BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 GRAPH

Dibawah ini akan dikemukakan beberapa pengertian dalam teori graph, serta sifat yang diperlukan.

Definisi 1 :

Suatu graph G [$V(G)$, $E(G)$] disingkat graph G terdiri dari :

- $V(G)$ (himpunan titik dari G) yaitu berupa himpunan tak kosong dan berhingga dari unsur-unsur yang disebut simpul/titik/vertek dengan notasi v_i, $i = 1,2, \dots , N$.
- $E(G)$ (himpunan garis dari G) yaitu himpunan kosong atau himpunan berhingga pasangan tak terurut dari elemen-elemen $V(G)$ yang disebut sisi/edge dengan notasi (v_i ,v_j) atau e_k dimana i, j, k bilangan asli dan $v_i , v_j \in V(G)$.

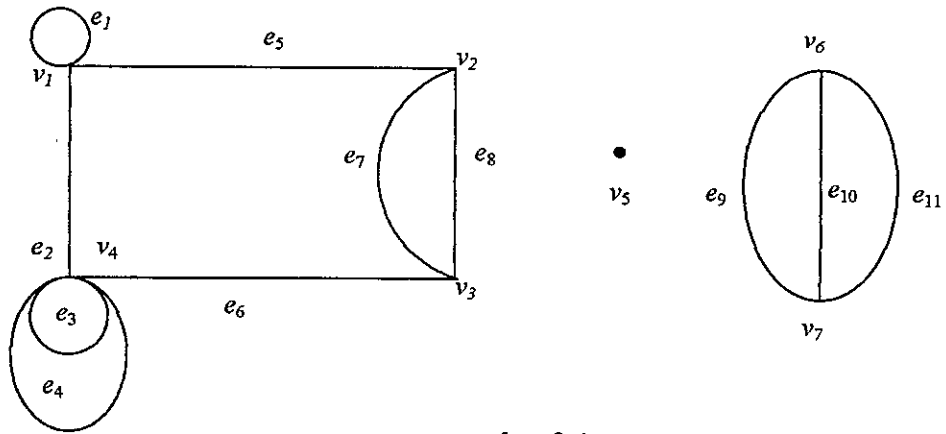
Garis (v_i ,v_j) terhubung diantara titik v_i dan v_j maka garis (v_i ,v_j) dikatakan insiden dengan titik v_i dan v_j . Sebaliknya titik v_i dan v_j dikatakan insiden dengan (v_i ,v_j) .

Suatu pasangan titik mungkin terhubung melalui beberapa garis yang berbeda, dan garis-garis tersebut disebut garis paralel. Bila terdapat garis-garis dari pasangan titik yang sama (v_i, v_j) maka garisnya disebut loop.

Suatu titik yang tidak insiden dengan suatu garis disebut titik terasing (isolated point).

Contoh 1 :

Diberikan suatu graph G :



gambar 2.1

Graph G dengan $V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 \}$, $E(G) =$

$$\{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11} \}$$

Garis e_1 pada v_1 merupakan loop, demikian juga garis e_3 pada v_4 dan e_4 pada v_4. Garis e_7 dan e_8 merupakan garis paralel, demikian juga dengan garis e_9, e_{10} dan e_{11}. Titik v_5 merupakan isolated point, karena tidak ada garis yang insiden dengannya.

Definisi 2 :

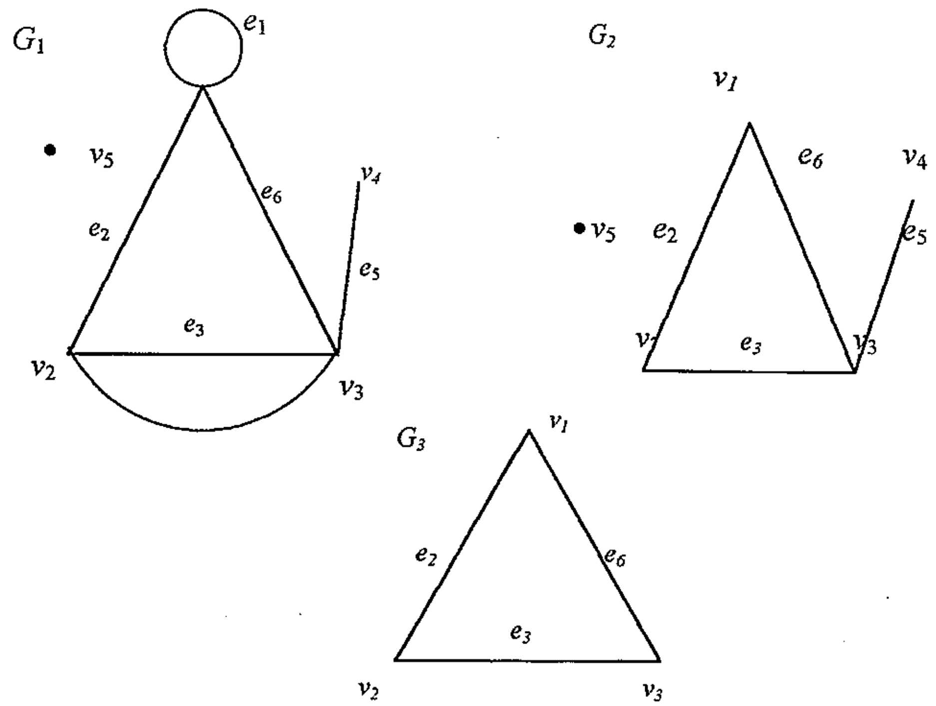
Dua titik dikatakan bertetangga jika kedua titik tersebut dihubungkan paling sedikit oleh 1 garis.

Definisi 3 :

Suatu graph G' didefinisikan sebagai pasangan [$V(G')$, $E(G')$] dengan $V(G') \subseteq V(G)$ dan $E(G') \subseteq E(G)$. Jika $V(G')$ dan $E(G')$ masing-masing subset sejati dari $V(G)$ dan $E(G)$ maka subgraph G' disebut subgraph sejati dari G. Jika $V(G') = V(G)$ dan $E(G')$ subset sejati dari $E(G)$ maka G' disebut spanning subgraph dari G .

Contoh 2:

Diberikan graph G_1 ,G_2 ,dan G_3 :



gambar 2.2

graph G_1,G_2, dan G_3

G_2 adalah spanning subgraph dari G_1 karena $V(G_2) = V(G_1)$ dan $E(G_2) \subseteq E(G_1)$.

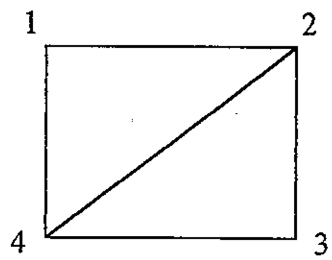
G_3 adalah subgraph sejati dari G_1 karena $V(G_3) \subseteq V(G_1)$ dan $E(G_3) \subseteq E(G_1)$.

Definisi 4 :

Graph sederhana (simple graph) adalah graph yang tidak mengandung loop

Contoh 3 :

Diberikan graph sederhana G_4 :



gambar 2.3

graph sederhana G_4 dengan V(G) : {1,2,3,4} dan E(G)

:{(1,2),(2,3),(3,4),(2,4),(1,4)}

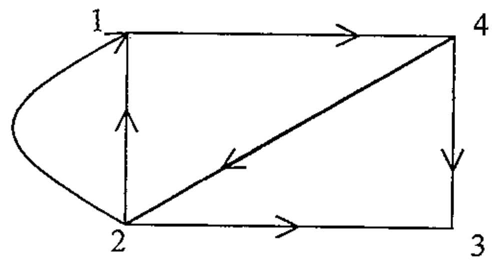
Definisi 5 :

Suatu graph berarah (Directed Graph atau disingkat Digraph) A terdiri dari :

- V(A) (himpunan titik dari A) yaitu berupa himpunan tak kosong dan berhingga dari unsur – unsur yang disebut titik/vertek.
- E(A) (himpunan garis berarah dari A) yaitu berupa himpunan pasangan terurut dari elemen-elemen V(A) yang disebut garis berarah/arkus.

Contoh 4 :

Diberikan digraph A :



gambar 2.4

Digraph A dengan V(A) : {1,2,3,4} dengan E(A) :{(1,4),(2,1),(1,2),(4,1),(2,3),(4,3)}

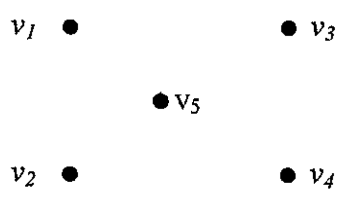
2.1.1. Beberapa Jenis Graph

Berikut ini diberikan tiga macam graph yang akan diperlukan dalam pembahasan selanjutnya.

2.1.1.1. Graph Null (*Nn*) yaitu graph yang himpunan garisnya kosong, atau graph yang hanya terdiri atas titik-titik yang terisolasi.

Contoh 5:

Diberikan graph N_5 :



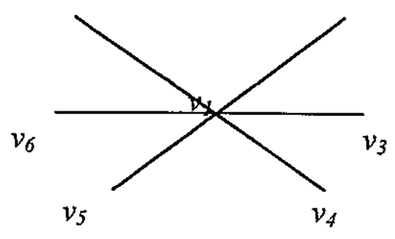
gambar 2.5

graph N_5 adalah graph null

2.1.1.2. Graph Bintang yaitu graph yang salah satu titiknya adjacent dengan semua titik yang berlainan.

Contoh 6 :

Diberikan graph B:



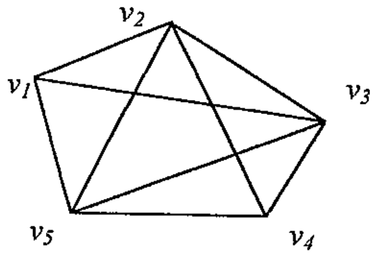
gambar 2.6

Graph B adalah graph bintang

2.1.1.3. Graph Lengkap (*Ln*) yaitu graph sederhana yang setiap pasangan dari titik-titik yang berbeda adalah adjacent.

Contoh 7 :

Diberikan graph L_5 :



gambar 2.7

graph L_5 adalah graph lengkap

Akibatnya graph lengkap merupakan graph sederhana yang banyak garisnya maksimum yaitu : $\begin{bmatrix} N \\ 2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2} N\,(n\text{-}1)$ garis dengan N adalah banyaknya titik

.

Bukti:

Dengan induksi matematika

- ❖ Untuk N=1 maka ada ½ . 1(1-1) = ½ .0 = 0 sisi . Terbukti benar.
- ❖ Misalkan benar untuk K titik ($N = K$) banyak garisnya adalah : ½ $K(K\text{-}1)$
- ❖ Untuk $N = K$+1

Dari graph lengkap dengan K titik, ditambah 1 titik karena merupakan graph lengkap maka 1 titik tersebut harus adjacent dengan K titik yang lain, sehingga terjadi penambahan K buah garis didapat jumlah garis

$= \frac{1}{2} K(K-1) + K$

$= \frac{1}{2} (K^2-K) + K$

$= \frac{1}{2} K^2 - 1/2\, K + K$

$= \frac{1}{2} K^2 + \frac{1}{2} K$

$= \frac{1}{2} K(K+1)$

$= \frac{1}{2} (K+1)K$

terbukti benar untuk $N = K+1$

2.2. Permutasi

Definisi 6 :

Suatu permutasi π adalah pemetaan bijektif dari suatu himpunan berhingga D = { $d_1, d_2, \ldots, d_n$ } kedirinya sendiri dan dituliskan

$$\pi = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \ldots & d_n \\ \pi(d_1) & \pi(d_2) & \ldots & \pi(d_n) \end{pmatrix}$$

atau $\pi : d_1 \longrightarrow \pi(d_1),\ d_2 \longrightarrow \pi(d_2), \ldots, d_n \longrightarrow \pi(d_n)$.

Contoh 4 :

Diketahui : D = {a, b, c } maka pemetaan $\pi : D \rightarrow D$ dibawah ini merupakan permutasi, yaitu :

$a \xrightarrow{\pi} \pi(a) = c$

$b \longrightarrow \pi(b) = a$ atau $\pi = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$

$c \longrightarrow \pi(c) = b$

Definisi 7 :

Dua permutasi π_1 dan π_2 dapat digandakan menjadi π_1, π_2 dengan aturan permutasi π_2 dikerjakan dahulu, baru kemudian pada π_1.

Contoh 8 :

Diketahui : $\pi_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$ dan $\pi_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$

maka $\pi_1.\pi_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$ demikian pula

untuk $\pi_2.\pi_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$ maka akan didapat

$\pi_1\,\pi_2$ dan $\pi_2\,\pi_1$

π_2	π_1		π_2	π_1
$a \rightarrow b \rightarrow a$			$a \rightarrow c \rightarrow c$	
$b \rightarrow a \rightarrow c$			$b \rightarrow a \rightarrow b$	
$c \rightarrow c \rightarrow b$			$c \rightarrow b \rightarrow a$	

Jadi $\pi_1.\pi_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$ dan $\pi_2.\pi_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$

Definisi 8 :

Permutasi $\begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & \ldots & d_{n-1} & d_n \\ d_2 & d_3 & d_4 & \ldots & d_n & d_1 \end{pmatrix}$ yaitu

dengan $d_1 \rightarrow d_2 \rightarrow d_3 \rightarrow \ldots\ d_{n-1} \rightarrow d_n \rightarrow d_1$ disebut suatu sikel dan ditulis $(d_1\, d_2\, d_3 \ldots d_n)$.

Contoh 9 :

Diketahui : permutasi $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i \\ d & g & f & e & b & c & a & h & i \end{pmatrix}$

maka a $\rightarrow$ d $\rightarrow$ e $\rightarrow$ b $\rightarrow$ g $\rightarrow$ a menghasilkan sikel (a d e b g)

c $\rightarrow$ f $\rightarrow$ c menghasilkan sikel (c f)

h $\rightarrow$ h menghasilkan sikel (h)

i $\rightarrow$ i menghasilkan sikel (i)

Jadi permutasi tersebut bisa ditulis dengan (a d e b g) (c f) (h) (i).

Catatan 1 :

1. Panjang sikel adalah banyaknya elemen yang terdapat dalam sikel tersebut.
2. Bentuk (σ_1, σ_2, σ_3,..., σ_k) disebut tipe suatu permutasi dengan jumlah elemen k, σ_i adalah jumlah sikel dengan panjang i ,untuk i = 1,2,3,...,k . Maka $\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 + \ldots + k\sigma_k = k$.
3. $y_1^{\sigma 1}\, y_2^{\sigma 2}\, y_3^{\sigma 3} \ldots y_n^{\sigma n}$ disebut struktur sikel dari permutasi, dengan $y_1^{\sigma I}$ adalah terdapat σi sikel dengan panjang i .

Contoh 10 :

Berdasarkan contoh 9 diketahui permutasi (a d e b g) (c f) (h) (i) tipe permutasinya (2,1,0,0,1,0,0,0,0) maka, jumlah elemen permutasi adalah :

$$1.2 + 2.1 + 3.0 + 4.0 + 5.1 + 6.0 + 7.0 + 8.0 + 9.0 = 9$$

dan struktur sikel dari permutasinya adalah $y_1^2 y_2^1 y_3^0 y_4^0 y_5^1 y_6^0 y_7^0 y_8^0 y_9^0 = y_1^2 y_2^1 y_5^1$.

2.3. Grup dan Grup permutasi

Definisi 9 :

Misal H adalah himpunan yang tidak kosong. Suatu operasi biner * dalam H adalah suatu aturan yang menentukan setiap pasangan $x,y \in H$ tepat pada satu elemen $x * y \in H$.

Contoh 11 :

Diketahui : R = himpunan bilangan Riil didefinisikan * dengan aturan $x * y = xy$ untuk setiap $x,y \in R$ maka

3 dan 5 dalam R, $3*5 = 15 \in R$

6 dan 7 dalam R, $6*7 = 42 \in R$ dan seterusnya.

Definisi 10 :

Setiap grup G adalah suatu himpunan G dengan suatu operasi * dalam G memenuhi sifat-sifat :

1. tertutup : untuk setiap a,b dalam G maka $a*b = c$ dengan $c \in G$
2. assosiatif : untuk setiap a,b,c dalam G berlaku $a*(b*c) = (a*b)*c$
3. terdapat elemen e dalam G yang memenuhi $e*a = a*e = a$. e disebut elemen identitas untuk setiap $a \in G$.
4. setiap elemen $a \in G$ mempunyai invers, yaitu $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$. elemen a^{-1} disebut elemen invers dari a.

Definisi 11 :

Suatu grup permutasi P dari himpunan berhingga A adalah himpunan permutasi-permutasi dari elemen dalam A yang membentuk suatu grup di bawah operasi penggandaan.

Definisi 12 :

Order suatu grup permutasi P dimaksudkan sebagai banyak anggota dari P dan ditulis $|P|$.

Contoh 12 :

Diketahui : A = {a, b} dalam P = {x, y} dengan

$x = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ dan $y = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ maka P adalah grup permutasi

sebab :

1. tertutup : misal $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in P$

2. asosiatif : misal untuk $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \in P$ maka

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \text{dan}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \in P$$

3. terdapat elemen identitas yaitu $e = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \in P$

4. setiap elemen dalam P mempunyai invers

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \text{ inversnya} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ inversnya} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

jadi grup permutasi dari himpunan A dengan order grup $|P| = 2$.

2.3.1. Klas ekuivalensi pada grup permutasi

Definisi 13 :

Misal D = $\{d_1, d_2, d_3, \ldots d_n\}$ dan R = $\{ r_1, r_2, r_3, \ldots r_n)$ P grup permutasi yang bekerja pada himpunan D. Maka 2 fungsi $f_1 : D \rightarrow R$ dan $f_2 : D \rightarrow R$ disebut ekuivalen pada P jika terdapat $p \in P$ sedemikian sehingga $f_1.p = f_2$ dan ditulis $f_1 \sim f_2$

Ekuivalensi, sebagaimana pada definisi 13 Merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan R^D (himpunan semua fungsi dari D ke R). Relasi ini memenuhi sifat :

1. Refleksif.
2. Symetris.
3. Transitif.

Hal tersebut dapat ditunjukkan sebagai berikut :

ambil $f_i \in R^D$, $R^D = \{f \mid f : D \rightarrow R\}$ maka :

1. Sifat refleksif dipenuhi jika $p_i \in P$ adalah elemen identitas maka $f_i \,.\, p_i = f_j$ atau $f_i \sim f_j$ dengan f_i , $f_j \in R^D$.

2. Misal $f_i \sim f_j$ maka menurut definisi 13 terdapat $p_i \in P$ dengan $f_i \,.\, p_i = f_j$, untuk f_I, $f_j \in R^D$ jika p_i^{-1} elemen invers dari p_i maka $(f_i \,.\, p_i).p_i^{-1} = f_j \,.\, p_i^{-1}$ atau $f_i \,.\,(p_i \,.\, p_i^{-1}) = f_j \,.p_i^{-1}$, atau $f_I \,.\, p_I = f_j \,.\, p_i^{-1}$ dan $f_i = f_j \,.\, p_i^{-1}$. Karena $p_i^{-1} \in P$ maka $f_j \sim f_i$. Jadi jika $f_i \sim f_j$ maka $f_j \sim f_i$ atau sifat simetris dipenuhi.
3. Misal $f_i \sim f_j$ dan $f_j \sim f_k$, dengan f_I, f_j, $f_k \in R^D$ memenuhi definisi 13, terdapat p_I, $p_j \in P$ dengan $fi \,.p i = f_j$ dan $f_j \,.\, p_i = f_k$, maka $(f_I \,.\, p_i)p_j = f_k$ atau $f_i\,(p_i \,.\, p_j) = f_k$. misal $p_i \,.\, p_j = p_k$, maka $p_k \in P$ (Penggandaan Permutasi adalah tertutup) sehingga $f_i \,.\, p_k = f_k$ atau $f_i \sim f_k$. Jadi sifat transitif terpenuhi.

Contoh 13 :

Diketahui $D = \{ 1, 2, 3 \}$ himpunan titik-titik sudut segitiga sama sisi

$R = \{$ merah, hijau $\}$ himpunan warna merah dan hijau

$P = \{ p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 \}$ grup permutasi yang bekerja pada D, yang didefinisikan pada tabel.

$f = D \rightarrow R$ merupakan pemetaan dari D ke R atau suatu pewarnaan titik sudut segitiga sama sisi oleh warna merah dan hijau .

Tabel 2.1

Putaran	Bentuk permutasi	Struktur sikel	Jumlah
p_1	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}=(1)(2)(3)$	y_1^3	1
p_2	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}=(123)$	y_3^1	1
p_3	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}=(132)$	y_3^1	1
p_4	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}=(1)(23)$	$y_1^1y_2^1$	1
p_5	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}=(2)(13)$	$y_1^1y_2^1$	1
p_6	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}=(3)(12)$	$y_1^1y_2^1$	1

Banyak pemetaan adalah $2^3 = 8$

yaitu :

$$f_1:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\m & m & m\end{pmatrix};\ f_2:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\m & h & m\end{pmatrix};\ f_3:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\m & m & h\end{pmatrix};\ f_4:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\m & h & h\end{pmatrix};$$
$$f_5:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\h & h & h\end{pmatrix};\ f_6=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\h & h & m\end{pmatrix};\ f_7=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\h & m & h\end{pmatrix};\ f_8=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\h & m & m\end{pmatrix}$$

dapat ditunjukkan bahwa π_2 ekuivalen π_3 atau π_8 sebab

$$f_2\cdot p_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\m & h & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\m & m & h\end{pmatrix}=f_3 \text{ Jadi } f_2\sim f_3$$

$$f_2\cdot p_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\m & h & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\h & m & m\end{pmatrix}=f_8 \text{ Jadi } f_2\sim f_8$$

$$f_3 \cdot p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & m & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h & m & m \end{pmatrix} = f_8 \text{ Jadi } f_3 \sim f_8$$

sehingga f_2, f_3, f_8 saling ekuivalen. Demikian juga dengan langkah yang sama f_4, f_6, f_7 saling ekuivalen untuk $p_2, p_3 \in P$ sebab $f_4 \cdot p_2 = f_6$, , $f_4 \cdot p_3 = f_7$, $f_6 \cdot p_2 = f_7$.