BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Teori Probabilitas

Teori probabilitas bagi ruang sampel terhingga memberikan segugus bilangan nyata yang disebut pembobot atau probabilitas dengan nilai 0 sampai dengan 1, yang memungkinkan untuk menghitung probabilitas terjadinya suatu kejadian. Pada setiap titik sampel dalam ruang sampelnya, diberikan satu nilai probabilitas sedemikian sehingga jumlah semua probabilitas untuk semua titik sampelnya sama dengan 1. Bila ada sebuah titik sampel tertentu yang kemungkinannya sangat besar untuk terjadi pada suatu percobaan maka dapat diberikan probabilitas yang mendekati 1, sedangkan bila suatu titik sampel yang mempunyai kemungkinan sangat kecil untuk terjadi pada sebuah percobaan maka diberikan probabilitas yang mendekati 0.

Definisi 2.1 :

Himpunan semua kemungkinan hasil suatu percobaan disebut ruang sampel dan dilambangkan dengan T.

Definisi 2.2 :

Kejadian adalah suatu himpunan bagian dari ruang sampel.

Untuk menghitung probabilitas kejadian *A* yaitu dengan menjumlahkan probabilitas semua titik sampel yang menyusun kejadian *A*. Jumlah ini disebut probabilitas *A* dan dilambangkan dengan *P(A)*. Dengan demikian probabilitas himpunan kosong ($\varnothing$) adalah 0 dan probabilitas kejadian ruang sampel *(T)* adalah 1.

Definisi 2.3 :

Peluang suatu kejadian *A* adalah jumlah peluang semua titik sampel dalam *A*. Jadi

$$0 \leq P(A) \leq 1,\ P(\varnothing) = 0, \text{ dan } P(T) = 1.$$

Contoh 2.1 :

Sebuah mata uang dilantunkan dua kali, maka ruang sampel dari percobaan ini adalah

$T = \{MM, MB, BM, BB\}$ M = muka, B = belakang

Bila mata uang tersebut seimbang, maka tiap hasil mempunyai kemungkinan muncul yang sama. Karena itu tiap titik sampel diberi bobot p sehingga 4p = 1 atau p = ¼. Bila A menyatakan kejadian bahwa paling sedikit satu muka muncul, maka

$$A = \{MM, MB, BM\}$$

dan

$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Probabilitas terjadinya kejadian A bila diketahui bahwa suatu kejadian lain B telah terjadi disebut probabilitas bersyarat dan dilambangkan dengan $P(A|B)$. Lambang $P(A|B)$ dibaca "probabilitas terjadinya A bila B telah terjadi" atau "probabilitas A bila B diketahui".

Definisi 2.4 :

Probabilitas bersyarat A bila B diketahui dilambangkan dengan $P(A|B)$, didefinisikan sebagai:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ jika } P(B) > 0$$

Contoh 2.2 :

Peluang suatu penerbangan reguler berangkat tepat pada waktunya adalah $P(B)=$ 0,83, peluang penerbangan itu mendarat tepat pada waktunya adalah $P(A)=0{,}92$, dan peluang penerbangan itu mendarat dan berangkat tepat pada waktunya adalah $P(B \cap A)=0{,}78$. Hitung peluang bahwa suatu pesawat pada penerbangan itu:

a. mendarat tepat pada waktunya bila diketahui pesawat tersebut berangkat tepat pada waktunya.

b. berangkat tepat pada waktunya bila diketahui pesawat tersebut mendarat tepat pada waktunya.

Penyelesaian :

(a) Peluang bahwa pesawat mendarat tepat pada waktunya bila diketahui pesawat tersebut berangkat tepat pada waktunya adalah

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$$
$$= \frac{0,78}{0,83}$$
$$= 0,94$$

(b) Peluang bahwa pesawat berangkat tepat pada waktunya bila diketahui pesawat tersebut mendarat tepat pada waktunya adalah

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$
$$= \frac{0,78}{0,92}$$
$$= 0,85$$

Dua kejadian dianggap bebas jika probabilitas kejadian yang satu tidak dipengaruhi oleh kejadian yang lainnya.

Definisi 2.5 :

Dua kejadian A dan B dikatakan bebas bila

$$P(A|B) = P(A)$$

atau

$$P(B|A) = P(B)$$

Bila hal itu tidak dipenuhi, A dan B dikatakan tidak bebas.

Contoh 2.3 :

Percobaan pengambilan dua kartu berturut-turut dengan pengembalian, artinya setelah kartu diambil dan dicatat hasilnya maka kartu tersebut dikembalikan lagi. Misalkan ada 2 kejadian sebagai berikut

A: kartu pertama sebuah as

B: kartu kedua sebuah hati

Karena kartu pertama kemudian dikembalikan lagi, ruang sampel untuk pengambilan kartu kedua sama dengan ruang sampel untuk pengambilan kartu pertama sebesar 52 kartu, yang mempunyai 4 as dan 13 hati. Jadi

$$P(B|A) = \frac{13}{52} \quad \text{dan} \quad P(B) = \frac{13}{52}$$

2.2. Peubah Acak Kontinyu dan Distribusi Normal

2.2.1. Peubah Acak Kontinyu

Dalam beberapa keadaan percobaan, biasanya lebih menarik dengan hasil-hasil yang berupa bilangan. Sebagai contoh, dalam menggambarkan pelemparan koin dapat ditunjukkan beberapa bilangan riil x untuk setiap hasil a dari ruang sampel T, di mana X adalah fungsi tersebut. Daerah asal dari X adalah T, dan bilangan-bilangan dalam daerah hasil adalah bilangan-bilangan riil. Fungsi X disebut suatu peubah acak.

Definisi 2.6 :

Suatu fungsi yang nilainya berupa bilangan nyata yang ditentukan oleh setiap unsur dalam ruang sampel disebut peubah acak.

Contoh 2.4 :

Dua kelereng diambil berturut-turut tanpa pengembalian dari sebuah kantong yang berisi 4 kelereng merah (M) dan 3 kelereng hitam (H). Hasil-hasil percobaan yang mungkin berikut nilai x bagi peubah acak X yang menyatakan banyaknya kelereng merah yang terambil adalah :

Ruang sampel	Y
MM	2
MH	1
HM	1
HH	0

Peubah acak yang didefinisikan pada ruang sampel yang kontinyu disebut peubah acak kontinyu. Ruang sampel kontinyu adalah ruang sampel yang mengandung takhingga banyaknya titik sampel yang sama dengan banyaknya titik pada sebuah ruas garis.

Peubah acak kontinyu mempunyai probabilitas 0 jika diambil tepat salah satu nilainya. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut:

Contoh 2.5 :

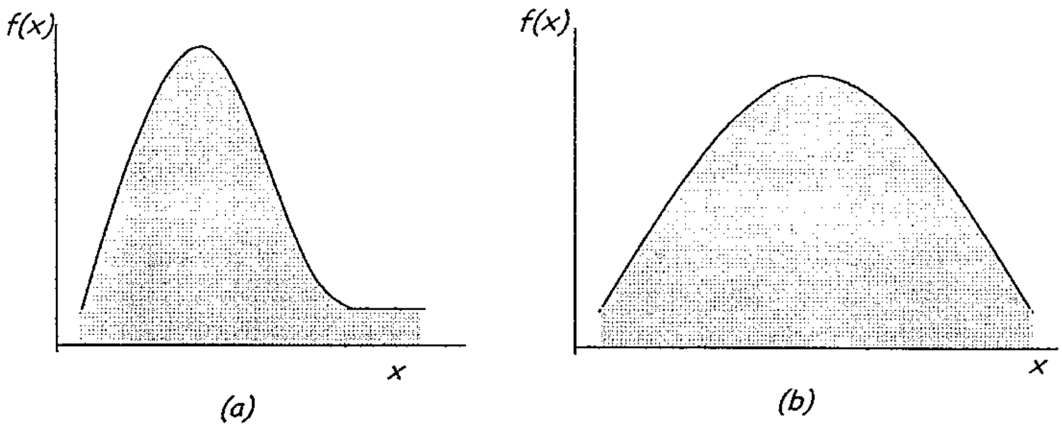
Misalnya peubah acak yang menyatakan tinggi badan antara dua nilai sembarang (ambil 163,5 dan 164,5 cm) dari semua orang yang berusia 20 tahun , terdapat takhingga banyaknya tinggi badan dan hanya satu nilai yang tepat 164 cm. Probabilitas mengambil secara acak orang yang tingginya tepat 164 cm, dan bukan salah satu diantara takhingga banyaknya tinggi badan yang sangat dekat dengan 164 cm tetapi yang tidak dapat lagi dibedakan oleh manusia adalah sangat kecil sekali. Sehingga diberikan probabilitas 0 pada kejadian tersebut. Tetapi tidak demikian halnya jika yang dibahas adalah probabilitas terambilnya seseorang yang tingginya sekurang-kurangnya 163 cm tetapi tidak lebih dari 165 cm.

Distribusi peluang peubah acak kontinyu dapat dinyatakan dalam bentuk rumus. Rumus tersebut merupakan fungsi nilai-nilai peubah acak kontinyu X, sehingga dapat digambarkan sebagai kurva kontinyu. Fungsi distribusi yang digambarkan oleh kurva tersebut disebut fungsi densitas probabilitas (fdp), atau lebih sering disebut fungsi densitas. Karena luas daerah yang dihasilkan oleh kurva tersebut akan digunakan untuk menyatakan probabilitas, dan probabilitas itu positif, maka fungsi densitas seluruhnya terletak di atas sumbu-x. Fungsi densitas dibuat sedemikian sehingga luas daerah dibawah kurva dan di atas sumbu-x sama dengan 1. Contoh bentuk fungsi densitas probabilitas terlihat dalam gambar 2.1.

Penghitungan probabilitas bagi peubah acak kontinyu seperti $P(a < X \leq b)$ adalah sebagai berikut :

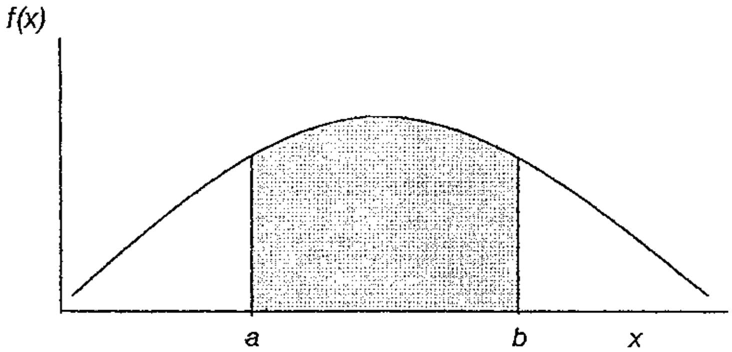
$$P(a < X \leq b) = P(a < X < b) + P(X = b)$$
$$= P(a < X < b)$$

Jadi tidak ada bedanya apakah titik ujung selang dimasukkan atau tidak.



Gambar 2.1
Contoh bentuk fungsi densitas probabilitas

Bila suatu fungsi densitas dinyatakan oleh kurva dalam gambar 2.2, maka probabilitas X mengambil nilai antara a dan b sama dengan luas daerah yang terletak antara $x = a$ dan $x = b$ di bawah fungsi densitasnya.



Gambar 2.2. *P(a<X<b)*

Definisi 2.7 :

Fungsi *f(x)* adalah fungsi densitas probabilitas peubah acak kontinyu *X*, yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$, jika

1. $f(x) \geq 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P\ (a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\ dx$

Definisi 2.8 :

Misalkan *X* adalah suatu peubah acak kontinyu dengan fungsi densitas *f(x)*. Rata-rata atau rataan dari *X* adalah

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Teorema 2.1 :

Jika *a* dan *b* konstanta, maka

$$\mu_{aX+b} = a\mu_X + b = a\mu + b$$

Bukti :

$$\begin{aligned}\mu_{aX+b} &= E(aX+b)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f(x)\ dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}axf(x)\ dx + \int_{-\infty}^{\infty}bf(x)\ dx\\ &= a\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\ dx + b\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\ dx\\ &= a\mu + b\end{aligned}$$

∇

Akibat 2.1 :

1. Jika $a = 0$, maka $\mu_b = b$.
2. Jika $b = 0$, maka $\mu_{aX} = a\mu$.

Definisi 2.9 :

Misalkan X adalah suatu peubah acak kontinyu dengan fungsi densitas $f(x)$ dan rata-rata $E(X) = \mu$. Variansi dari X adalah

$$\begin{aligned}\sigma^2 = V(X) &= E\{(X-\mu)^2\}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\ dx\end{aligned}$$

Teorema 2.2 :

Jika X suatu peubah acak kontinyu dan b konstanta , maka

$$\sigma^2_{X+b} = \sigma^2_X = \sigma^2$$

Bukti:

$$\begin{aligned}\sigma^2_{X+b} &= E\{[(X+b) - \mu_{X+b}]^2\}\\ &= E\{[(X+b) - (\mu+b)]^2\}\end{aligned}$$

$$= E[(X + b - \mu - b)^2]$$

$$= E[(X - \mu)^2]$$

$$= \sigma^2_X$$

$$= \sigma^2 \qquad \nabla$$

Teorema 2.3 :

Jika X suatu peubah acak kontinyu dan a konstanta , maka

$$\sigma^2_{aX} = a^2\,\sigma^2_X = a^2\,\sigma^2$$

Bukti:

$$\sigma^2_{aX} = E\{[aX - \mu_{aX}]^2\}$$

$$= E[(aX\text{-}a\mu)^2]$$

$$= a^2E[(X\text{-}\mu)^2]$$

$$= a^2\sigma^2_X$$

$$= a^2\sigma^2. \qquad \nabla$$

2.2.2. Distribusi Normal

Distribusi probabilitas kontinyu yang paling penting dalam bidang statistika adalah distribusi normal. Distribusi normal pertama kali disajikan secara matematik pada tahun 1733 oleh DeMoivre. Distribusi ini juga diperkenalkan oleh Laplace pada tahun 1775 dan kemudian dipublikasikan oleh Gauss pada tahun 1809. Oleh karena itu distribusi normal disebut juga distribusi

Gauss. Grafik dari distribusi normal yang disebut kurva normal, adalah kurva yang berbentuk seperti lonceng.

Definisi 2.10 :

Sebuah peubah acak *X*, disebut mempunyai sebuah distribusi normal dengan rata-rata μ $(-\infty < \mu < \infty)$ dan variansi $\sigma^2 > 0$, jika bentuk fungsi densitasnya adalah :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)\{(x-\mu)/\sigma\}^2} \qquad -\infty < X < \infty$$

Distribusi normal dapat dituliskan dengan notasi yang singkat $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ artinya bahwa peubah acak *X* berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan variansi σ^2.

Rata-rata dari distribusi normal dapat ditentukan dengan :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)\{(x-\mu)/\sigma\}^2} dx \qquad \text{misalkan } z = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mu + \sigma z) e^{-z^2/2}\, dz$$

$$= \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z e^{-z^2/2}\, dz$$

Karena bagian integral pertama adalah sebuah densitas normal dengan $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = 1$, nilai integral pertama adalah 1. Bagian integral kedua mempunyai nilai 0, yaitu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z e^{-z^2/2}\, dz = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

sehingga

$$E(X) = \mu\,[1] + \sigma\,[0] = \mu$$

Untuk menghitung variansi dengan cara :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E[(X-\mu)^2] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)\{(x-\mu)/\sigma\}^2}\,dx \qquad \text{misalkan } z = \frac{(x-\mu)}{\sigma} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz \\
&= \sigma^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz \right] \\
&= \sigma^2 \left[\left. \frac{-ze^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz \right] \\
&= \sigma^2 [0+1] \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

Definisi 2.11 :

Fungsi karakteristik $\varphi(.)$ dari peubah acak X didefinisikan oleh

$$\varphi(t) = E\left[e^{itX}\right]$$

Jika X berdistribusi normal dengan variansi σ^2 dan rataan μ

maka $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \right)$ $-\infty < x < \infty$, sehingga fungsi

karakteristik dari X adalah

$$E[e^{itx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(x-\mu)} e^{it\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= e^{it\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(x-\mu)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= e^{it\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i2t\sigma^2(x-\mu)-(x-\mu)^2)/2\sigma^2} dx$$

$$= e^{it\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(((x-\mu)-it\sigma^2)^2+t^2\sigma^2)/2\sigma^2} dx$$

$$= e^{it\mu} e^{-t^2\sigma^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-((x-\mu)-it\sigma^2)^2/2\sigma^2} dx$$

$$= e^{it\mu-\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

Teorema 2.4 : (Teorema limit pusat)

Misalkan X_1, X_2, X_3,... adalah peubah acak saling bebas dan berdistribusi identik. Jika $Y=(1/\sqrt{n})(X_1+X_2+\ldots+X_n)$ maka Y berdistribusi normal dengan rataan 0 dan variansi 1.

Bukti :

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{(1/\sqrt{n})(X_1+X_2+\cdots+X_n)}(t)$$
$$= \left[\varphi(t/\sqrt{n})\right]^n$$

$$\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + E\left(\cos\frac{tX}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{t^2X^2}{2n} + i\left(\sin\frac{tX}{\sqrt{n}} - \frac{tX}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

Untuk $u \in \mathrm{R}$, $\left|(\sin u - u)/u^2\right| \le 2$ dan $\underset{u \to \infty}{\operatorname{lim}it} \dfrac{\sin u - u}{u^2} = 0$

$$\left|\frac{\cos u - 1 + \frac{1}{2}u^2}{u^2}\right| = \left|\frac{-2\sin^2 \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2}{u^2}\right| \le \frac{2\left|\sin^2 \frac{1}{2}u\right| + \frac{1}{2}\left|u^2\right|}{u^2} \le 1$$

dan $\underset{u \to 0}{\operatorname{lim}it} \left|(\cos u - 1 + \frac{1}{2}u^2)/u^2\right| = 0$

Selanjutnya

$$E\left(\cos\frac{tX}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{t^2X^2}{2n}\right) = E\left(\frac{\cos\frac{tX}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{t^2X^2}{2n}}{\left(tX/\sqrt{n}\right)^2}\left(\frac{tX}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$$

$$= \frac{t^2}{n}E\left(\frac{\cos\frac{tX}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{t^2X^2}{2n}}{\left(tX/\sqrt{n}\right)^2}X^2\right)$$

Misalkan

$$p_1(n) = \frac{t^2}{n}E\left(\frac{\cos\frac{tX}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{t^2X^2}{2n}}{\left(tX/\sqrt{n}\right)^2}X^2\right), \qquad V = Z^2$$

$$U_n = \left(\frac{\cos\frac{tX}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{t^2X^2}{2n}}{\left(tX/\sqrt{n}\right)^2}\right), \qquad U_n(s) = \left(\frac{\cos\frac{tX(s)}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{t^2(X(s))^2}{2n}}{\left(tX(s)/\sqrt{n}\right)^2}\right)$$

$\underset{n \to 0}{\operatorname{lim}it} U_n(s) = 0$ maka $\underset{n \to \infty}{\operatorname{lim}it} E(U_nV) = 0$

sehingga $\underset{n \to \infty}{\operatorname{lim}it} p_1(n) = 0$

Dengan jalan yang sama, misalkan

$$U_n = \left(\frac{\sin\frac{tX}{\sqrt{n}} - t\frac{X}{\sqrt{n}}}{\left(tX/\sqrt{n}\right)^2} \right), \qquad V = X^2, \qquad p_2(n) = \left(\frac{\sin\frac{tX}{\sqrt{n}} - t\frac{X}{\sqrt{n}}}{\left(tX/\sqrt{n}\right)^2} X^2 \right)$$

maka $\displaystyle \lim_{n \to \infty} it \; p_2(n) = 0$

Sehingga $\varphi(\frac{t}{\sqrt{n}})$ dapat dituliskan menjadi

$$\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{t^2}{n} p_1(n) + \frac{it^2}{n} p_2(n)$$

$\displaystyle \lim_{n \to \infty} it \left[t^2 p_1(n) + it^2 p_2(n)\right] = 0$ dengan syarat $\displaystyle \lim_{n \to \infty} it \; p_1(n) = 0$

dan $\displaystyle \lim_{n \to \infty} it \; p_2(n) = 0$

$$\lim_{n \to \infty} it \; \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n \to \infty} it \left(1 + \frac{1}{n}\left\{-\frac{t^2}{2} + t^2[p_1(n) + ip_2(n)]\right\}\right)^n$$

$$= e^{-t^2/2}$$

Fungsi karakteristik $e^{-t^2/2}$ merupakan fungsi karakteristik yang dihasilkan oleh peubah acak yang mempunyai fungsi densitas $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ yaitu fungsi densitas dari distribusi normal dengan rataan 0 dan variansi 1. ∇

2.3 Ukuran Lebesgue

Misalkan ψ sebuah ukuran pada $\mathbb{R}^n$, jika ψ menyatakan bilangan non-negatif (mungkin ∞) untuk tiap-tiap himpunan bagian dari $\mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga:

(a) $\psi(\varnothing)=0$

(b) $\psi(A) \leq \psi(B)$ jika $A \subset B$

(c) Jika $A_1, A_2, A_3, \ldots$ adalah barisan terbatas dari himpunan-himpunan, maka

$$\psi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \psi(A_i)$$

jika A_i merupakan himpunan-himpunan terpisah, maka

$$\psi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi(A_i)$$

$\psi(A)$ disebut sebagai ukuran dari himpunan A, dan diasumsikan bahwa $\psi(A)$ adalah besarnya himpunan A.

Contoh 2.6 : (Ukuran Lebesgue)

Ukuran Lebesgue pada $\mathbb{R}$ memberikan gagasan tentang panjang untuk himpunan-himpunan bagian dari $\mathbb{R}$. Untuk interval buka dan tutup $£(a,b)= £[a,b]=b\text{-}a$. Jika $A=\bigcup_i [a_i,b_i]$ adalah terbatas atau gabungan terhitung dari interval-interval terpisah maka $£(A)=\sum_i (b_i - a_i)$ sebagai panjang dari A . Sehingga ukuran Lebesgue pada $\mathbb{R}$ didefinisikan sebagai:

$$\pounds(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i, b]\right\}$$

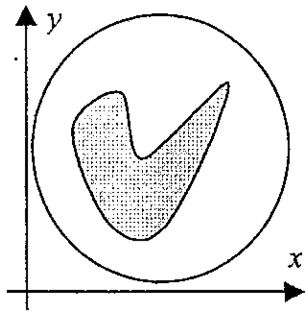
Jika $A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$ adalah koordinat bangun ruang pada $\mathbb{R}^n$, volume dimensi-n dari A diberikan dengan $\mathrm{vol}^n(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_n - a_n)$ maka ukuran Lebesgue dimensi-n merupakan perluasan volume dimensi-n yaitu :

$$\pounds^n(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{vol}^n(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right\}$$

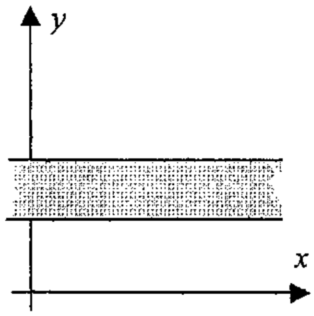
Dari definisi tersebut didapatkan bahwa $\pounds^n(A) = \mathrm{vol}^n(A)$, $\pounds^2(A)$ = luasan A, $\pounds^3(A)$ = vol A.

2.4. Himpunan *Self-Similar*

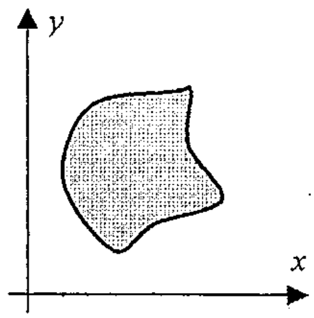
Himpunan bagian tertutup dan terbatas dari bidang Euclid ($\mathbb{R}^2$) dikatakan *self-similar* jika himpunan tersebut dapat disajikan dalam bentuk $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup \ldots \cup L_k$ di mana L_1, L_2, L_3, ..., L_k adalah himpunan-himpunan yang tidak tumpang tindih (*nonoverlapping*), masing-masing kongruen dengan L yang diskala dengan faktor s.



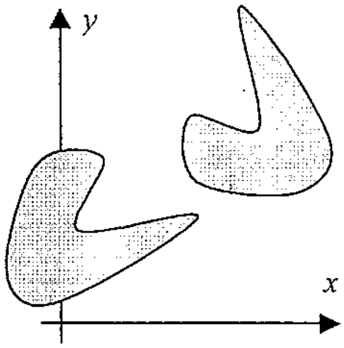
Himpunan terbatas



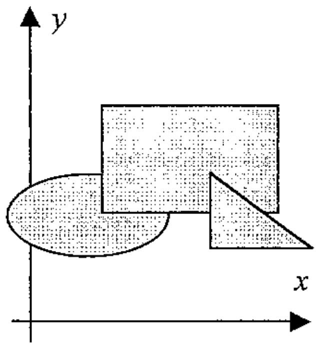
Himpunan tak terbatas



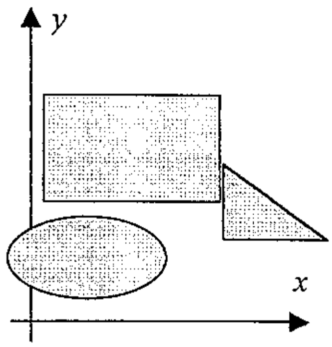
Himpunan tertutup



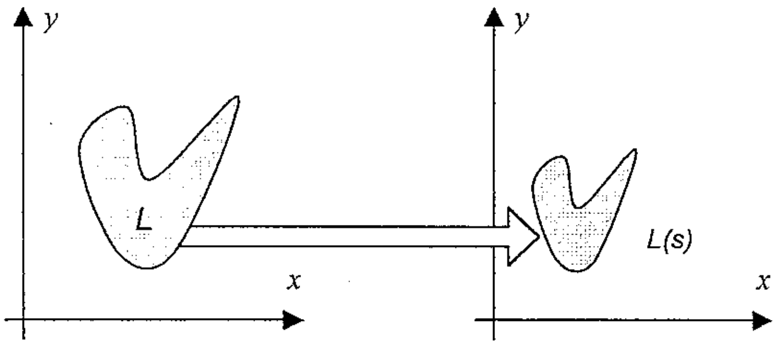
Himpunan kongruen



Himpunan overlapping



Himpunan nonoverlapping



Himpunan T diskala dengan s

Contoh 2.7 :

Sebuah ruas garis dalam $\mathbb{R}^2$ (gambar *a*) dapat disajikan dari gabungan 2 ruas garis yang kongruen dan tidak tumpang tindih (gambar *b*). Tiap-tiap ruas garis yang lebih kecil adalah kongruen terhadap ruas garis yang asli yang diskala dengan ½. Di sini ruas garis adalah himpunan self-similar dengan k=2 dan s=½.

(a)

(b)

2.5. Dimensi Hausdorff dari Himpunan *Self-Similar*.

Pada tahun 1919 seorang matematikawan Jerman bernama Felix Hausdorff(1868 -1942) memberikan definisi dimensi dari himpunan *self-similar*.

Definisi 2.12:

Dimensi Hausdorff dari himpunan self-similar L dinotasikan dengan $\dim_H(L)$ dan didefinisikan dengan

$$\dim_H(L) = \frac{\log k}{-\log s}$$

Contoh 2.8 :

Pada contoh sebelumnya yaitu ruas garis (a) dapat dibentuk dari 2 ruas garis (b) yang kongruen dengan (a). Diketahui bahwa k=2 dan s=½, maka

$$\begin{aligned} \dim_H(L) &= \frac{\log k}{-\log s} \\ &= \frac{\log 2}{-\log 2^{-1}} \\ &= 1 \end{aligned}$$