BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Pengertian Graph

Definisi 2.1

Suatu graph G(V,E) terdiri atas himpunan titik-titik V yang tidak kosong secara bersama-sama dengan himpunan E yang anggotanya berupa garis tidak berarah dengan bentuk pasangan (i,j) dengan $i,j \in V$.

Titik-titik i dan j kemudian dinamakan ujung dari (i,j). Garis (i,j) dihubungkan dari titik i ke titik j dan (i,j) ini dikatakan incident dengan titik i dan j atau sebaliknya titik i dan j incident dengan (i,j).

Bila graph G(V,E) dinyatakan secara geometris, titik-titiknya digambarkan dengan lingkaran kecil dan sepasang titik i dan j dihubungkan dengan garis lengkung atau garis lurus dari titik i ke titik j jika hanya jika $(i,j) \in E$.

Definisi 2.2

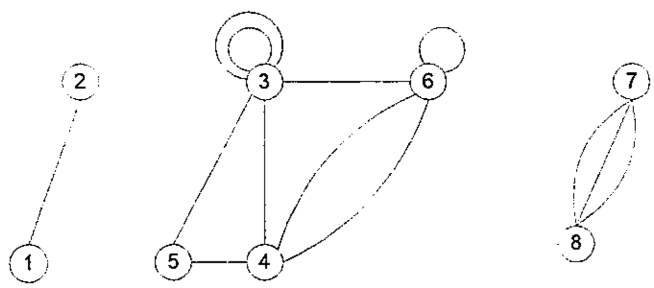
Garis paralel dari suatu graph G(V,E) adalah garis yang dihubungkan oleh titik i dan j lebih dari satu kali dengan bentuk $(i,j)_1,(i,j)_2,\ldots,(i,j)_k$, $k \geq 2$.

Definisi 2.3

Loop dari suatu graph G(V,E) adalah garis yang menghubungkan atau melingkari titik i atau titik j, dimana $i = j$.

Contoh 2.1

Pandang graph G(V,E) pada gambar 2.1, dimana V = {1,2,3,4,5,6,7,8}, E = {(1,2), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), $(4,6)_1$, $(4,6)_2$, $(3,3)_1$, $(3,3)_2$, (6,6), $(7,8)_1$, $(7,8)_2$, $(7,8)_3$} dari gambar 2.1. terdapat 2 garis paralel yang dihubungkan titik 4 dan 6, dan 3 garis paralel yang dihubungkan titik 8 dan 7. Pada titik 6 terdapat 1 loop dan 2 loop pada titik 3.



Gambar 2.1 Graph G(V,E)

Definisi 2.4

Derajat dari suatu titik i, dinotasikan dengan d(i),didefinisikan sebagai :

$$d(i) = 2n_s + n_n \qquad (2.1)$$

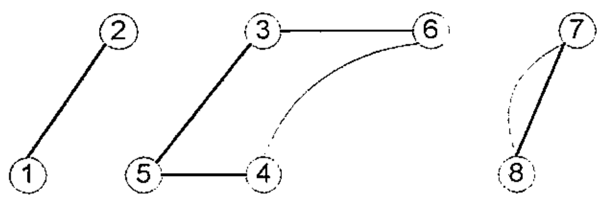
dimana n_s adalah jumlah loop yang incident dengan titik i dan n_n adalah jumlah garis selain loop yang incident dengan titik i.

Contoh 2.2

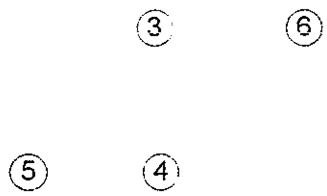
Pada gambar 2.1, d(3) = 2(2) + 3 = 7, dimana n_s = 2 dan n_n = 3.

Definisi 2.5

Subgraph dari sebuah graph G(V,E) adalah sebuah subgraph G_s (V_s ,E_s) dimana $V_s \subset V$, dan $E_s \subset E$.



(a)



(b)

Gambar 2.2. Beberapa Subgraph G_s (V_s,E_s) ;
(a) Subgraph G_s ; (b) Graph Null

Definisi 2.6

Suatu subgraph dikatakan graph null, jika E_s kosong atau subgraph tersebut tidak mempunyai garis, dinotasikan dengan simbol ϕ.

Contoh 2.3

Gambar 2.2(a) adalah Subgraph G_s (V_s ,E_s) dari Graph G (V,E), gambar 2.2(b) adalah Graph null.

Definisi 2.7

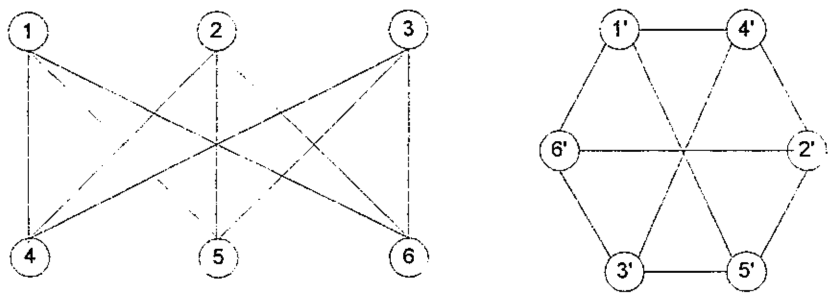
Dua graph G_1 dan G_2 disebut isomorphis jika terdapat korespondensi antara himpunan titik-titiknya dan korespondensi antara himpunan garis-garisnya sedemikian hingga korespondensi garis-garisnya incident dengan korespondensi titik-titiknya, dinotasikan $G_1 = G_2$.

Syarat dua graph isomorphis adalah :

1. Mempunyai jumlah titik dan garis yang sama.
2. Incident dari korespondensi garis dan titiknya tetap terpelihara.

Contoh 2.4

Dua graph $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ pada gambar 2.3 adalah isomorphis. Titik-titik $i \in V_1$ dan $i' \in V_2$ $(i = 1,2,\ldots,6)$ saling berhubungan. Jelas korespondensi garis-garisnya incident dengan korespondensi titik-titiknya tetap terpelihara.



(a) (b)

Gambar 2.3 Dua graph Isomorphis ; (a) G_1 ; (b) G_2

Definisi 2.8

Suatu barisan garis *(edge sequence)* dengan panjang *k-1*, $k \geq 2$ dalam suatu graph G adalah barisan garis terbatas dengan bentuk :

$$(i_1,i_2), (i_2,i_3),\ldots,(i_{k-1},i_k) \tag{2.2}$$

Barisan garis dikatakan tertutup jika $i_1 = i_k$, titik awal i_1 sama dengan titik akhir i_k , sebaliknya terbuka jika $i_1 \neq i_k$. Dalam suatu barisan garis, tidak semua titik berbeda dan garis yang sama dapat diulang.

Definisi 2.9

Suatu Train garis *(edge train)* adalah suatu barisan garis dimana semua garis yang muncul berbeda. Jadi, suatu train garis dapat melalui titik lebih dari sekali, tetapi tidak dapat melalui garis lebih dari sekali.

Contoh 2.5

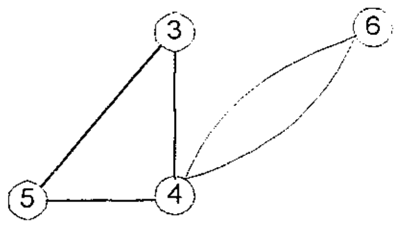
Pada gambar 2.4(a), barisan garis dari: (1,6), (6,3), (3,5), (5,3), (3,4), (4,1), (1,6), (6,2), (2,5) adalah barisan garis terbuka dengan panjang 9. Titik 1 adalah titik awal dan titik 5 adalah titik akhir, sedangkan barisan garis dari : (4,2), (2,6), (6,3),(3,5),(5,2), (2,6), (6,3), (3,5), (5,2), (2,4) adalah barisan garis tertutup dengan panjang 10, dimana $i_1 = i_k = 4$. Kemudian barisan garis dari : (1,6), (6,2),(2,5), (5,1), (1,4), (4,2) adalah train garis terbuka dengan panjang 6.

Definisi 2.10

Gabungan garis terpisah dari train garis *(edge disjoint union of edge train)* adalah kumpulan dari train garis sedemekian hingga tidak ada dua train garis yang mempunyai garis bersama-sama.

Contoh 2.6

Train garis dari (4,3), (3,5), (5,4), (4,6), (6,4)merupakan gabungan garis terpisah dari train garis (4,3), (3,5), (5,4) dan train garis (4,6), (6,4).



Gambar 2.4. Gabungan garis terisah dari train garis

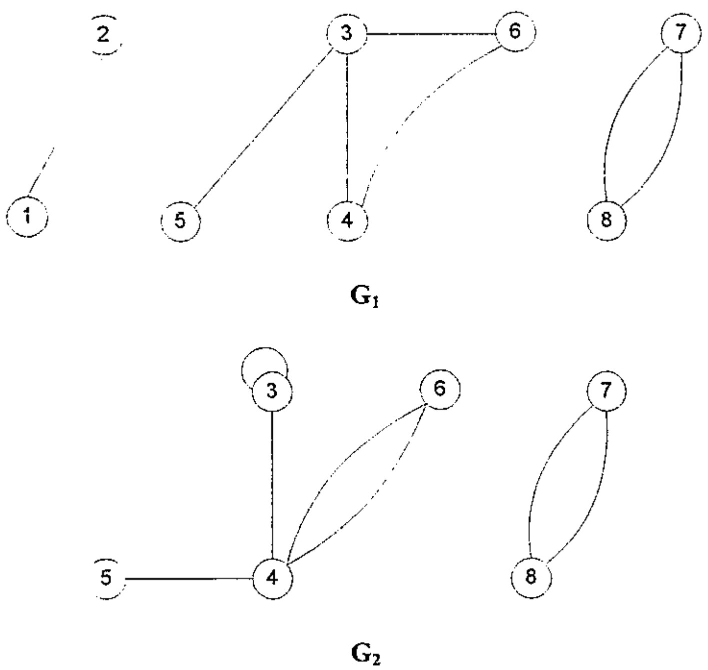
2.2. Operasi Pada Graph

Definisi 2.11

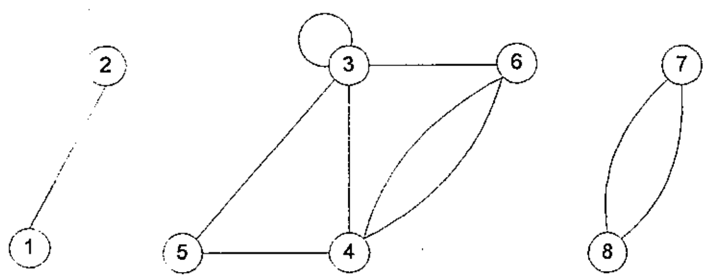
Jika $G_1(V_1,E_1)$ dan $G_2(V_2,E_2)$ adalah dua subgraph dari graph $G(V,E)$, maka gabungan dari subgraph G_1 dan G_2 merupakan subgraph G dengan himpunan titik $V_1 \cup V_2$ dan himpunan garis $E_1 \cup E_2$, dinotasikan $G_1 \cup G_2$.

Contoh 2.7

Pada gambar 2.5, Subgraph G_1 mempunyai himpunan garis : {(1,2), (3,5), (3,4), (3,6), (4,6), $(7,8)_1$, $(7,8)_2$} dan subgraph G_2 mempunyai himpunan garis : {(3,3), (3,4), (4,5), $(4,6)_1$, $(4,6)_2$, $(7,8)_1$, $(7,8)_2$}. $G_1 \cup G_2$ = {(1,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), $(4,6)_1$, $(4,6)_2$, $(7,8)_1$,$(7,8)_2$}, ditunjukkan pada gambar 2.6.



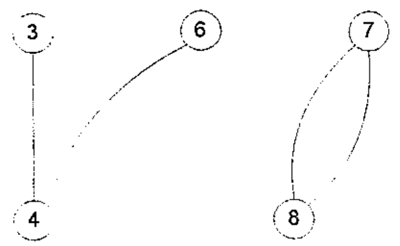
Gambar 2.5. Subgraph G_1 dan G_2 dari Graph G (V,E)



Gambar 2.6. $G_1 \cup G_2$

Definisi 2.12

Irisan dari subgraph G_1 dan G_2 adalah subgraph G dengan himpunan titik $V_1 \cap V_2$ dan himpunan garis $E_1 \cap E_2$, dinotasikan $G_1 \cap G_2$.



Gambar 2.7. $G_1 \cap G_2$

Contoh 2.8

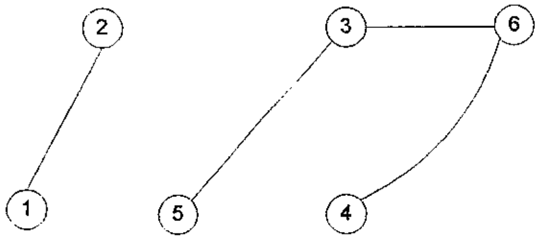
Subgraph $G_1 \cap G_2$ adalah $\{(3,4), (4,6)_1, (7,8)_1, (7,8)_2\}$ dan ditunjukkan pada gambar 2.7.

Definisi 2.13

Selisih dari subgraph G_1 dan G_2 adalah himpunan yang memuat semua garis yang ada dalam subgraph G_1 tetapi tidak memuat garis yang ada dalam subgraph G_2, dinotasikan $G_1 - G_2$.

Contoh 2.9

Subgraph $G_1 - G_2$ ditunjukkan pada gambar 2.8, dimana $G_1 - G_2 = \{(1,2), (3,5), (3,6), (4,6)\}$.



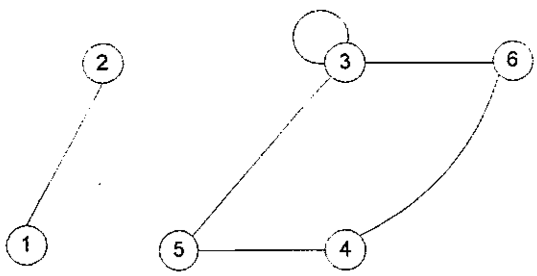
Gambar 2.8. $G_1 - G_2$

Definisi 2.15

Ring sum dari subgraph G_1 dan G_2 adalah himpunan yang memuat garis yang ada dalam subgraph G_1 atau G_2 tetapi tidak memuat garis yang ada dalam kedua subgraph G_1 dan G_2, dinotasikan $G_1 \oplus G_2$ dimana $G_1 \oplus G_2 = (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2)$.

Contoh 2.10

$G_1 \oplus G_2$ pada gambar 2.9.adalah = {(1,2), (3,3), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6)}.



Gambar 2.9. $G_1 \oplus G_2$

2.3. Graph Berarah

Definisi 2.15

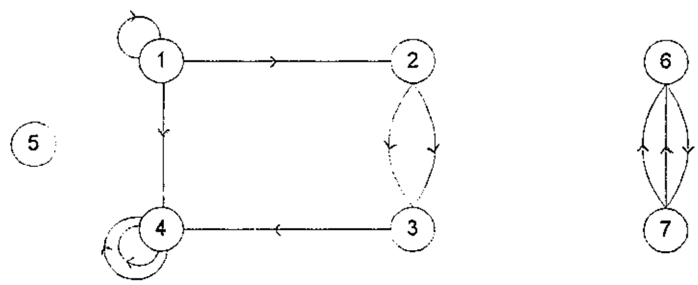
Suatu graph berarah $G_d(V,E)$ adalah suatu graph yang terdiri atas himpunan titik-titik V bersama-sama dengan himpunan E yang anggotanya berupa garis berarah yang dinyatakan dengan bentuk (i,j), dimana $(i,j) \in V$, untuk selanjutnya graph berarah $G_d(V,E)$ disebut digraph G_d dan garis berarahnya disebut garis.

Definisi 2.16

Garis paralel dari suatu digraph G_d adalah garis yang dihubungkan oleh titik i dan j lebih dari satu kali dan di tulis $(i,j)_1,(i,j)_2,\ldots,(i,j)_k$, untuk $k \geq 2$.

Definisi 2.17

Loop dari suatu digraph G_d adalah garis yang menghubungkan atau melingkari titik awal i atau titik akhir j, dimana i = j.



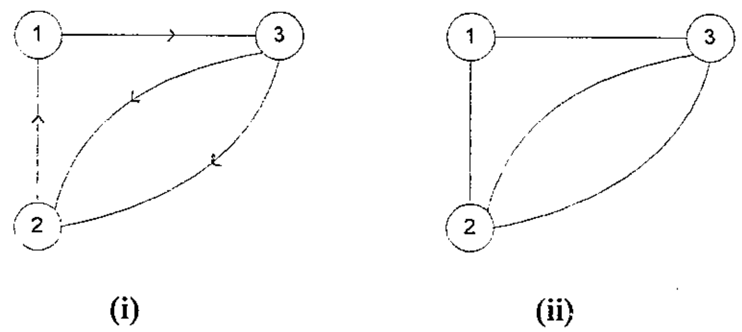
Gambar 2.10. Digraph G_d (V,E)

Contoh 2.11

Gambar 2.10, adalah digraph G_d (V,E), dimana V = {1,2,3,4,5,6,7} dan E = (1,1), (1,2), (1,4), $(2,3)_1$, $(2,3)_2$, $(4,4)_1$, $(4,4)_2$, $(6,7)_1$, $(7,6)_1$, $(7,6)_2$}. Garis $(2,3)_1$, $(2,3)_2$, $(4,4)_1$,$(4,4)_2$,$(6,7)_1$,$(7,6)_1$,$(7,6)_2$ adalah garis paralel. Garis (1,1), $(4,4)_1$, $(4,4)_2$ adalah loop.

Definisi 2.18

Pada digraph G_d , suatu Associated undirected graph G_u dibentuk dari himpunan garis yang sama dengan himpunan titik dan garis pada digraph G_d dengan menghilangkan arah dari garis pada digraph G_d.



Gambar 2.11. (i) Digraph G_d (ii) Associated Undirected Graph G_u

Contoh 2.12

Pada gambar 2.11, Associated undirected graph G_u dibentuk dari digraph G_d.

Definisi 2.19

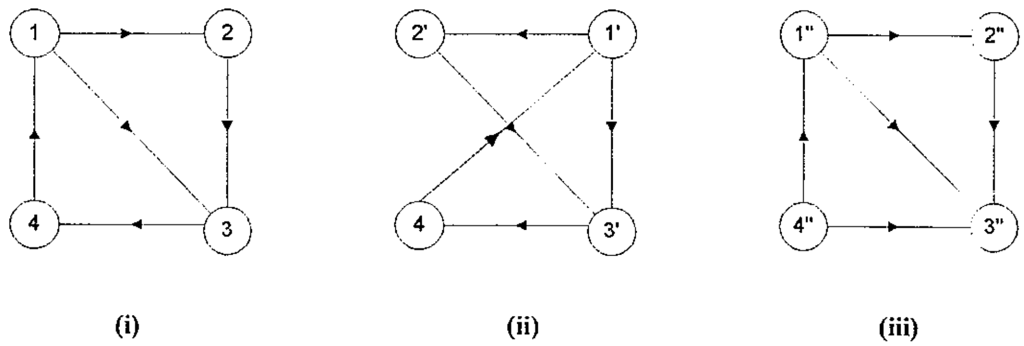
Dua digraph $G_d(V,E)$ dan $G'_d(V',E')$ dikatakan isomorphis jika :

1. Associated undirected graphnya isomorphis.
2. Arah dari garis-garis yang berkorespondensi terpelihara untuk korespondensi dari associated undirected graphnya.

Dengan kata lain G_d dan G'_d adalah dua digraph yang isomorphis, dimana masing-masing titiknya 1,2,..., n dan 1′,2′,..., n′ sedemikian hingga untuk beberapa titik i dan j, garis (i,j) ada dalam G_d jika hanya jika garis (i′,j′)ada dalam G'_d.

Contoh 2.13

Digraph G_d dan G'_d pada gambar 2.12 adalah dua digraph yang isomorphis, karena associated undirected graphnya isomorphis dan arah dari garis-garis yang berkorespondensi terpelihara. Garis pada digraph G_d adalah (1,2), (2,3), (3,4), (4,1) dan (1,3) sedangkan garis pada digraph G'_d adalah (1′,2′), (2′,3′), (3′,4′), (4′,1′) dan (1′,3′). Digraph G_d dan G''_d tidak isomorphis, karena arah dari garis-garis yang berkorespondensi tidak terpelihara. Garis pada digraph G_d adalah (1,2), (2,3), (3,4), (4,1) dan (1,3) sedangkan garis pada digraph G''_d adalah (1′,2′), (2′,3′), (4′,3′), (4′,1′) dan (1′,3′). Dari sini terlihat bahwa pada digraph G_d, arah garis dari titik 3 ke titik 4 sedang pada digraph G''_d arah garis dari titik 4′ ke titik 3′.



Gambar 2.12 Graph Isomorphis (i) G_d , (ii) G'_d , (iii) G''_d

Definisi 2.20

Barisan garis berarah *(directed edge sequence)* dari suatu digraph G_d adalah suatu barisan garis dengan bentuk (i_1,i_2), $(i_2,i_3),\ldots,(i_{k-1},i_k)$ mempunyai panjang k-1, $k \geq 2$.

Barisan garis berarah dikatakan tertutup jika $i_1 = i_k$, titik awal i_1 sama dengan titik akhir i_k , sebaliknya terbuka jika $i_1 \neq i_k$.

Definisi 2.21

Train garis berarah *(directed edge train)* adalah suatu barisan garis berarah dalam digraph G_d dimana semua garis yang muncul berbeda.

Jadi, suatu train garis berarah dapat melalui titik lebih dari sekali, tetapi tidak dapat melalui garis lebih dari sekali.

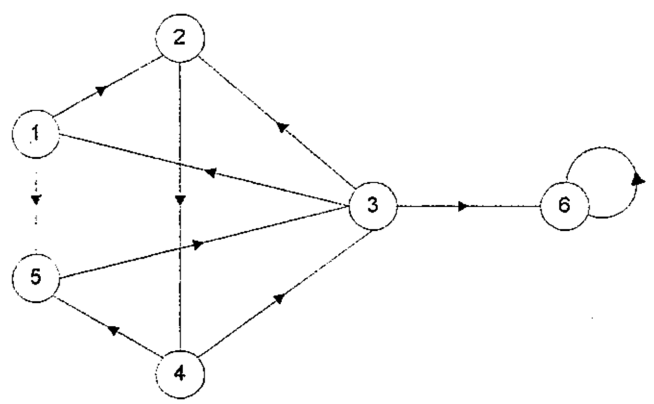
Contoh 2.14

Barisan garis dari (1,2), (2,4), (4,3), (3,1), (1,5), (5,3), (3,2), (2,4), (4,3), (3,6) pada gambar 2.13 adalah barisan garis berarah dengan panjang 10.

Kemudian barisan garis dari (1,2), (2,4), (4,3) adalah barisan garis berarah terbuka dengan panjang 3. Titik 1 adalah titik awal dan titik 3 adalah titik tujuan, sedangkan barisan garis dari : (5,3), (3,1), (1,5) adalah barisan garis tertutup dengan panjang 3, dimana $i_1 = i_k = 5$. Barisan garis berarah dari : (1,2), (2,4), (4,3), (3,1), (1,5), (5,3), (3,6), (6,6) adalah train garis berarah terbuka dengan panjang 8.

Definisi 2.22

Derajat keluar *(outgoing degree)* dari titik dalam digraph G_d adalah banyaknya garis dari digraph G_d yang mempunyai titik awal i, ditulis $d^+(i)$.



Gambar 2.13. Digraph G_d

Definisi 2.23

Derajat masuk *(incoming degree)* dari titik dalam digraph G_d adalah banyaknya garis dari digraph G_d yang memiliki titik i sebagai titik akhir, dinotasikan $d^-(i)$.

Contoh 2.15

Pada gambar 2.13 , derajat keluar dari digraph G_d adalah :

$d^+(1) = 2 \qquad d^+(4) = 2$

$d^+(2) = 1 \qquad d^+(5) = 1$

$d^+(3) = 3 \qquad d^+(6) = 1$

kemudian derajat masuknya adalah :

$d^-(1) = 1 \qquad d^-(4) = 1$

$d^-(2) = 2 \qquad d^-(5) = 2$

$d^-(3) = 2 \qquad d^-(6) = 2$

Jadi masing-masing titik dalam digraph G_d memiliki derajat keluar maupun derajat masuk, jika d(i) menyatakan banyaknya garis berarah dalam digraph G_d yang berpangkal dititik i (sebagai titik awal atau titik akhir), maka :

$$d(i) = d^+(i) + d^-(i)$$

Untuk suatu digraph G_d jumlah seluruh derajat keluar $d^+(i)$ sama dengan jumlah seluruh derajat masuk $d^-(i)$ atau

$$\sum_{i=1}^{n} d^+(i) = \sum_{i=1}^{n} d^-(i)$$

Digraph pada gambar 2.13, mempunyai jumlah derajat keluar dan jumlah derajat masuk sama dengan 10. Dalam digraph G_d , pasangan derajat ditulis $[d^+(i) , d^-(i)]$ yang memuat derajat keluar dan derajat masuk pada setiap titik (i). Pada gambar 2.13, barisan dari pasangan derajat $[d^+(i) , d^-(i)]$ dengan i = 1,2,..., 6 adalah :

$$\{[d^+(i) , d^-(i)]\} = \{[2,1],[1,2],[3,2],[2,1],[1,2],[1,2]\}$$

2.4. Digraph (p,s)

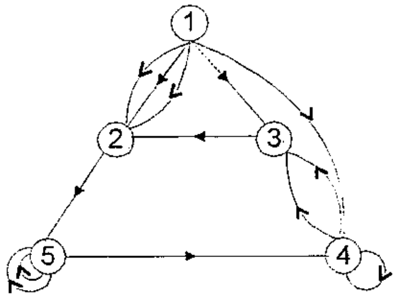
Dalam digraph G_d (V,E), jika X dan Y himpunan bagian dari V maka (X,Y) adalah himpunan garis paralel (x,y) dari titik x ke titik y dengan $x \in X$ ke $y \in Y$. Kemudian $\|(X,Y)\|$ menyatakan jumlah garis dalam (X,Y) dan $\|(x,y)\|$ menyatakan jumlah garis paralel dari titik x ke titik y dengan $(x,y) \in E$.

Definisi 2.24

Suatu digraph (p,s) adalah digraph G_d (V,E) dimana p adalah jumlah maksimum garis paralel dari titik x ke titik y, atau $\|(x,y)\| \leq p$,$\forall$ $(x,y) \in E$, $x \neq y$, dan s adalah jumlah maksimum loop dari graph berarah G_d atau $\|(x,x)\| \leq s$, $\forall$ $x \in V$, untuk p dan s bilangan bulat posistif.

Contoh 2.16

Pada gambar 2.14, digraph G_d (V,E) dengan V = { 1, 2, 3, 4, 5 }dan E = $\{(1,2)_1, (1,2)_2, (1,2)_3, (1,4), (2,5), (3,1), (3,2), (4,3)_1, (4,3)_2, (4,4), (5,4), (5,5)_1, (5,5)_1\}$. Karena (X,Y) merupakan himpunan garis paralel (x,y), maka $(X,Y) = \{(x,y)\} = \{(1,2)_1, (1,2)_2, (1,2)_3, (4,3)_1, (4,3)_2\}$ dengan X = {x} ={1,4}, Y = {y}= {2,3} dan $\|(X,Y)\| = 5$.



Gambar 2.14. Digraph (3,2)G_d

Garis paralel dari (1,2) adalah $(1,2)_1$, $(1,2)_2$, $(1,2)_3$ dengan x = 1 dan y = 2 , sehingga $\|(1,2)\| = 3$. Garis paralel dari (4,3) adalah $(4,3)_1$, $(4,3)_2$ dengan x = 4 dan y = 3 sehingga $\|(4,3)\| = 2$. Karena jumlah garis paralel dari (1,2) lebih besar dari jumlah garis paralel dari (4,3) maka jumlah maksimum garis paralel dalam digraph $G_d(V,E)$ adalah 3 atau p = 3. Hal ini dipenuhi oleh :

$$\|(x,y)\| \leq p, \quad (x,y) \in E, \quad x \neq y$$

$$\|(1,2)\| \leq p, \quad (1,2) \in E, \quad 1 \neq 2$$

$$3 \leq 3$$

dan

$$\|(4,3)\| \leq p, \quad (4,3) \in E, \quad 4 \neq 3$$

$$2 \leq 3$$

kemudian dalam digraph $G_d(V,E)$ terdapat 2 loop pada titik 5 yaitu $(5,5)_1$dan $(5,5)_2$, pada titik 4 terdapat 1 loop yaitu (4,4). Karena jumlah loop pada titik 5 lebih besar dari jumlah loop pada tiik 4, maka jumlah maksimum loop dalam digraph $G_d(V,E)$ adalah 2 atau s = 2. Hal ini dipenuhi oleh :

$$\|(x,x)\| \leq s, \quad x \in V$$

$$\|(5,5)\| \leq s, \; 5 \in V$$

$$2 \leq 2$$

dan

$$\|(4,4)\| \leq s, \; 4 \in V$$

$$1 \leq 2$$

Jadi digraph $G_d(V,E)$ adalah digraph (3,2).