BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 Dasar-dasar Program Geometri

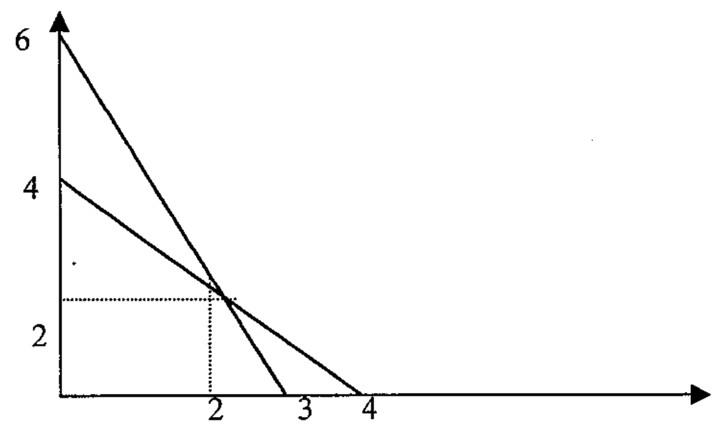
2.1.1 Penyelesaian Persamaan Simultan

Masalah optimalisasi dalam bentuk non linear yang kompleks dapat di reduksi menjadi sebuah masalah yang terdiri dari himpunan persamaan linear simultan dan konsisten.

Sebuah sistem persamaan linier yang konsisten dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$AX = B$$

dimana A adalah sebuah matriks r x n dengan vektor baris yang bebas linear dan $r \leq n$. Untuk menyelesaikannya digunakan dengan cara substitusi. Sebagai ilustrasi diberikan persamaan berikut : $2x_1 + x_2 = 6$, $x_1 + x_2 = 4$ yang mempunyai solusi $x_1=2$ dan $x_2=2$ untuk grafik penyelesaiannya adalah sebagai berikut:



Gambar1. grafik perpotongan persamaan di atas

2.1.2 Deret Taylor

Deret Taylor digunakan untuk membangun konsep dasar teknik dan tujuan dari program non linear. Bagian dari deret Taylor yaitu fungsi gradien dan matriks Hessian digunakan untuk mendapatkan karakteristik solusi optimal dari titik stasioner dan pengujian kekonvekan suatu fungsi.

Definisi 1

Fungsi f (X) adalah fungsi yang diferensiabel dan mempunyai nilai real dari X dalam E_n. Ambil X + ΔX sebagai persekitaran dari X dalam E_n sedemikian sehingga

$\Delta X = [\ \delta x_1\ \delta x_2\ \ \dots\ \delta x_n\ ]'$

dan $X + \Delta X = [\ x_1 + \delta x_1\ \ x_2 + \delta x_2\ \ \dots\ ,\ x_n + \delta x_n\ ]'$

maka deret taylor untuk fungsi variabel n tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut $f(x_1 + \delta x_1\ \ x_2 + \delta x_2\ \dots, x_n + \delta x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + (\delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \delta x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}) + \frac{1}{2}(\delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \delta x_n \frac{\partial f}{\partial x_n})^2 f + \dots\dots + 1/n!(\delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \delta x_n \frac{\partial f}{\partial x_n})^n f + 1/(n+1)!(\delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \delta x_n \frac{\partial f}{\partial x_n})^{n+1} f.$ (Mital,K.V.,1976)

Telah didefinisikan $\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\ \ \frac{\partial f}{\partial x_2}\ \ \dots\ \ \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]'$ dan matriks Hessian dari fungsi f(X) sebagai matrik n x n yaitu

$$H(X) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n} \end{bmatrix}$$

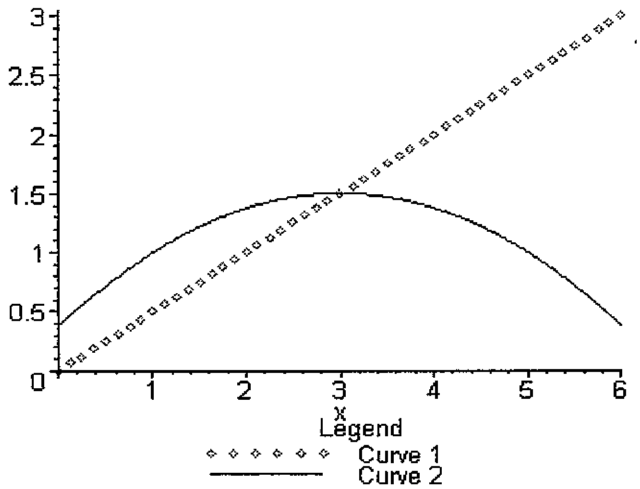
Sehingga deret taylor dapat ditulis kembali sebagai :

$$f(X + \Delta X) = f(X) + (\Delta X)'\ \nabla f(X) + \tfrac{1}{2}\ (\Delta X)'\ H(X)\ (\Delta X) + e(X, \Delta X)\ |\Delta X|^2$$

dimana $e(X, \Delta X) \to 0$ sehingga $|\Delta X| \to 0$.

Notasi $(\nabla f)^*$ dan $H(x^*)$ menyatakan vektor gradien dan matriks Hessian yang dievaluasi pada titik x^*.

Untuk lebih jelasnya diberikan grafik berikut untuk perkiraan deret Taylor pada $f(x)=x^{1/2}$.



Gambar 2. aproksimasi deret Taylor untuk $x^{1/2}$

2.1.3 Titik Ekstrim

Analisis matematika diperlukan dalam perolehan titik maksimal atau minimal dari suatu fungsi. Titik yang membuat f(x) minimal akan mengakibatkan – f(x) menjadi maksimal. Sebuah masalah maksimal dapat diubah menjadi masalah minimal dan sebaliknya. Titik ekstrim dapat berupa titik maksimal/ minimal global atau maksimal/minimal lokal dan dalam hubungannya dijelaskan pada definisi-definisi berikut :

Definisi 2

Fungsi f(X) mempunyai titik minimal global pada X_0 dalam S jika untuk semua X dalam S, $f(X) \geq f(X_0)$. Untuk titik maksimal global pertidaksamaannya bertanda sebaliknya. (Mital, K.V.,1976)

Definisi 3

Fungsi f(X) mempunyai titik minimal lokal atau relatif pada X_0 dalam S jika terdapat persekitaran δ dari X_0 sedemikian sehingga $f(X) \geq f(X_0)$ untuk semua persekitaran dari X. Untuk titik maksimal lokal atau relatif pertidaksamaannya bertanda sebaliknya. (Mital,K.V.,1976)

Jelas terlihat bahwa titik maksimal global lebih besar atau sama dengan maksimal lokal dan titik minimal global kurang dari atau sama dengan minimal lokal. Dengan menggunakan fungsi gradien dan matriks Hessian diperoleh ketentuan yang dapat digunakan untuk mengidentifikasi titik stasioner yaitu sebagai berikut :

1. Kondisi cukup untuk minimal lokal pada x*
   - Fungsi gradien (∇f) * = 0
   - Matriks Hessian H(x*) adalah definit positif
2. kondisi cukup untuk maksimal lokal pada x*
   - Fungsi gradien (∇f) * = 0
   - Matriks Hessian H(x*) adalah definit negatif
3. kondisi cukup untuk titik sadel pada x*
   - Fungsi gradien (∇f) * = 0
   - Matriks Hessian H(x*) adalah indefinit

Contoh 1

f(x) = sin (x)   x = - phi ... phi . Tentukan titik ekstrimnya.

Penyelesaian

Kondisi cukup untuk titik stasioner adalah dengan menggunakan fungsi gradien dan matriks Hessian yaitu sebagai berikut:

$(\nabla f)^* = \cos x = 0$

$x^* = \pi/2$ atau $x^* = -\pi/2$

H(x) = - sin x   sehingga untuk

- $x^* = \pi/2 \rightarrow H(x^*) = -\sin \pi/2 = -1$

  karena H(x*) definit negatif maka $x^* = \pi/2$ adalah maksimal lokal.

- $x^* = -\pi/2 \rightarrow H(x^*) = -\sin -\pi/2 = 1$

  karena $H(x^*)$ definit positif maka $x^* = -\pi/2$ adalah minimal lokal.

Secara geometri fungsi $f(x) = \sin x$ dapat dijelaskan pada gambar 3, lampiran 1.

2.1.4 Fungsi Konveks

Definisi 4

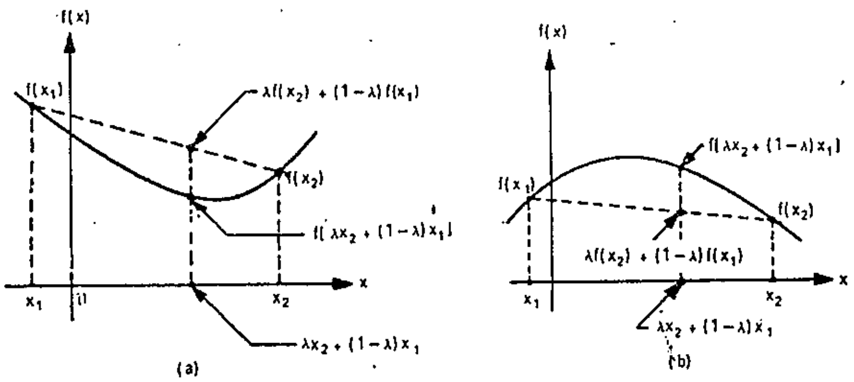
Fungsi $f : R^n \rightarrow R$ adalah fungsi konveks, bila untuk sembarang dua titik yaitu X_1, X_2 elemen R^n

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{dan } X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

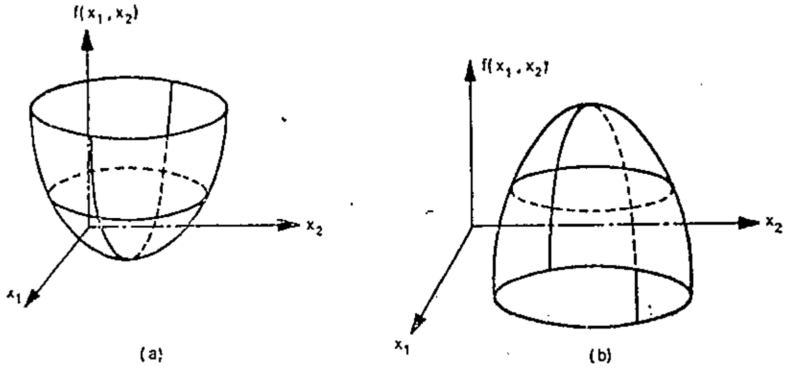
dan untuk sembarang λ, $0 \le \lambda \le 1$ berlaku

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1) \le \lambda f(X_2) + (1-\lambda)(X_1) \tag{2.1}$$

dan fungsi dikatakan konkaf jika tanda pertidaksamaan kebalikannya atau $-f(X)$ adalah konveks. (Rao,S.S.,1976)



Gambar 4 . Fungsi dengan satu variabel: (a) fungsi konveks; (b) fungsi konkaf



Gambar 5. fungsi dengan dua variabel: (a) fungsi konveks; (b) fungsi konkaf.

Teorema 1

Sebuah fungsi f(X) merupakan fungsi konveks bila untuk sembarang dua titik $X_1, X_2 \in R$ berlaku

$$f(X_2) \geq f(X_1) + \nabla f^T (X_1)(X_2 - X_1) \qquad (2.2)$$

Bukti

Dari definisi 3 didapatkan

$f(\lambda X_2 + (1-\lambda) X_1) \leq \lambda f(X_2) + (1-\lambda) f(X_1)$

yaitu $f(X_1 + \lambda (X_2 - X_1)) \leq f(X_1) + \lambda [f(X_2) - f(X_1)]$

Pertidaksamaan diatas dapat ditulis sebagai

$$f(X_2) - f(X_1) \geq \left\{ \frac{f[X_1 + \lambda (X_2 - X_1)] - f(X_1)}{\lambda} \right\} \qquad (2.3)$$

dengan mengambil limit $\lambda \to 0$ maka pertidaksamaan (2.3) menjadi

$$f(X_2) - f(X_1) \geq \nabla f^T (X_1)(X_2 - X_1) \qquad (2.4)$$

Terbukti. (Rao,S.S,.1976)

Teorema 2

Sebuah fungsi $f(X)$ merupakan konveks jika matriks Hessian $H(X) = [\partial^2 f(X)/\partial x_i \partial x_j]$ definit positif atau semi definit positif.

Bukti

Misalkan sebarang dua titik $X_1, X_2 \in R$ dan $X^* = X_1$, $X^* + h = X_2$, $h = X_2 - X_1$ maka menurut deret taylor didapatkan

$$f(X^* + h) = f(X^*) + \sum_{i=1}^{n} h_i \, \partial f(X^*)/\partial x_i + 1/2! \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} h_i h_j \, \partial^2 f(X)/\partial x_i \partial x_j \Big|_{X = X^* + \theta h} \quad (2.5)$$

dimana $0 \le \theta \le 1$

persamaan (2.5) dapat ditulis kembali

$$f(X_2) = f(X_1) + \nabla f^T(X_1)(X_2 - X_1) + ½ (X_2 - X_1)^T H\{X_1 + \lambda (X_2 - X_1)\}(X_2 - X_1) \quad (2.6)$$

Terlihat bahwa pertidaksamaan (2.4) terpenuhi, sehingga $f(x)$ konveks jika $H(x)$ semi definit positif dan jika $H(x)$ definit positif maka fungsi $f(x)$ selalu konveks.

Terbukti. (Rao, S.S.,1976)

Teorema 3

Jika $f(X)$ konveks maka minimal lokal merupakan minimal global.

Bukti : (dengan Kontradiksi)

Andaikan terdapat dua titik minimal lokal yang berbeda, X_1 dan X_2 untuk fungsi $f(X)$. misalkan $f(X_2) < f(X_1)$ karena $f(X)$ konveks maka X_1, X_2 yang memenuhi pertidaksamaan (2.4) yaitu

$$f(X_2) - f(X_1) \geq \nabla f^T (X_1)(X_2 - X_1) \quad (2.7)$$

$$\nabla f^T (X_1)\, S \leq 0 \quad (2.8)$$

dimana $S = X_2 - X_1$ dan S merupakan vektor gabungan dari titik X_1 ke X_2.

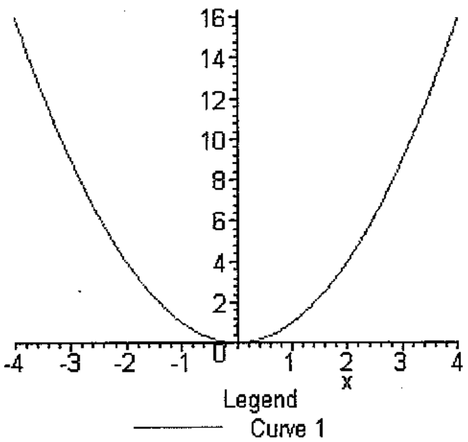
Pertidaksamaan (2.8) menunjukkan bahwa nilai fungsi f(X) dapat diturunkan ke arah $S = X_2 - X_1$ dari titik X_1.

Hal ini kontradiksi dengan asumsi awal yaitu X_1 merupakan minimal lokal sehingga pengandaian harus diingkar. Jadi tidak terdapat lebih dari satu titik minimal lokal untuk fungsi konveks.

Terbukti. (Rao,S.S.,1976)

Contoh 2:

Selidiki fungsi $f(x) = x^2$, $x \in R$ merupakan fungsi konveks.



Gambar 6. grafik fungsi $f(x) = x^2$

Untuk menyelidiki kekonvekan suatu fungsi dapat digunakan teorema 2 yaitu suatu fungsi disebut konveks jika mempunyai matriks Hessian definit positif atau semi definit positif. Matriks Hessian untuk $f(x) = x^2$ adalah sebagai berikut :

$H(x) = [2]$ jadi didapatkan $a_{11} = 2 > 0$ sehingga merupakan bentuk definit positif.

Terbukti bahwa $f(x) = x^2$ merupakan fungsi konveks.

2.1.5 Metode Lagrange

Teorema 4

Misalkan $X \in S \subseteq En$ dan f(X) adalah fungsi diferensiabel yang mempunyai nilai real. Misalkan $g_k(X) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$ (2.9)

dimana setiap $g_k(X)$ adalah fungsi diferensiabel yang mempunyai nilai real dan untuk setiap X dalam S matriks m x n

$$\left[\frac{\partial g_k}{\partial x_i}\right], k = 1, 2, \ldots, m \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.10}$$

yang memiliki rank m. Fungsi f(X) mempunyai relatif ekstrim berkendala di X_0 terhadap kendala (2.9) maka terdapat bilangan real λ_i, $k = 1, 2, \ldots, m$ sedemikian sehingga X_0 adalah titik stasioner dari fungsi

$$L(X, \lambda) = f(X) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(X) \tag{2.11}$$

$L(X, \lambda)$ merupakan fungsi Lagrange dengan parameter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sebagai vektor pengali Lagrange.

Bukti

Tanpa mengurangi keumuman dari persamaan (2.10) diasumsikan Jakobian

$$\frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)} \neq 0 \tag{2.12}$$

persamaan (2.9) mendefinisikan $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sebagai fungsi dari $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ yang dituliskan kembali ($x_{m+10}, x_{m+20}, \ldots, x_{n0}$). Variabel $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$ kemungkinan merupakan veriabel yang bebas linear. Karena X_0 adalah titik ekstrim relatif dari f(X) maka X_0 merupakan titik stasioner dan didapatkan

$$(\Delta X)' (\nabla f_0) = 0$$

atau pada X_0 berlaku $\delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \delta x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ (2.13)

karena kendala pada persamaan (2.9) δx_i, i = 1, 2, ..., n tidak bebas linear maka dengan pendeferensialan diperoleh persamaan berikut:

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial g_k}{\partial x_2} \delta x_2 \ldots\ldots + \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \delta x_n = 0 \quad , k = 1, 2, \ldots, m \tag{2.14}$$

mengalikan persamaan diatas dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ dan menambahkannya pada persamaan (2.13) akan didapatkan

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i}\right) \delta x_i = 0 \tag{2.15}$$

dengan mempertimbangkan persamaan berikut

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i}\right) = 0 \quad , j = 1, 2, \ldots, m \tag{2.16}$$

$$\text{atau} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

karena pertidaksamaan (2.12) merupakan matriks simetri dan non singular maka terdapat nilai unik dari λ_1, λ_2, ... , λ_m yang memenuhi persamaan diatas. Dengan nilai (2.15) mengurangi

$$\sum_{i=m+1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i}\right) \delta x_i = 0$$

karena x_i, i= m+1, ..., n adalah variabel bebas linear mengakibatkan

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i}\right) = 0 \text{ ,i= m+1,m+2, ... ,n} \qquad (2.17)$$

persamaan (2.16) dan(2.17) dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{\partial L(X,\lambda)}{\partial x_i} = 0 , \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, n \text{ pada } X_0$$

Ini berarti bahwa X_0 adalah titik stasioner dari f(X).

Terbukti. (Mital, K.V.,1976)

2.1.6 Kondisi Kuhn Tucker

Jika pada program non linear kendalanya dalam bentuk pertidaksamaan, maka syarat perlu agar diperoleh solusi opimal adalah adanya kondisi Kuhn Tucker. Misalkan f(X) adalah fungsi yang mempunyai nilai real pada E_n, G(X) merupakan fungsi vektor yang terdiri dari fungsi yang mempunyai nilai real $g_k(X)$, k = 1, 2, …., m sebagai komponennya sehingga menurut teorema Lagrange diperoleh

$$L(X,\lambda) = f(X) + \lambda\, G(X) \qquad (2.18)$$

dimana λ adalah pengali Lagrange yang berada pada E_m dan $\lambda \geq 0$. Menurut teorema Lagrange untuk mendapatkan titik stasioner harus dipenuhi persamaan berikut :

$$\left[\frac{\partial L(X,\lambda)}{\partial x_i}\right]_{X=X_0} = 0 \quad , \; i = 1, 2, \ldots, n$$

jadi diperoleh persamaan berikut:

$$\left[\frac{\partial L(X,\lambda)}{\partial x_i}\right] = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m}\left(\lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i}\right) = 0 \; , \; i = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.19)$$

$$\left.\begin{array}{lcl} g_k(X) & \leq & 0 \\ \lambda_k g_k(X) & = & 0 \\ \lambda_k & \geq & 0 \end{array}\right\} k = 1, 2, \ldots, m \qquad (2.20)$$

atau dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m}(\lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}) \geq 0 \qquad (2.21)$$

$$x_j[\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m}(\lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j})] = 0 \qquad (2.22)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (2.23)$$

$$\left.\begin{array}{lcl} g_i(X) & \leq & 0 \\ \lambda_i g_i(X) & = & 0 \\ \lambda_i & \geq & 0 \end{array}\right\} i = 1, 2, \ldots, m \qquad (2.24)$$

himpunan kondisi (2.19, 2.20) atau (2.21, 2.22, 2.23, 2.24) disebut kondisi Kuhn Tucker. Persamaan (2.19, 2.20) adalah himpunan syarat perlu pada (X_0, λ_0), jika titik ini adalah titik sadel dari $f(X,\lambda)$ dengan variabel X tidak dibatasi dan $\lambda \geq 0$. Sedangkan persamaan (2.21, 2.22, 2.23, 2.24) dengan kondisi yang sama jika $X \geq 0$, $\lambda \geq 0$.

Jika f(X) dan semua $g_i(X)$ adalah fungsi konveks dengan titik sadel (X_0, λ_0), $\lambda_0 \geq 0$ dari $L(X,\lambda)$ sedemikian sehingga X_0 adalah titik minimal dari f(X) dengan kendala $g_i(X) \leq 0$, i = 1, 2, ... , m. Jika kendala $X \geq 0$, maka terdapat titik sadel non negatif. Karena f(X) adalah konveks maka f(X) hanya mempunyai satu titik optimum dan titik ini merupakan minimalnya. Dari kondisi ini solusi dari perkiraan kondisi Kuhn Tucker memberikan titik sadel yang diharapkan dan minimal dari f(X).

Contoh 3

Meminimalkan $x^2 + y^2$

Dengan kendala $2x + y - 1 \geq 0$

$y - 0.5 = 0$

Penyelesaian

Fungsi Lagrange untuk masalah di atas adalah sebagai berikut:

$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda_1(2x+y-1) + \lambda_2(y-0.5)$

pada titik stasioner turunan pertama pada setiap argumen bernilai nol, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -2x - y + 1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = y - 0.5 = 0$$

dari persamaan –persamaan di atas diperoleh:

$x = 0.25$ $\quad$ $y = 0.5$ $\quad$ $\lambda_1 = 0.25$ $\quad$ $\lambda_2 = -0.75$

untuk lebih jelasnya lihat gambar 7 yang ada di lampiran 2.

Jadi titik stasionernya adalah (x, y) = (0.25 , 0.5)

Contoh 4

Meminimalkan $(x-2)^2 + (y-1)^2$

Dengan kendala $\quad -x^2 + y \geq 0$

$\quad -x - y + 2 \geq 0$

Penyelesaian

Fungsi Lagrange untuk masalah di atas adalah sebagai berikut:

$$L(x,y,\lambda) = (x-2)^2 + (y-1)^2 - \lambda_1(-x^2+y) - \lambda_2(-x-y+2)$$

pada titik stasioner turunan pertama pada setiap argumen bernilai nol, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-2) + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-1) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(-x^2 + y) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(-x-y+2) = 0$$

dari persamaan –persamaan di atas diperoleh: $x = 1$ $y = 1$ $\lambda_1 = 2/3$ $\lambda_2 = 2/3$

untuk lebih jelasnya lihat gambar 8 yang ada di lampiran 3.

Jadi titik stasionernya adalah $(x,y) = (1,1)$

2.1.7 Posinomial

Posinomial adalah bagian dari program geometri yang merupakan bentuk fungsi obyektif dan kendala. Di bawah ini diberikan definisi tentang posinomial yaitu :

Definisi 5

Sebuah fungsi f(x) dinamakan posinomial jika f dapat ditunjukkan sebagai faktor pangkat yang masing-masing berbentuk :

$$c_j\, x_1^{a_{1j}} x_2^{a_{2j}} \ldots x_n^{a_{nj}} \qquad j=1,2,\ldots N$$

dimana $c_j > 0$,$x_j>0$ dan eksponen a_{ij} konstanta real (positif, nol atau negatif).

jadi posinomial dapat ditulis sebagai berikut :

$$f(x)=c_1 x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} \ldots x_n^{a_{n1}} + \ldots + c_N x_1^{a_{N1}} x_2^{a_{N2}} \ldots x_n^{a_{Nn}} \qquad (2.25)$$

(Rao,S.S.,1976)

untuk membedakan antara posinomial dan polinomial diberikan ilustrasi sebagai berikut :

Contoh 5

misalkan diberikan dua fungsi dengan variabel x_1, x_2 dan x_3 yaitu :

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3 + x_1^2x_2 + 4x_3 + \frac{2}{x_1x_2} + 5x_3^{-1/2}$$

$$g(x_1x_2x_3) = 6 + 3x_1 - 8x_2 + 7x_3 + 2x_1x_2 - 3x_1x_2 - 3x_1x_3 + 4/3x_2x_3 + 8/7x_2^2 - 9x_2 + x_3^2$$

dari definisi 4, maka fungsi f (x_1, x_2, x_3) merupakan sebuah posinomial dan g (x_1,x_2,x_3) bukan merupakan posinomial melainkan polinomial dengan derajat 2 karena terdapat faktor yang mempunyai koefisien negatif.

2.1.8 Pertidaksamaan Aritmatika – Geometri

Pertidaksamaan aritmatika – geometri merupakan dasar program geometri dimana solusi dari suatu masalah program geometri didapatkan dari pendekatan pertidaksamaan aritmatika –geometri.

Teorema 5

Untuk sebarang n bilangan non negatif yaitu x_1, x_2, ... , x_n,

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n} \tag{2.26}$$

dengan tanda persamaan benar jika dan hanya jika $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

Bukti

Untuk membuktikan pertidaksamaan di atas digunakan faktorisasi aljabar untuk $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ dan seterusnya. Pembuktian pertidaksamaan didasarkan pada dua aplikasi induksi matematika yaitu induksi maju dan induksi mundur.

*. Induksi Maju

Dalam induksi maju akan dibuktikan untuk $n = 2^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

- Untuk $k=1$, maka $n=2$

  Misalkan digunakan dua bilangan non negatif x dan y, maka pertidaksamaan menjadi

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \tag{2.27}$$

dan tanda persamaan benar jika dan hanya jika $x = y$.

karena x dan y bilangan non negatif, maka x dan y dapat ditulis sebagai

$$x = p^2$$
$$y = q^2$$

dimana p dan q adalah bilangan real, berdasarkan (2.27) maka diperoleh

$$\frac{p^2+q^2}{2} \geq \sqrt{p^2q^2}$$
$$p^2+q^2 \geq 2pq$$
$$p^2-2pq+q^2 \geq 0$$
$$(p-q)^2 \geq 0 \tag{2.28}$$

karena kuadrat dari suatu bilangan real adalah non negatif, maka pertidaksamaan (2.28) benar.

- Untuk k=2, maka n=4

Untuk memudahkannya , disubstitusikan

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{x_3 + x_4}{2}$$

dimana x_1, x_2, x_3, x_4 adalah bilangan non negatif. Dengan menggunakan persamaan (2.27) diperoleh pertidaksamaan

$$\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}}{2} \geq \sqrt{(\frac{x_1 + x_2}{2})(\frac{x_3 + x_4}{2})}$$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt{(\frac{x_1 + x_2}{2})(\frac{x_3 + x_4}{2}} \qquad (2.29)$$

maka benar untuk pertidaksamaan

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \;,\; \frac{x_3 + x_4}{2} \geq \sqrt{x_3 x_4} \qquad (2.30)$$

persamaan (2.29) dapat ditulis kembali sebagai

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt{\sqrt{x_1 x_2}\sqrt{x_3 x_4}}$$

$$\geq (x_1 x_2 x_3 x_4)^{1/4} \qquad (2.31)$$

Selanjutnya tanda persamaan benar untuk (2.29) jika dan hanya jika

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_3 + x_4}{2}$$

dan benar (2.30) jika dan hanya jika $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$. Jadi tanda persamaan benar pada (2.31) jika dan hanya jika $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

- Untuk k=3, maka n=8

  Misal

$$x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, x_2 = \frac{y_3 + y_4}{2}, x_3 = \frac{y_5 + y_6}{2}, x_4 = \frac{y_7 + y_8}{2}$$

  dimana y_i (i= 1,2, ..., 8) adalah bilangan non negatif, maka persamaan (2.31) menjadi

$$\frac{y_1 + ... + y_8}{8} \geq \left[(\frac{y_1 + y_2}{2}) ....(\frac{y_7 + y_8}{2}) \right]^{1/4}$$

  dengan menggunakan pertidaksamaan (2.30) dengan x disubstitusikan ke y maka persamaan menjadi $\frac{y_1 + y_2}{2} \geq \sqrt{y_1 y_2}$, ... , $\frac{y_7 + y_8}{2} \geq \sqrt{y_7 y_8}$

  dan akan diperoleh

$$\frac{y_1 + ... + y_8}{8} \geq \left[\sqrt{y_1 y_2} \ ... \sqrt{y_7 y_8} \right]^{1/4}$$
$$\geq (y_1 .... y_8)^{1/8}$$

  tanda persamaan benar jika dan hanya jika semua y_i (i = 1, 2, ..., 8) adalah bertanda sama dengan (=).

- Untuk k sembarang, semua n.

  Dari bukti di atas untuk n =2, n=4 dan n=8 yaitu k = 1,2,3, dapat diasumsikan bahwa pertidaksamaan benar untuk suatu n integer dalam 2^k , maka akan dibuktikan untuk 2^{k+1}. Karena $2^{k+1} = 2.2^k$ maka akan dibuktikan benar untuk 2n.

- Diasumsikan benar untuk $n = 2^k$

Dari pertidaksamaan (2.26) dapat ditulis kembali sabagai berikut

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \ldots x_n)^{1/n} \tag{2.32}$$

- Dibuktikan benar untuk $n = 2^{k+1}$.

Dengan substitusi

$$x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, x_2 = \frac{y_3 + y_4}{2}, \ldots, x_n = \frac{y_{2n-1} + y_{2n}}{2}$$

dimana $y_1, y_2, \ldots y_{2n}$ adalah bilangan 2n yang non negatif, sehingga diperoleh

$$\frac{\frac{y_1 + y_2}{2} + \ldots + \frac{y_{2n-1} + y_{2n}}{2}}{n} \geq \left[\left((\frac{y_1 + y_2}{2}) \ldots (\frac{y_{2n-1} + y_{2n}}{2})\right)\right]^{1/n}$$

dengan menggunakan substitusi pertidaksamaan berikut

$$\frac{y_1 + y_2}{2} \geq \sqrt{y_1 y_2}, \ldots, \frac{y_{2n-1} + y_{2n}}{2} \geq \sqrt{y_{2n-1} y_{2n}}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{y_1 + \ldots + y_{2n}}{2n} &\geq \left[\sqrt{y_1 y_2} \ldots \sqrt{y_{2n-1} y_{2n}}\right]^{1/n} \\ &\geq (y_1 \ldots y_{2n})^{1/2n} \end{aligned} \tag{2.33}$$

tanda persamaan benar jika dan hanya jika semua y_j (j=1, 2, …, 2n) adalah bertanda sama dengan (=). Jadi telah didapatkan persamaan untuk 2n atau 2^{k+1}. Karena k sebarang, maka terbukti pertidaksamaan (2.32) benar untuk $n=2^k$, k=1,2,3, ...

*. Induksi Mundur

Dengan menggunakan induksi mundur dapat dibuktikan untuk (n-1) dimana $n=2^k$, k = 1, 2, 3, .. pembuktian ini menggunakan persamaan yang telah dibuktikan dalam induksi maju.

- Untuk k=1, maka n-1=1

  $x/1 = (x)^{1/1} = (x)^1 = x$ benar

- Untuk k=2, maka n-1=3

  Berdasarkan hasil pembuktian untuk n = 4 pada induksi maju persamaan (2.31) maka dipilih

  $$x_1 = y_1 \ , x_2 = y_2 \ , x_3 = y_3 \tag{2.34}$$

  dan x_4 harus memenuhi

  $$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

  dan :

  $$\frac{y_1 + y_2 + y_3 + x_4}{4} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

  sehingga $x_4 = 4/3(y_1 + y_2 + y_3) - (y_1 + y_2 + y_3)$

  $$= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \tag{2.35}$$

dengan mensubstitusikan nilai x_i (i=1,2,3,4)yang diberikan oleh persamaan (2.34) dan (2.35) pada persamaan (2.31), akan didapatkan :

$$\frac{y_1+y_2+y_3}{3} \geq \sqrt[4]{y_1y_2y_3(\frac{y_1+y_2+y_3}{3})}$$

dengan mempangkatkan 4 kedua ruas maka diperoleh

$$(\frac{y_1+y_2+y_3}{3})^4 \geq y_1y_2y_3(\frac{y_1+y_2+y_3}{3})$$

dengan membagi kedua ruas dengan $\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ didapatkan :

$$(\frac{y_1+y_2+y_3}{3})^3 \geq y_1y_2y_3$$

$$\frac{y_1+y_2+y_3}{3} \geq (y_1y_2y_3)^{1/3} \qquad (2.36)$$

karena persamaan benar pada (2.31) jika dan hanya jika $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, maka benar untuk (2.37) jika dan hanya jika $y_1 = y_2 = y_3$.

- Untuk k sebarang, n= 2^k diasumsikan benar dengan mengikuti pembuktian pada induksi maju
- Untuk k sebarang, n=n-1 dengan induksi mundur

  Dengan memilih

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_2 \\ &\dots \\ x_{n-1} &= y_{n-1} \end{aligned} \qquad (2.37)$$

dan x_n harus memenuhi persamaan berikut

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}}{n-1} \qquad (2.38)$$

maka diperoleh

$$\frac{y_1 + \ldots + y_{n-1} + x_n}{n} = \frac{y_1 + \ldots + y_{n-1}}{n-1}$$

$$\text{sehingga } x_n = n\,\frac{y_1 + \ldots + y_{n-1}}{n-1} - (y_1 + \ldots + y_{n-1})$$

$$= \frac{y_1 + \ldots + y_{n-1}}{n-1} \qquad (2.39)$$

dengan mensubstitusikan nilai x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) yang diberikan oleh persamaan (2.37) dan (2.38) pada persamaan (2.26), maka diperoleh :

$$\frac{y_1 + \ldots + y_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n]{y_1 \ldots y_{n-1}\left(\frac{y_1 + \ldots + y_{n-1}}{n-1}\right)}$$

dengan mempangkatkan n pada kedua ruas maka diperoleh

$$\left(\frac{y_1 + \ldots + y_{n-1}}{n-1}\right)^n \geq y_1 \ldots y_{n-1}\left(\frac{y_1 + \ldots + y_{n-1}}{n-1}\right)$$

dengan membagi kedua ruas dengan $\frac{y_1 + \ldots + y_{n-1}}{n-1}$ didapatkan :

$$\left(\frac{y_1 + \ldots + y_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \geq y_1 \ldots y_{n-1}$$

$$\frac{y_1 + \ldots + y_{n-1}}{n-1} \geq (y_1 \ldots y_{n-1})^{1/n-1} \qquad (2.40)$$

maka benar untuk (2.26) jika dan hanya jika $x_1 = \ldots = x_n$ dan benar untuk (2.40) jika dan hanya jika $y_1 = \ldots = y_{n-1}$.

Terbukti. (Rao,S.S.,1976)

2.1.9 Kondisi Normalitas dan Ortogonalitas

Kondisi normalitas dan ortogonalitas merupakan syarat perlu dan cukup dalam program geometri.

Definisi 7

Bila diketahui $x \in R^n$ $X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix}$ dengan $x_i > 0$ untuk i= 1, 2, …., n maka x memenuhi kondisi normalitas jika $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. (Rao,S.S.,1976)

Definisi 8

Bila diketahui $x \in R^n$ $X=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix}$ dengan $x_i>0$ untuk i= 1, 2,..., n maka x memenuhi kondisi ortogonalitas bila terdapat $\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{Bmatrix}$ dengan a_i (i= 1,2 , ..., n) adalah bilangan real sedemikian sehingga berlaku $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$. (Rao,S.S.,1976)

Masalah program geometri mempunyai derajat kesulitan yang berbeda-beda.

Definisi 9

Derajat kesulitan adalah selisih antara banyaknya suku-suku dalam posinomial atau polinomial dengan banyaknya variabel keputusan. (Rao,S.S.,1976)

Misalkan N menyatakan banyaknya suku dalam posinomial atau polinomial, n menyatakan banyaknya variabel keputusan, dan D menyatakan derajat kesulitan maka

$$D = N - (n + 1)$$

Semakin besar derajat kesulitan maka penyelesaian masalah program geometri semakin sulit. Jika derajat kesulitan nol maka solusi yang didapatkan unik atau dapat disubstitusikan secara langsung, sedangkan untuk derajat kesulitan tidak sama dengan nol perlu menggunakan proses pemeriksaan dan kesalahan.

Contoh 6

Diberikan masalah program geometri dengan fungsi obyektif sebagai berikut :

Meminimalkan

$$f = x_1 x_2^2 + 2x_1^{-1} x_2^{-3} + 5/2\, x_1$$

tentukan derajat kesulitan masalah di atas.

Penyelesaian : N menunjukkan banyaknya suku posinomial / polinomial yaitu 3, n menyatakan banyaknya variabel keputusan adalah 2 yaitu x_1, x_2 jadi derajat kesulitan masalah di atas adalah D = 3 – (2 + 1) = 0.

2.2 Program Geometri Posinomial Tanpa Kendala

Bentuk umum masalah program geometri posinomial tanpa kendala adalah

menentukan $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$

yang meminimalkan fungsi obyektif

$$f(X)=\sum_{j=1}^{N} c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}} \qquad (2.41)$$

$c_j \geq 0$, $x_i \geq 0$ dan a_{ij} konstanta real

dengan mengambil $U_j = c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}$ $\qquad j= 1,2, \dots N$

persamaan (2.41) dapat dinyatakan kembali sebagai

$f(X) = U_1 + U_2 + \dots\dots + U_N$

penyelesaian fungsi f(X) ini dapat dilakukan melalui dua cara yaitu berdasarkan teknik perhitungan differensial dan pertidaksamaan arithmatik-geometri.

2.2.1 Teknik Perhitungan Differensial

Menurut perhitungan differensial, kondisi yang harus dipenuhi untuk meminimalkan f(x) adalah dengan membuat turunan pertamanya sama dengan nol, sehingga dari persamaan (2.41) didapatkan

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \qquad k= 1,2,\dots, n$$

$$\sum_{j=1}^{N} \partial \frac{U_j}{x_k} = 0 \qquad k=1,2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{N} (c_j x_1^{a_{1j}} x_2^{a_{2j}} \ldots x_{k-1}^{a_{k-1j}} a_{kj} x_k^{a_{kj}^{-1}} x_{k+1}^{a_{k+1j}} \ldots x_n^{a_{nj}}) = 0 \qquad k=1,2, \ldots, n \qquad (2.42)$$

bila persamaan (2.42) dikalikan dengan x_k maka akan menjadi

$$x_k \sum_{j=I}^{N} (c_j x_1^{a_{1j}} x_2^{a_{2j}} \ldots x_{k-1}^{a_{k-1j}} a_{kj} x_k^{a_{kj}-1} x_{k+1}^{a_{k+1j}} \ldots x_n^{a_{nj}}) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{N} (c_j x_1^{a_{1j}} x_2^{a_{2j}} \ldots x_{k-1}^{a_{k-1j}} a_{kj} x_k^{a_{kj}} x_{k+1}^{a_{k+1j}} \ldots x_n^{a_{nj}}) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{kj} (c_j x_1^{a_{1j}} x_2^{a_{2j}} \ldots x_{k-1}^{a_{k-1j}} x_k^{a_{kj}} x_{k+1}^{a_{k+1j}} \ldots x_n^{a_{nj}}) = 0$$

$$\sum_{j=I}^{N} a_{kj}\, U_j\,(X) = 0 \qquad k= 1,2,\ldots,n \qquad (2.43)$$

untuk menentukan nilai minimal variabel x (misalkan x*) maka ada sejumlah n persamaan dari persamaan (2.42) yang harus diselesaikan secara simultan. Nilai x* harus memenuhi persamaan (2.43) sehingga pada titik minimal akan dipenuhi

$$\sum_{j=1}^{N} a_{kj}\, U_j\,(X^*) = 0 \qquad k= 1,2,\ldots,n \qquad (2.44)$$

bila persamaan (2.44) dibagi dengan nilai minimal fungsi obyektif (misalkan f*) akan didapat

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{a_{kj} U_j(x^*)}{f^*} = 0 \qquad k= 1,2,\ldots,n \qquad (2.45)$$

misalkan $\Delta_j^* = \dfrac{U_j^*}{f^*}$ (2.46) dari persamaan (2.46) diperoleh

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta_j^* = \Delta_1^* + \Delta_2^* + \;\; \ldots \;\; + \Delta_N^*$$

$$= \frac{1}{f^*} (U_1^* + U_2^* + \;\; \ldots \;\; + U_N^*)$$

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta_j^* = 1 \qquad (2.47)$$

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta_j^* a_{kj} = 0 \qquad k=1,2, \ldots ,n \qquad (2.48)$$

untuk mendapatkan nilai minimal fungsi obyektif f* maka disubstitusikan

$$U_j^* = c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}$$

$$f^* = (f^*)^1 \qquad (2.49)$$

dengan persamaan (2.47), maka persamaan (2.49) dapat dinyatakan sebagai

$$f^* = (f^*)^{\sum_{j=1}^{N} \Delta_j^*}$$

$$= (f^*)^{\Delta_1} (f^*)^{\Delta_2} \ldots (f^*)^{\Delta_N} \qquad (2.50)$$

karena $f^* = \frac{U_1^*}{\Delta_1^*} = \frac{U_2^*}{\Delta_2^*} = \ldots = \frac{U_N^*}{\Delta_N^*}$ dari persamaan (2.46) maka (2.50) ditulis

$$f^* = \left(\frac{U_1^*}{\Delta_1^*}\right)^{\Delta_1^*} \left(\frac{U_2^*}{\Delta_2^*}\right)^{\Delta_2^*} \ldots \left(\frac{U_N^*}{\Delta_N^*}\right)^{\Delta_N^*} \qquad (2.51)$$

substitusi $U_j^* = c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}$ ke dalam persamaan (2.51) didapatkan

$$f^* = \left\{\left(\frac{c_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1^*}\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i^*)^{a_{i1}}\right]^{\Delta_1^*}\right\}\left\{\left(\frac{c_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2^*}\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i^*)^{a_{i2}}\right]^{\Delta_2^*}\right\}\cdots\left\{\left(\frac{c_N}{\Delta_N}\right)^{\Delta_N^*}\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i^*)^{a_{iN}}\right]^{\Delta_N^*}\right\}$$

$$= \left\{\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{c_j}{\Delta_j}\right)^{\Delta_j^*}\right\}\left\{\prod_{j=1}^{N}\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i^*)^{a_{ij}}\right]^{\Delta_j^*}\right\}$$

$$= \left\{\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{c_j}{\Delta_j}\right)^{\Delta_j^*}\right\}\left\{\prod_{i=1}^{n}(x_i^*)^{\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Delta_j^*}\right\}$$

$$= \left\{\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{c_j}{\Delta_j}\right)^{\Delta_j^*}\right\} \qquad (2.52)$$

karena $\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Delta_j^* = 0$ untuk sebarang i

untuk menentukan nilai minimal variabel keputusannya dapat dilakukan dengan menyelesaikan persamaan (2.46) atau

$U_j^* = \Delta_j^* f^*$

$$= c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}} \qquad j = 1,2,\ldots,N \qquad (2.53)$$

dengan menyelesaikan N persamaan (2.53) secara simultan akan diperoleh nilai x_i^*(i= 1,2, ... , n) akan tetapi persamaan (2.53) tidak linear sehingga tidah mudah diselesaikan secara langsung.

Persamaan (2.53) dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{U_j^*}{c_j} = (x_1^*)^{a_{1j}}(x_2^*)^{a_{2j}} \ldots (x_n^*)^{a_{nj}} \qquad j=1,2,\ldots,N \qquad (2.54)$$

dengan mengambil logaritma kedua ruas maka didapat

$$\ln \frac{U_j^*}{c_j} = \ln \{(x_1^*)^{a_{1j}} (x_2^*)^{a_{2j}} \; \ldots\ldots \; (x_n^*)^{a_{nj}}\}$$

$$= a_{1j} \ln x_1^* + a_{2j} \ln x_2^* + \ldots + a_{nj} \ln x_n^* \qquad j=1,2,\ldots,N \qquad (2.55)$$

dengan mengambil $w_i = \ln x_i \qquad i= 1,2,\ldots,n \qquad (2.56)$

sehingga persamaan (2.55) menjadi

$$\ln \frac{U_j^*}{c_j} = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \; \ldots\ldots \; + a_{nj} w_n \qquad (2.57)$$

solusi x_i^* didapat dengan menyelesaiakan persamaan (2.57)

$$x_i^* = e^{w_i} \qquad i= 1,2,\ldots, n \qquad (2.58)$$

Contoh 7

Masalah Minimasi Tanpa Kendala dengan Derajat Kesulitan Nol

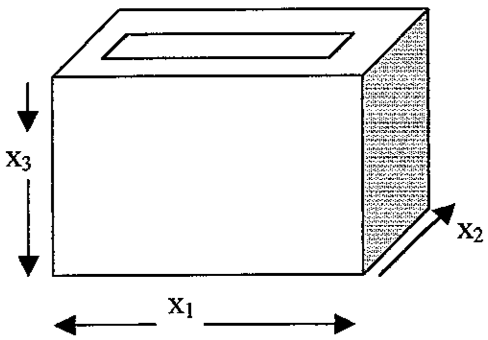
Seorang manajer telah memutuskan untuk memindahkan gandum dari gudang ke pabrik pengolahan pada suatu kotak terbuka dengan panjang x_1 m , lebar x_2 m dan tinggi x_3 m. berturut-turut biaya pemindahan pada bagian dasar, sisi dan sisi kotak adalah 80, 10, 20 per m^2. setiap putaran perjalanan memerlukan biaya sebesar 1. diasumsikan bahwa kotak tidak mempunyai nilai keselamatan. Tentukan biaya minimum unttuk memindahkan 80 m^3 gandum ke pabrik. Biaya dalam satuan ratusan ribu.

Jawab

Total biaya pengangkutan diberikan oleh :

Biaya total = biaya dari kotak + biaya angkut

= (biaya bagian dasar + biaya bagian sisi + biaya bagian sisi) + jumlah putaran perjalanan yang diperlukan untuk mengangkut gandum ke pabrik x biaya tiap putaran perjalanan)



gambar 1. kotak terbuka

keterangan:

f(x) : total biaya pengangkutan gandum ke pabrik

x_1 : panjang kotak terbuka yang digunakan untuk menenpatkan gandum (m^2)

x_2 : lebar kotak terbuka yang digunakan untuk menempatkan gandum (m^2)

x_3 : tinggi kotak terbuka yang digunakan untuk menempatkan gandum (m^2)

c_1 : biaya pemindahan gandum pada bagian dasar kotak

c_2 : biaya pemindahan gandum pada bagian samping kanan kiri kotak

c_3 : biaya pemindahan gandum pada bagian samping depan belakang kotak

c_4 : biaya perjalanan yang diperlukan untuk mengangkut gandum ke pabrik

a_{1j} : konstanta pangkat pada x_1 dalam suku posinomial ke-j j= 1,2,3,4

a_{2j} : konstanta pangkat pada x_2 dalam suku posinomial ke-j j= 1,2,3,4

a_{3j} : konstanta pangkat pada x_3 dalam suku posinomial ke-j j= 1,2,3,4

Δ_j : kontribusi relatif atau bobot pada suku posinomial ke-j j=1,2,3,4 terhadap fungsi obyektif

sehingga permasalahan di atas dapat diformulasikan dalam model matematika sebagai berikut :

$$f(x) = [\,(2x_1x_3)10 + (x_1x_2)\,80 + (2x_2x_3)\,20\,] + [\,\left(\frac{80}{x_1x_2x_3}\right)(1)\,]$$

$$= (\,80\,x_1x_2 + 40\,x_2x_3 + 20\,x_1x_3 + \frac{80}{x_1x_2x_3}\,) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

untuk mendapatkan nilai c_j , persamaan (1) disamakan atau dibandingkan dengan bentuk umum program geometri posinomial tanpa kendala yaitu

$$80\,x_1x_2 + 40\,x_2x_3 + 20\,x_1x_3 + \frac{80}{x_1x_2x_3} = c_1\,x_1^{a_{11}}\,x_2^{a_{21}}\,x_3^{a_{31}} + c_2\,x_1^{a_{12}}\,x_2^{a_{22}}\,x_3^{a_{32}} + c_3\,x_1^{a_{13}}\,x_2^{a_{23}}\,x_3^{a_{33}} + c_4\,x_1^{a_{14}}\,x_2^{a_{24}}\,x_3^{a_{34}}$$

sehingga didapatkan

$c_1 = 80$ $c_2 = 40$ $c_3 = 20$ $c_4 = 80$

dan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

kondisi normalitas dan ortogonalitas diberikan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dari matrik diatas didapatkan 4 persamaan yaitu :

$\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_4 = 0$ .... (2)

$\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_4 = 0$ .... (3)

$\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4 = 0$ .... (4)

$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 1$ .... (5)

dari persamaan (2) dan (3) diperoleh

$$\begin{aligned} \Delta_4 = \Delta_1 + \Delta_3 &= \Delta_1 + \Delta_2 \\ \Delta_3 &= \Delta_2 \end{aligned} \qquad \text{..} \quad (6)$$

persamaan (3) disubstitusikan ke persamaan (4) akan didapatkan

$$\begin{aligned} \Delta_4 = \Delta_1 + \Delta_2 &= \Delta_2 + \Delta_3 \\ \Delta_1 &= \Delta_3 \end{aligned}$$

sehingga didapatkan $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$ dan dari persamaan (6), $\Delta_4 = \Delta_1 + \Delta_3 = 2\Delta_1$

dari persamaan (5) diperoleh

$$\begin{aligned} \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 &= 1 \\ \Delta_1 + \Delta_1 + \Delta_1 + 2\Delta_1 &= 1 \\ 5\Delta_1 &= 1 \\ \Delta_1 &= 1/5 \end{aligned}$$

jadi diperoleh $\Delta_1{*} = \Delta_2{*} = \Delta_3{*} = 1/5$ dan $\Delta_4{*} = 2/5$

untuk menentukan nilai minimal fungsi obyektif, f* dengan menggunakan persamaan

$$f^* = \prod_{j=1}^{4}\left(\frac{c_j}{\Delta_j^*}\right)^{\Delta_j^*} = \left(\frac{c_1}{\Delta_1^*}\right)^{\Delta_1^*}\left(\frac{c_2}{\Delta_2^*}\right)^{\Delta_2^*}\left(\frac{c_3}{\Delta_3^*}\right)^{\Delta_3^*}\left(\frac{c_4}{\Delta_4^*}\right)^{\Delta_4^*}$$

$$= \left(\frac{80}{1/5}\right)^{1/5}\left(\frac{40}{1/5}\right)^{1/5}\left(\frac{20}{1/5}\right)^{1/5}\left(\frac{80}{2/5}\right)^{2/5}$$

$$= (4 \times 10^2)^{1/5}(2 \times 10^2)^{1/5}(1 \times 10^2)^{1/5}(4 \times 10^4)^{1/5}$$

$$= (32 \times 10^{10})^{1/5}$$

= 200 ratus ribu rupiah

dapat dilihat bahwa nilai fungsi obyektif diperoleh terlebih dahulu daripada nilai optimal dari variabel keputusannya.

Untuk menentukan nilai optimal variabel keputusan digunakan persamaan yaitu

$$U_1^* = 80\, x_1^* x_2^* = \Delta_1^* f^* = 1/5\,(200) = 40 \quad (7)$$

$$U_2^* = 40\, x_2^* x_3^* = \Delta_2^* f^* = 1/5\,(200) = 40 \quad (8)$$

$$U_3^* = 20\, x_1^* x_3^* = \Delta_3^* f^* = 1/5\,(200) = 40 \quad (9)$$

$$U_4^* = \frac{80}{x_1^* x_2^* x_3^*} = \Delta_4^* f^* = 2/5\,(200) = 80 \quad (10)$$

Dari persamaan di atas diperoleh

$x_2^* = 1/2x_1^* = 1/x_3^*$, $x_1^* = x_3^*/2$, $x_2^* = 1/x_3^*$

$$\frac{1}{x_1^* x_2^* x_3^*} = 1 = \frac{2x_3^*}{x_3^* x_3^*}$$

$$= \frac{2}{x_3^*} = 1$$

$$x_3^* = 2$$

$x_1^* = x_3^*/2$ $\qquad\qquad$ $x_2^* = 1/x_3^*$

$= 2/2 = 1$ $\qquad\qquad$ $= ½$

jadi nilai optimal variabel keputusannya adalah

$\{ x_1^*, x_2^*, x_3^* \} = \{ 1\ m^2, ½\ m^2, 2\ m^2 \}$

2.2.2 Konsep Pertidaksamaan Aritmatik-geometri

Dengan menggunakan pertidaksamaan aritmatika-geometri dan bila diambil $U_j = u_j \Delta_j$ $\quad j = 1,2, \ldots, N$ maka fungsi obyektif dapat dinyatakan kembali

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_N \leq \left(\frac{U_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1} \left(\frac{U_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2} \ldots \left(\frac{U_N}{\Delta_N}\right)^{\Delta_N} \qquad (2.59)$$

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_N \leq \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{U_j}{\Delta_j}\right)^{\Delta_j}$$

Dengan $U_j = U_j(X)$ $\;j=1,2, \ldots, N$ dan $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$ memenuhi hubungan

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_N = 1 \qquad (2.60)$$

Ruas kiri persamaan (2.59) disebut fungsi primal sedangkan ruas kanannya disebut fungsi predual. Dengan menggunakan hubungan

$$U_j = c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}} \qquad j=1,2, \ldots, N \qquad (2.61)$$

Sehingga fungsi predualnya dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\left(\frac{U_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1}\left(\frac{U_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2}\cdots\left(\frac{U_N}{\Delta_N}\right)^{\Delta_N}=\left(\frac{c_1\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_{i1}}}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1}\left(\frac{c_2\prod_{i=1}^{n}x_2^{a_{i2}}}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2}\cdots\left(\frac{c_N\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_{iN}}}{\Delta_N}\right)^{\Delta_N}$$

$$=\left(\frac{c_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1}\left(\frac{c_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2}\cdots\left(\frac{c_N}{\Delta_N}\right)^{\Delta_N}\left\{\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{a_{i1}}\right]^{\Delta_1}\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{a_{i2}}\right]^{\Delta_2}\cdots\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{a_{iN}}\right]^{\Delta_N}\right\}$$

$$=\left(\frac{c_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1}\left(\frac{c_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2}\cdots\left(\frac{c_N}{\Delta_N}\right)^{\Delta_N}\left\{(x_1)^{\sum_{j=1}^{N}a_{1j}\Delta_j}(x_2)^{\sum_{j=1}^{N}a_{2j}\Delta_j}\cdots(x_N)^{\sum_{j=1}^{N}a_{Nj}\Delta_j}\right\} \qquad (2.62)$$

bila Δ_j dipilih sedemikian sehingga memenuhi kondisi ortogonalitas yaitu

$$\sum_{j=1}^{N}\Delta_j\, a_{ij}=0 \quad , \ i=1,2, \qquad ,n \qquad (2.63)$$

maka fungsi predual (2.62) tidak tergantung pada x_i (i = 1, 2, ... ,n) dan dapat dinyatakan

$$v=\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{c_j}{\Delta_j}\right)^{\Delta_j} \qquad (2.64)$$

fungsi inilah disebut fungsi dual.

Hubungan Primal Dual Pada Kasus Tanpa Kendala

Untuk memudahkan notasi, fungsi obyektif f(x) dinyatakan dengan x_0 dan dengan transformasi eksponensial

$$x_i=e^{w_i} \quad \text{atau } w_i=\ln x_i \quad i=1,2,\ \ldots.., n \qquad (2.65)$$

dimana variabel w_i tidak dibatasi oleh tanda.

Didefinisikan variabel baru Δ_j sebagai bobot yaitu

$$\Delta_j = \frac{U_j}{x_0} = \frac{c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}}{x_0} \qquad j=1,2, \quad \ldots\ldots , N \tag{2.66}$$

$$\Delta_j \text{ positif sehingga } \sum_{j=1}^{N} \Delta_j = 1 \tag{2.67}$$

dengan mengambil logaritma pada kedua ruas, persamaan (2.66) menjadi

$$\ln \Delta_j = \ln c_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \ln x_i - \ln x_0 \tag{2.68}$$

yaitu

$$\ln \frac{\Delta_j}{c_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i - w_0 \quad j= 1,2, \ldots\ldots ,N \tag{2.69}$$

jadi masalah minimasi f(x) tanpa kendala dapat diganti dengan minimasi w_0 dengan kendala persamaan (2.67) dan (2.69).

fungsi obyektif x_0 diberikan

$$x_0 = e^{w_i} = \sum_{j=1}^{N} c_j \prod_{i=1}^{n} e^{a_{ij} w_i}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} c_j \; e^{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i} \tag{2.70}$$

Lemma 1

Diberikan masalah program geometri posinomial dengan transformasi fungsi obyektif pada persamaan (2.70) maka fungsi obyektif tersebut merupakan fungsi konveks sehingga masalah itu adalah masalah program konveks.

Bukti

Misalkan $T_k = e^{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i}$, akan dibuktikan bahwa T_k merupakan fungsi konveks. Menurut teorema 3 yaitu suatu fungsi dikatakan konveks jika matriks Hessian definit positif atau semi definit positif.

Fungsi gradien untuk $T_k = e^{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i}$ adalah $\nabla T_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e^{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, T_k$ dan

matriks Hessiannya adalah $\nabla^2 T_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e^{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i} = (\sum_{i=1}^{n} a_{ij})^2\, T_k$

karena eksponen a_{ij} adalah konstanta real (positif , nol atau negatif) maka $(a_{ij})^2$ merupakan konstanta yang positif dan $e^{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i} > 0$.

Matriks Hessian $H(w) = \nabla^2 T_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e^{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i} > 0$

karena fungsi eksponen ($e^{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i}$) merupakan fungsi konveks maka penjumlahan positif fungsi konveks yaitu x_0 juga merupakan fungsi konveks.

Terbukti

Berdasar teorema 4 maka terdapat satu minimal lokal yang sekaligus merupakan minimal global.

Teorema 5

Maksimal fungsi dual sama dengan minimal fungsi primal atau $f^* = v^*$.

Bukti

Untuk membuktikan teorema di atas digunakan fungsi Lagrange yaitu

$$L(w,\Delta,\lambda) = w_0 + \lambda_0 \left(\sum_{j=1}^{N} \Delta j - 1\right) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i - w_0 - \ln \frac{\Delta_j}{c_j}\right) \quad (2.71)$$

Dimana $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix}$ $\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \\ \dots \\ \Delta_n \end{bmatrix}$ $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$,λ adalah vektor pengali Lagrange.

Pada titik stasionernya, turunan pertama fungsi Lagrange pada setiap argumennya bernilai nol sehingga dari persamaan (2.71) diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial w_0} = 0 \quad \text{atau} \quad 1 - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 0 \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = 0 \quad \text{atau} \quad \sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_{ij} = 0 \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta_j} = 0 \quad \text{atau} \quad \lambda_0 - \frac{\lambda_j}{\Delta_j} = 0 \quad j=1,2,\dots,N \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = 0 \quad \text{atau} \quad \sum_{j=1}^{N} \Delta_j - 1 = 0 \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 \quad \text{atau} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i - w_0 - \ln \frac{\Delta_j}{c_j} = 0 \quad j=1,2,\dots,N \quad (2.76)$$

persamaan (2.72) , (2.74) dan (2.75) memberikan relasi

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1 = \sum_{j=1}^{N} \Delta_j \lambda_0 = \lambda_0 \sum_{j=1}^{N} \Delta_j = \lambda_0 \tag{2.77}$$

jadi nilai vektor pengali Lagrange diberikan oleh

$$\lambda_j = \begin{cases} 1 & \text{untuk } j = 0 \\ \Delta_j & \text{untuk } j = 1,2, \ldots N \end{cases} \tag{2.78}$$

substitusi persamaan (2.78) ke persamaan (2.71) diperoleh

$$L(w, \Delta) = w_0 + \sum_{j=1}^{N} \Delta_j - 1 + \sum_{j=1}^{N} \Delta_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i - w_0 - \ln \frac{\Delta_j}{c_j} \right) \tag{2.79}$$

$$= - \sum_{j=1}^{N} \Delta_j \ln \frac{\Delta_j}{c_j} + (1 - w_0) \left(\sum_{j=1}^{N} \Delta_j - 1 \right) + \sum_{i=1}^{n} w_i \left(\sum_{j=1}^{N} \Delta_j a_{ij} \right) \tag{2.80}$$

fungsi pada persamaan (2.80) merupakan fungsi Lagrange yang sesuai dengan masalah optimasi baru dimana fungsi obyektif

$$\overline{v}(\Delta) = - \sum_{j=1}^{N} \Delta_j \ln \frac{\Delta_j}{c_j} = \ln \left[\prod_{j=1}^{N} \left(\frac{c_j}{\Delta_j} \right)^{\Delta_j} \right] \tag{2.81}$$

dengan kendala

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta_j = 1 \tag{2.82}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta_j a_{ij} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, n \tag{2.83}$$

masalah ini merupakan fungsi dual dari fungsi primalnya. $1-w_0$, w_1, ….. , w_n dapat dianggap sebagai vektor pengali Lagrange untuk kendala (2.82) dan (2.83). vektor Δ yang membuat persamaan (2.80) , stasioner akan secara otomatis memberikan titik stasioner dari persamaan (2.81). Ini membuktikan bahwa fungsi $\Delta_j \ln \frac{\Delta_j}{c_j}$ j=1, 2, ...,N konvek karena Δ_j positif . Fungsi $\overline{v}(\Delta)$ merupakan negatif dari penjumlahan fungsi konvek maka $\overline{v}(\Delta)$ adalah fungsi konkaf dan mempunyai maksimal lokal yang merupakan maksimal global. Jadi minimal fungsi primal sama dengan maksimal fungsi yang diberikan pada persamaan (2.81) dengan kendala kondisi normalitas dan ortogonalitas yang diberikan oleh persamaan (2.82) dan (2.83) dengan variabel Δ_j dibatasi positif.

Substitusi solusi optimal, Δ^* nilai optimal fungsi obyektif menjadi

$$\overline{v}^* = \overline{v}(\Delta^*) = L(w^*, \Delta^*) = w_0^* = L(w^*, \Delta^*, \lambda^*)$$

$$= - \sum_{j=1}^{N} \Delta_j^* \ln \frac{\Delta_j^*}{c_j^*} \tag{2.84}$$

dengan mengambil eksponen dan menggunakan transformasi pada persamaan (2.65) didapatkan

$$v^* = f^* = \left[\prod_{j=1}^{N} \left(\frac{c_j}{\Delta_j} \right)^{\Delta_j} \right]$$

Terbukti. (Rao,S.S.,1976)

Untuk lebih jelasnya disajikan tabel 1 pada lampiran 4 tentang hubungan fungsi primal dan dual.

Prosedur Perhitungan untuk menyelesaikan masalah minimasi tanpa kendala :

1. Menentukan persamaan dalam variabel Δ berdasarkan kondisi nomalitas dan ortogonalitas yang diberikan dalam masalah tersebut
2. Menentukan derajat kesulitan masalah .

   Jika derajat kesulitan masalah tersebut nol, maka akan diperoleh solusi yang unik untuk Δ_j (j=1,2,...,N).

   Untuk masalah dengan derajat kesulitan lebih besar dari nol, maka akan diperoleh variabel Δ_j (j=1,2,...,N) yang lebih banyak dari pada jumlah persamaan (n + 1).
3. Menentukan fungsi dual yang berkaitan dengan fungsi primalnya (fungsi obyektif)
4. Memaksimalkan fungsi dualnya v(Δ) atau ln v(Δ) dengan membuat turunan pertamanya nol.

Contoh 8

Masalah Optimasi Tanpa Kendala dengan Derajat Kesulitan 1

Pada sebuah instalasi pompa waduk, biaya pipa diberikan oleh ($100D + 50 D^2$) dimana D adalah diameter pipa dalam satuan cm. Biaya pada waduk menurun dengan adanya peningkatan jumlah tampungan air dan model matematikanya diberikan oleh

20/Q dimana Q adalah rata-rata jumlah air yang ditampung (dalam m^3/s). Biaya pemompaan diberikan oleh $300Q^2/D^5$.

Tentukan ukuran optimal pipa dan jumlah tampungan air sehingga biayanya minimum

Penyelesaian

Diketahui :

f(x) : total biaya minimal pada instalasi pompa waduk

D : diameter pipa dalam satuan cm

Q : rata-rata jumlah air yang ditampung (dalam m^3/s)

c_1 : konstanta biaya pipa pada suku posinomial ke-1

c_2 : konstanta biaya pipa pada suku posinomial ke-2

c_3 : konstanta biaya pompa waduk adanya peningkatan jumlah tampungan air

c_4 : konstanta biaya pemompaan

a_{Dj} : konstanta pangkat pada variabel D dalam suku posinomial ke-j j= 1,2,3,4

a_{Qj} : konstanta pangkat pada variabel Q dalam suku posinomial ke-j j= 1,2,3,4

Δ_j : bobot atau kontribusi relatif dalam suku posinomial ke-j j= 1,2,3,4 terhadap fungsi obyektif

sehingga permasalahan di atas dapat diformulasikan dalam model matematika sebagai berikut:

Menentukan (D, Q) sehingga meminimalkan total biaya yaitu

$$f(D,Q) = 100\, D^1 Q^0 + 50\, D^2 Q^0 + 20\, D^0 Q^{-1} + 300\, D^{-5} Q^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Diketahui N = 4 n=2 maka derajat kesulitan masalah di atas adalah 1

Dari persamaan diperoleh bentuk umum fungsi obyektif yaitu

$$f(D, Q) = c_1 D^{a_{D1}} Q^{a_{Q1}} + c_2 D^{a_{D2}} Q^{a_{Q2}} + c_3 D^{a_{D3}} Q^{a_{Q3}} + c_4 D^{a_{D4}} Q^{a_{Q4}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dengan menyamakan (1) dan (2) didapatkan

$c_1=100$ $\begin{pmatrix} a_{D1} & a_{D2} & a_{D3} & a_{D4} \\ a_{Q1} & a_{Q2} & a_{Q3} & a_{Q4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$c_2=50$

$c_3=20$

$c_4=300$

Kondisi keortogonalan dan kenormalan adalah:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

karena N > (n+1) persamaan ini tidak berada pada Δ_j yang diingini secara langsung tapi sembarang 3 dari Δ_j dapat ditentukan dalam bentuk dari pada Δ_j yang diterima.

Disini dengan penyelesaian dari Δ_1, Δ_2, Δ_3 dalam bentuk Δ_4 diperoleh

$\Delta_1+2\Delta_2-5\Delta_4=0$ .... (3)

$-\Delta_3+2\Delta_4=0$ .... (4)

$\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4=1$ .... (5)

dari persamaan (3) dan (4) didapatkan

$\Delta_1 = 5\Delta_4 - 2\Delta_2$ .... (6)

$\Delta_3 = 2\Delta_4$ .... (7)

Persamaan (6) dan (7) disubstitusikan ke persamaan (5) didapatkan

$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 1$

$5\Delta_4 - 2\Delta_2 + \Delta_2 + 2\Delta_4 + \Delta_4 = 1$

$-\Delta_2 + 8\Delta_4 = 1$

$\Delta_2 = 8\Delta_4 - 1$ .... (8)

dan $\Delta_1 = 5\Delta_4 - 2\Delta_2$

$\Delta_1 = 5\Delta_4 - 2(8\Delta_4 - 1)$

$= 5\Delta_4 - 16\Delta_4 + 2 = -11\Delta_4 + 2$ .... (9)

masalah dual dapat dinyatakan sebagai berikut:

memaksimalkan

$$v(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = \left(\frac{c_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1} \left(\frac{c_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2} \left(\frac{c_3}{\Delta_3}\right)^{\Delta_3} \left(\frac{c_4}{\Delta_4}\right)^{\Delta_4}$$

$$= \left(\frac{100}{2-11\Delta_4}\right)^{(2-11\Delta_4)} \left(\frac{50}{8\Delta_4-1}\right)^{(8\Delta_4-1)} \left(\frac{20}{2\Delta_4}\right)^{(2\Delta_4)} \left(\frac{300}{\Delta_4}\right)^{(\Delta_4)}$$

maksimal dari v ekuivalen dengan maksimal dari ln v sehingga diperoleh

$$\ln v = (2 - 11\Delta_4)(\ln 100 - \ln(2 - 11\Delta_4)) + (8\Delta_4 - 1)(\ln 50 - \ln(8\Delta_4 - 1)) + (2\Delta_4)(\ln 20 - \ln(2\Delta_4)) + (\Delta_4)(\ln 300 - \ln(\Delta_4))$$

untuk mendapatkan nilai yang optimal maka turunan pertama dari ln v terhadap Δ_4 harus sama dengan nol sehingga didapatkan

$$\frac{\partial}{\partial \Delta_4} \ln (v) = -11 \; (\ln 100 - \ln (2 - 11\Delta_4) + (2 - 11\Delta_4) \left(\frac{11}{2-11\Delta_4}\right)$$

$$+ 8 (\ln 50 - \ln (8\Delta_4 - 1)) + (8\Delta_4 - 1)\left(-\frac{8}{8\Delta_4 - 1}\right) + 2 (\ln 20 - \ln (2\Delta_4))$$

$$+ (2\Delta_4)\left(-\frac{2}{2\Delta_4}\right) + 1 (\ln 300 - \ln (\Delta_4)) + (\Delta_4)\left(-\frac{1}{\Delta_4}\right) = 0$$

$$= \ln (2 - 11\Delta_4)^{11} - \ln (8\Delta_4 - 1)^8 - \ln (\Delta_4) - \ln (2\Delta_4)^2 - \ln 100^{11} + \ln 300$$

$$+ \ln 50^8 + \ln 20^2 + 11 - 8 - 2 - 1 = 0$$

$$\ln\left(\frac{(2 - 11\Delta_4)^{11}}{(8\Delta_4 - 1)^8(\Delta_4)(2\Delta_4)}\right) - \ln\left(\frac{(100)^{11}}{(300)(50)^8 (20)^2}\right) = 0$$

$$\ln\left(\frac{(2 - 11\Delta_4)^{11}}{(8\Delta_4 - 1)^8(\Delta_4)(2\Delta_4)}\right) = \ln\left(\frac{(100)^{11}}{(300)(50)^8 (20)^2}\right) = 2130 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

nilai Δ_4* dapat diperoleh dengan menggunakan proses pemeriksaan dan kesalahan sebagai berikut :

Nilai Δ_4*	Nilai ruas kiri persamaan (10)
2/11 = 0.182	0.0
0.15	$\frac{(0.35)11}{(0.2)8(0.3)2(0.15)} \cong 284$
0.147	$\frac{(0.385)11}{(0.175)8(0.294)2(0.147)} \cong 2210$
0.146	$\frac{(0.39)11}{(0.169)8(0.292)2(0.146)} \cong 4500$

Jadi nilai optimal dari $\Delta_4^* \cong 0.147$ dan persamaan (7), (8) ,(9) diperoleh

$\Delta_1^* = 2 - 11\Delta_4^* = 0.385$

$\Delta_2^* = 8\Delta_4^* - 1 = 0.175$

$\Delta_3^* = 2\Delta_4^* = 0.294$

nilai optimal dari fungsi obyektif diberikan oleh

$$v^* = f^* = (\left(\frac{100}{0.385}\right)^{0.385} \left(\frac{50}{0.175}\right)^{0.175} \left(\frac{20}{0.294}\right)^{0.294} \left(\frac{300}{0.147}\right)^{0.147}$$

$$= 8.5 \times 2.69 \times 3.46 \times 3.06 = 242$$

nilai optimal dari variabel keputusan dapat diperoleh dari

$U_1^* = \Delta_1^* f^* = (0.385)(242) = 92.2$

$U_2^* = \Delta_2^* f^* = (0.175) (242) = 42.4$ .... (11)

$U_3^* = \Delta_3^* f^* = (0.294) (242) = 71.1$

$U_4^* = \Delta_4^* f^* = (0.147)(242) = 35.6$

Dari persamaan (1) dan (11) didapatkan

$U_1^* = 100 D^* = 92.2$

$U_2^* = 50D^* = 42.4$

$D^* = 42.2/50 = 0.922$

$U_3^* = 20/Q^* = 71.1$

$Q^* = 20/71.1 = 0.281$

$U_4^* = 300Q^{*2}/D^{*5} = 35.6$

Jadi $D^* = 0.922$ cm dan $Q^* = 0.281$ m^3/s