ terdefinisi dan}$$

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon, \quad \forall (x,y) \to (a,b)$$

dimana

$$|x-a| < \delta \quad \text{dan } |y-b| < \delta$$

Selanjutnya f kontinu pada (a , b) jika dan hanya jika f (a , b) terdefinisi dan $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ untuk (x , y) → (a , b).

Definisi yang sama untuk fungsi pada R_n.

2.2.1. Turunan Parsial dan Keterdiferensialan

Turunan parsial ini merupakan turunan untuk fungsi dengan peubah banyak. Notasi turunan parsial sering identik dengan $\partial f / \partial x$ atau fx untuk peubah x. Akan ditunjukkan dalam fungsi di R_2 dan R_3 untuk kasus tertentu.

Definisi 5 :

Misalkan f adalah suatu fungsi di R_2. **Turunan Parsial** nya didefinisikan oleh

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

dimana x dan y didapatkan tetap pada f_x dan f_y.

Apabila f adalah fungsi dalam R_n, dituliskan turunan parsialnya didefinisikan sebagai

$$f_{x_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \lim_{h \to 0} f \frac{(x_1+h,x_2,x_3,\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{h}$$

$$f_{x_2}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \lim_{h \to 0} f \frac{(x_1x_2+h,\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{h}$$

$$f_{x_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \lim_{h \to 0} f \frac{(x_1,x_2,\ldots,x_n+h)-f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{h}$$

Dari definisi 6 diatas didapatkan teorema berikut ;

Teorema 6 :

Misalkan bahwa f adalah fungsi pada R_2 dan $(x_o , y_o) \in R_2$.

Jika $f_x (x_o , y_o) = g_1' (x_o)$ dan $f_y (x_o , y_o) = g_2' (y_o)$

maka $g_1 (x) = f (x , y_o)$ dan $g_2 (y) = f (x_o , y)$, dimana $g_1 (x)$ dan $g_2 (y)$ adalah fungsi – fungsi pada R_1

Bukti :

Menurut *Definisi 5 :*

$$f_x (x , y) = \lim_{h \to 0} \frac{f (x + h , y) - f (x, y)}{h}$$

Limit diatas menunjukkan y dianggap sebagai konstanta sehingga dapat dituliskan

$$g' (x) = f_x (x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{g (x + h) - g (x)}{h}$$

Untuk $(x_o , y_o) \in R_2$ dapat dihasilkan

$$g' (x_o) = f_x (x_o,y_o)$$

Akibatnya $g_1 (x) = f_x (x, y_o)$ adalah fungsi dengan satu peubah yaitu x.

Hal yang sama berlaku untuk f_y. Hasil yang sama untuk fungsi pada R_n.

Teorema 6 diatas mengimplikasikan suatu aturan untuk mendapatkan turunan parsial .

Untuk mendapatkan turunan parsial $f_x (x_1,x_2, \dots , x_n)$ dari suatu fungsi f pada R_n, nyatakan $x_2, \dots , x_n$ sebagai konstanta dan dapat didiferensialkan di x_1; turunan $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots , f_{x_n}$ berhubungan dengan diatas.

Untuk fungsi satu peubah, keterdiferensialan dari f di x berarti keujudan turunan f ' (x). Ini setara dengan grafik f yang mempunyai garis singgung di x. Keterdiferensialan untuk peubah lebih dari satu tidak dapat hanya berupa keujudan turunan parsial dari f belaka, karena keterdiferensialannya mencerminkan perilaku f dalam beberapa arah. Untuk itu pertama tama perlu dihilangkan perbedaan antara titik – titik $(x_1, x_2 , \dots , x_n)$ dan vektor $< x_1, x_2, ,,, , x_n >$. Jadi dapat dituliskan $\mathbf{p} = (x_1, x_2, \dots , x_n) = < x_1, x_2, \dots , x_n >$ dan

$$f(\mathbf{p}) = f(x_1, x_2, \dots , x_n)$$

Menurut teori limit :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Secara analog dapat ditulis

$$f'(\mathbf{p}) = \lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p})}{\mathbf{h}}$$

bentuk $f'(\mathbf{p})$ di atas merupakan bentuk matematis dari kemiringan dari garis singgung sehingga dapat dituliskan dalam bentuk lain,

$$f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p}) = \frac{f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p})}{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{h}, \ \forall \mathbf{h} = 0$$

karena $\mathbf{h} \to 0$ maka ruas kanannya menuju pada lim $f'(\mathbf{p}).\ 0 = 0$ dan $f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) \to f(\mathbf{p})$.

Jika $f'(\mathbf{p})$ ada maka didapatkan $\epsilon(\mathbf{h})$ yang merupakan toleransi kesalahan yang dapat dinyatakan dengan

$$\epsilon(\mathbf{h}) = \frac{f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p})}{\mathbf{h}} - f'(\mathbf{p})$$

atau $\mathbf{h}\,\epsilon(\mathbf{h}) = f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - f'(\mathbf{p}).\mathbf{h}$

sehingga $f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) = f'(\mathbf{p}).\mathbf{h} + |\mathbf{h}|\ \epsilon(\mathbf{h})$

dengan $\epsilon(\mathbf{h}) \to 0$ pada $\mathbf{h} \to 0$.

$f'(\mathbf{p})$ ini adalah suatu vektor dan merupakan gradien f di $\mathbf{p}$ dan dilambangkan dengan $\nabla f(\mathbf{p})$.

Gradien $\nabla f(x)$ di $\mathbf{p}$ berarti turunan parsial yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\nabla f(x) \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \quad \text{di } \mathbf{p}$$

Hal ini berbeda dengan $f'(x)$ sebagai suatu skalar, sedangkan $\nabla f(x)$ adalah suatu vektor.

Definisi 6 :

Jika $\nabla f(x)$ adalah vektor dan k adalah skalar, maka hasil perkalian $k\ .\ \nabla f(x)$ di definisikan sebagai vektor yang panjangnya $|k|$ kali panjang dari ∇f

(x) dan arahya sama seperti pada arah ∇ f (x) jika k > 0 dan berlawanan dengan ∇ f (x) jika k < 0.

2.2.2. Maksimum dan Minimum

Sasaran yang akan dicapai adalah memperluas pemikiran pada Bab 2 menjadi fungsi beberapa peubah. Andaikan $\mathbf{p} = (x, y)$ dan $\mathbf{p}_o = (x_o, y_o)$ masing – masing berupa sebuah titik peubah dan titik tetap, di ruang dimensi dua.

Definisi 7 :

Misalkan $\mathbf{p}_0$ suatu titik di I, yaitu wilayah dari f :

i. f ($\mathbf{p}_0$) adalah nilai maksimum (global) dari f pada I,

   jika f ($\mathbf{p}_0$) $\geq$ f ($\mathbf{p}$) untuk semua p di I.

ii. f ($\mathbf{p}_0$) adalah nilai minimum (global) dari f pada I,

   jika f ($\mathbf{p}_o$) $\leq$ f ($\mathbf{p}$) untuk semua p di I.

iii. f ($\mathbf{p}_o$) adalah nilai ekstrim (global) dari f pada I,

   jika f ($\mathbf{p}_o$) adalah suatu nilai maksimum atau nilai minimum (global).

Definisi yang sama berlaku apabila kata *global* diganti dengan kata *lokal.*

Teorema 7 :

Jika f kontinu pada suatu himpunan tertutup dan terbatas, maka f mencapai suatu nilai maksimum (global) dan suatu nilai maksimum (global).

Nilai ekstrim dapat bentindak sebagai nilai maksimum atau nilai minimum fungsi f pada I jika terdapat **titik – titik kritis.**

Titik – titik kritis dari f pada I ada tiga jenis

1. **Titik – titik batas**

   Misalkan I =[a , b],a dan b merupakan titik–titik batas dari himpunan I.

2. **Titik stasioner** p_0 disebut titik stasioner jika p_0 adalah suatu titik dalam dari I dimana f terdiferensialkan dan $\nabla f(p_0) = 0$. Pada titik berikut ini bidang singgung adalah mendatar.

3. **Titik – titik singular** p_0 disebut titik singular jika p_0 adalah suatu titik dalam dari I dimana f tidak terdiferensialkan misalkan, titik dimana grafik f mempunyai pojok tajam

Teorema 8 :

(Teorema Titik Kritis) Misalkan f didefinisikan pada suatu himpunan I yang mengandung p_0 jika $f(p_0)$ adalah suatu nilai ekstrim, maka p_0 haruslah berupa suatu titik kritis, yakni p_0 berupa salah satu dari :

i. Suatu titik batas dari I; atau

ii. Suatu titik stasioner dari f ; atau

iii. Suatu titik singular dari f

Bukti : Misalkan p_0 bukan suatu titik batas atau titik singular sehingga p_0 adalah suatu titik dalam dimana ∇ f ada.

Akan ditunjukkan bahwa $\nabla f(\mathbf{p}_o) = 0$, ambilah $\mathbf{p}_o = (x_o, y_o)$ karena f mempunyai nilai ekstrim di (x_o, y_o), fungsi $g(x) = f(x, y_o)$ mempunyai suatu nilai ekstrim di x_o. Lebih lanjut g terdiferensialkan di x_o karena f terdiferensialkan di (x_o, y_o), karena itu sesuai teorema 6,

$$g'(x_o) = f_x(x_o, y_o) = 0$$

Dengan cara yang serupa, fungsi $h(y) = f(x_o, y_o)$ akan mempunyai nilai ekstrim di y_o yang memenuhi

$$h'(y_o) = f_y(x_o, y_o) = 0$$

Gradien adalah 0 karena kedua parsialnya adalah 0.

2.3. Galat Dari Perhitungan

Dapat dianggap bahwa galat dari perhitungan sangat kecil sehingga dapat diabaikan. Sumber galat perhitungan disebabkan oleh hilangnya angka benar (signifikan) dalam pengurangan dua bilangan yang nilainya hampir sama. Misalnya, pengurangan 0,823421 dari 0,823445 masing masing dengan enam angka benar menghasilkan 0,000024 yang hanya mempunyai dua angka benar. Dari galat perhitungan diambil toleransi galat yakni batas yang ditetapkan dalam kesalahan perhitungan.

2.4. Pemrograman Non Linier

Pemrograman non linier adalah suatu bentuk pemrograman yang berkaitan dengan perencanaan bukan pemrograman komputer yang memiliki asumsi kunsi bahwa semua atau sebagian fungsi (fungsi tujuan dan fungsi kendala) bersifat non linier. Hal ini didasarkan pada penemuan beberapa contoh penerapan dalam dunia usaha / bisnis yang menggunakan asumsi ketaklinieran dalam membuat perencanaan.

Secara umum masalah pemrograman non linier adalah menentukan

$$x = (x_1, x_2, \dots , x_n) \text{ sehingga}$$

$$f (x) \text{ maksimum / minimum}$$

dengan kendala

$$g_i(x) \leqslant b_i \qquad \forall = 1,2, ,,, , n$$

$$x \geqslant 0$$

dimana fungsi $f (x)$ dan fungsi $g_i (x)$ merupakan fungsi fungsi dengan n peubah.

2.4.1. Kecekungan Ke Atas

Secara geometris suatu fungsi non linier pada dasarnya berupa fungsi cekung ke atas atau fungsi cekung ke bawah .

Definisi 8 :

(i) Fungsi peubah tunggal, $f (x)$ adalah **fungsi cekung keatas**, jika untuk setiap pasangan nilai x, misalnya x_1 dan x_2

$$f(\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1) \leqslant \lambda f(x_2) + (1 - \lambda) f(x_1)$$

Untuk seluruh nilai λ, sehingga $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$: sebaliknya disebut **fungsi cekung kebawah** jika tanda $\leqslant$ diganti $\geqslant$

(ii) Misalkan f (x), fungsi satu peubah, jika f (x) memiliki turunan kedua dimana saja (setiap x) maka f (x) adalah cembung jika dan hanya

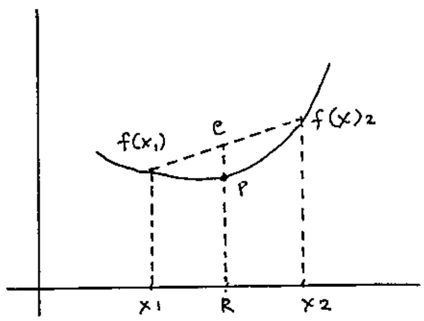
jika $$\frac{d^2f(x)}{dx^2} \geqslant 0$$

Sebaiknya fungsi cekung jika dan hanya jika

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} \leqslant 0$$

Definisi 8 (i) memiliki intepretasi geometris yang jelas. Misalkan suatu grafik dengan fungsi f (x) digambar sebagai fungsi x, maka [x_1, f (x)], dan [x_2, f (x_2)] adalah dua titik pada grafik dan ($\lambda x_2 + (1 - \lambda) x_1$, $\lambda f(x_2) + (1 - \lambda) f(x_1)$) menunjukkan sembarang titik pada segmen garis antara kedua titik tersebut, jika $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$

Lihat gambar berikut :



$RP = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2)$

$RC = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$

$RP \leqslant RC$

Hal ini berlaku juga untuk fungsi cekung.

Definisi 8 (ii) memiliki pengertian turunan kedua untuk memeriksa kecembungan fungsi peubah tunggal. Untuk peubah banyak maka *turunan parsial* kedua dapat digunakan untuk memeriksa fungsi dari beberapa peubah. Sebagai contoh jika ada dua peubah, maka $f(x_1, x_2)$ adalah cembung jika dan hanya jika,

i. $$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} - \left[\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \geq 0$$

ii. $$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \geq 0$$

iii. $$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \geq 0$$

dengan menganggap turunan parsial kedua ada dimana mana. Hal ini berlaku juga untuk fungsi cekung jika tanda $\geq$ pada (ii) dan (iii) diganti $\leq$.

Dari definisi diatas dapat ditarik suatu hubungan bahwa jika $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah fungsi cembung, maka $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah fungsi cekung.

2.4.2. Perluasan Deret Taylor, Syarat Perlu dan Syarat Cukup

Di dalam mengembangkan konsep dasar tentang teknik dan tujuan dalam pemrograman non linier yang terpentinmg adalah mengerti dan memahami perluasan deret Taylor. Manfaat deret ini adalah menunjukkan nilai solusi optimal, karakteristik titik stasioner dan arah garis.

Misalkan bahwa sembarang fungsi non linier $f(x)$ mempunyai turunan yang dapat ditunjukkan dengan perluasan deret

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \ldots + C_n(x-a)^n \ldots (2.4.1)$$

Teorema 9 :

Suatu deret kuasa dapat didiferensialkan suku demi suku dalam interval ke konvergenan.

Bukti

Misalkan f fungsi dengan suku – suku tak terhingga banyaknya dan dapat dinyatakan sebagai deret kuasa sebuah suku banyak. Secara matematik

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots + C_n(x-a)^n$$

dalam interval kekonvergenan (a – r , a + r).

Apabila didiferensialkan suku demi suku didapatkan

$$f'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \dots\dots\dots + nC_n(x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2C_2 + 6C_3(x-a) + \dots\dots\dots\dots\dots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}$$

$$f^{n-1}(x) = (n-1)!\,C_{n-1} + n!\,C(x-a) + \dots.$$

Untuk lebih jelasnya dapat diambil $a \in (a-r, a+r)$ dan disubstitusikan dalam setiap tingkatan turunannya, sehingga diperoleh

$$f'(a) = C_1$$

$$f''(a) = 2!C_2$$

$$f^{n-1}(a) = (n-1)!\,C_{n-1}$$

Dari hasil tersebut membuktikan fungsi f dapat didiferensialkan suku demi suku dalam interval kekonvergenan.

Dengan persamaan (2.4.1) diatas dapat dibuktikan :

$$f'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \dots\dots\dots + nC_n(x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2C_2 + 6C_3(x-a) + \ldots\ldots\ldots\ldots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}$$

$$f'''(x) = 3!C_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}_{n(n-1)(n-2)}C_n(x-a)^{n-3}$$

Secara umum :

$$f(x) = (n-1)!\,C_{n-1} + n!\,C(x-a) + \ldots (2.4.2)$$

Selanjutnya untuk x = a dalam persamaan (2.4.2) di atas :

$$f'(a) = C_1 \quad \to \quad C_1 = f'(a)$$

$$f''(a) = 2!C_2 \quad \to \quad C_2 = f''(a)/2!$$

$$f'''(a) = 3!C_3 \quad \to \quad C_3 = f'''(a)/3!$$

$$f(a) = (n-1)!\,C_{n-1} \quad \to \quad C_{n-1} = f(a)/(n-1)!$$

Sehingga dapat dituliskan dalam deret kuàsa termasuk diferensial f (x) – nya sebagai **deret Taylor.**

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

untuk x = a + h ,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots\ldots$$

Dari persamaan – persamaan diatas jelas menunjukkan suatu hubungan antara fungsi non linier dengan deret Taylor. Sehingga takmengejutkan bahwa deret Taylor memiliki hubungan yang nyata dengan optimasi suatu fungsi non linier tanpa kendala.

Misalkan diambil suatu Δx , jarak dari x_0 ke x dan diasumsikan $\Delta x = h$ dan $x_0 = a$ maka

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\,\Delta x^2 + \ldots\ldots \quad (2.4.3)$$

dengan $\Delta x \to 0$

Hal sama juga berlaku untuk optimasi tanpa kendala dengan peubah banyak.

Definisi deret Taylor untuk perluasan dimensi – n :

$$x = x^* + \Delta x$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ x^*_2 \\ \\ x^*_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \\ \Delta x_n \end{pmatrix}$$

Anggap bahwa fungsi f (x) kontinu dan memiliki turunan parsial pada order n. Perluasan deret berikut :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^* + \Delta x) \\ &= f(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \Delta x_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i . \partial x_j}\right) \Delta x_i\, \Delta x_j + .. \end{aligned}$$

Sebagai penjelasan di ambil contoh untuk order 2 (E_2)

$$x = (x_1 , x_2)$$

$$f(x) = f(x^*) + \frac{\partial f^*}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f^*}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f^*}{\partial x_1^2}\right) \Delta x_1^2 + \ldots$$

Notasi $\nabla f(x)$ sebagai gradien dan $H(x)$ sebagai matrik hessian akan menunjukkan :

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

Dengan persamaan (2.4.3) di atas dapat dinyatakan

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f(x)^* \, \Delta x + \frac{1}{2!} H^*(x)\, \Delta x^2 + \ldots \quad (2.4.4)$$

Teorema 10 :

Syarat perlu dan cukup untuk menunjukkan keoptimalan fungsi f (x) adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{di } x = x_0 \text{ , untuk } j = 1,2,\ldots,n$$

Bukti :

Penting untuk diketahui bahwa untuk $j = 1$merupakan turunan pertama fungsi peubah tunggal dan untuk $j > 1$ merupakan turunan parsial fungsi peubah banyak. Keduanya memiliki kesamaan sebagai kemiringan dari suatu garis singgung pada grafik. Misalkan f (x) kontinu dan cekung ke atas, f (x) memiliki maksimum global pada $x_0 \in I \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0), \forall x \in I$

Ada dua interval:

i. $x < x_0 \Rightarrow x - x_0 < 0$ dan $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ (2.4.5)

ii. $x > x_0 \ni x - x_0 > 0$ maka

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0 \qquad (2.4.6)$$

Karena $f'(x_0)$ ada dan dari definisi (2.4.5) dan (2.4.6) menunjukkan bahwa $f'(x_0) = 0$ atau $\nabla f(x) = 0$.

$\Leftarrow$

Jika $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ maka $f(x)$ optimal

Andaikan $f(x)$ suatu fungsi yang akan dimaksimumkan dan diasumsikan $f(x)$ kontinu dan dapat didiferensialkan.

Dari definisi diatas $\nabla f(x) = 0$ maka perluasan deret Taylor :

$$f(x) = f(x_0) + 0 \quad \ni \quad f(x) - f(x_0) = 0$$

$$f(x_0) - f(x) = 0$$

Untuk fungsi $f(x)$ maksimum maka $\forall x_0 \in S$

$$f(x_0) - f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in S$$

Jika $x < x_0 \ni x_0 - x < 0$ maka

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geqslant 0$$

$$f'(x) \geqslant 0$$

Hal ini kontradiksi dengan $f'(x) = 0$ maka

$$f(x_0) - f(x) = 0$$