BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Dasar-dasar Teori Graph

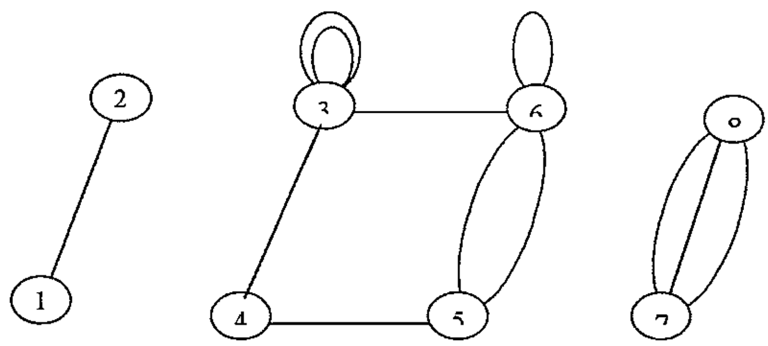
Definisi 2.1

Suatu graph G (V,E) terdiri dari himpunan berhingga tidak kosong dari elemen – elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu disebut garis. Himpunan titik graph G dinotasikan dengan V (G) dan himpunan garis G dinotasikan E (G).

Contoh 2.1.

Graph G (V, E) dengan V(G) = { 1,2,3, ..., 8}

E(G) = { (1,2),(3,4),(3,3),(3,3),(4,5),(3,6),(5,6),(6,5),(6,6),(7,8),(8,7),(7,8) }

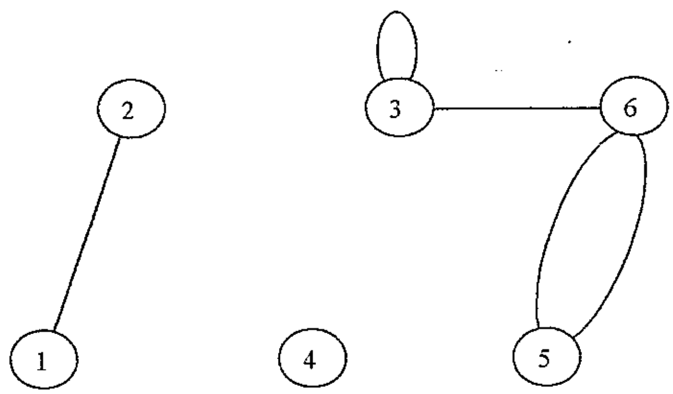


Gambar 2.1 Suatu graph G(V,E)

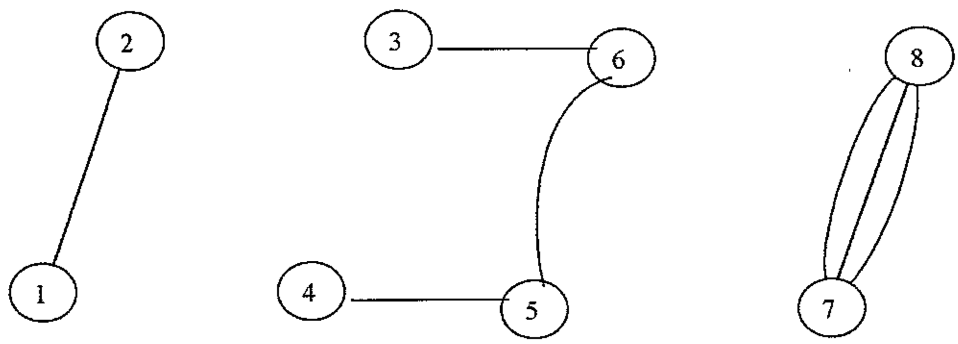
Definisi 2.2

Sebuah subgraph dari graph G (V,E) adalah sebuah graph Gs (Vs,Es) dengan Vs dan Es adalah subset dari V dan E. Jika Vs = V, maka subgraph tersebut disebut spanning subgraph dari G.

Dari gambar 2.2 dan gambar 2.3, dapat ditunjukkan sebagai subgraph dari graph gambar 2.1 dan khusus subgraph gambar 2.3 merupakan spanning subgraph.



Gambar 2.2 Salah satu subgraph dari graph pada gambar 2.1



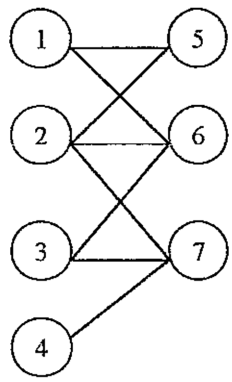
Gambar 2.3 Salah satu subgraph dari graph pada gambar 2.1 yang merupakan spanning subgraph

Definisi 2.3

Sebuah graph G (V,E) disebut Bipartite, jika himpunan titik-titik V dapat dibagi menjadi dua subset yang terpisah V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap garis dari graph G menghubungkan sebuah titik di V_1 ke sebuah titik di V_2 atau garis – garisnya mempunyai satu titik akhir di V_1 dan yang lain di V_2.

Contoh 2.2

Graph G (V,E) dengan V(G) = { 1,2,3, ...,7 } dapat dibagi menjadi V_1 dan V_2, sedemikian sehingga V_1 = {1,2,3,4}, V_2 = {5,6,7} dan E (G) = { (1,5), (1,6), (2,5), (2,6), (2,7), (3,6), (3,7), 4,7) }.



Gambar 2.4 Sebuah graph bipartite

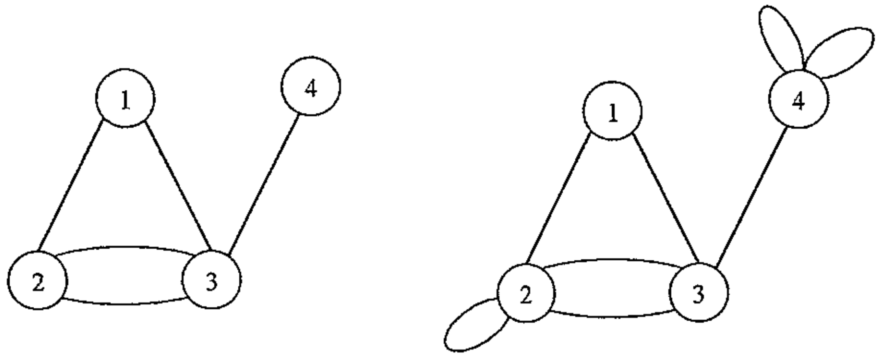
Definisi 2.4

Derajat (degree) sebuah titik i dalam graph dinotasikan dengan d(i) yaitu jumlah garis-garis yang incident dengan titik i atau banyaknya sisi yang bertemu pada titik i.

Contoh 2.3

Derajat titik graph G(V,E) pada gambar 2.5 (a) adalah :

d(1) = 2 d(2) = 3 d(3) = 4 d(4) = 1



Gambar 2.5 (a) Graph G(V,E) tanpa loop

(b) Graph G(V,E) yang memiliki loop

Untuk derajat suatu titik pada graph yang memiliki loop, perhitungan dilakukan dengan setiap loop menyumbang dua pada derajat titiknya.

Sebagai contoh derajat titik graph G(V,E) pada gambar 2.5 (b) adalah :

d(1) = 2 d(2) = 5 d(3) = 4 d(4) = 5

2.2. Masalah Subgraph dari Digraph

Definisi 2.5

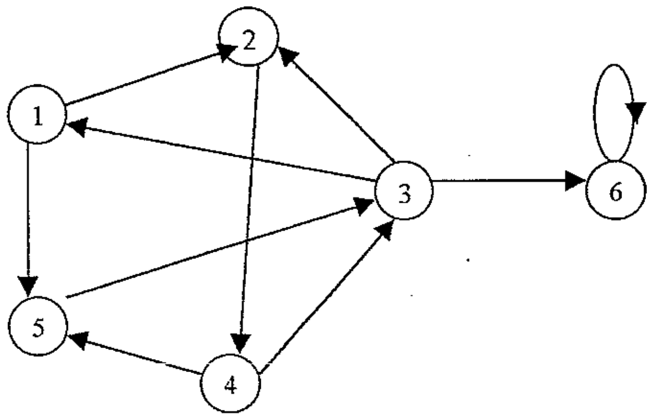
Sebuah graph G (V,E) disebut directed graph bila semua garis dalam graph mempunyai arah.

Definisi 2.6

Sebuah directed graph G (V,E) nilai d_H^+ dari garis-garis pada G memiliki titik i sebagai titik awal disebut *outgoing degree* dari i di G, dan angka d_H^- dari garis-garis pada G memiliki titik i sebagai titik akhir disebut *incoming degree* dari titik i dalam G. $[d_H^+, d_H^-]$, disebut pasangan derajat dari derajat i dalam G Jadi ada dua nilai yang didefinisikan untuk setiap titik dari G. Nilai-nilai itu kadang-kadang juga disebut derajat positif dan negatif dari sebuah titik.

Contoh 2.4

Digraph G(V,E) pada gambar 2.6 mempunyai barisan pasangan derajat $[d^+_H, d^-_H]$ adalah { [2,1], [1,2], [3,2], [2,1], [1,2], [1,2]}.



Gambar 2.6 Sebuah digraph G(V,E)

Dalam digraph G (V,E), jika X dan Y himpunan bagian dari V maka (X,Y) dinotasikan sebagai himpunan semua garis berarah (x,y) dari $x \in X$ ke $y \in Y$ dan jumlah dari titik dalam X dinotasikan dengan |X| sedangkan |(X,Y)| adalah notasi dari jumlah garis dalam (X,Y). Khususnya |(x,y)|=k, menunjukkan jumlah maksimum garis berarah dari titik x ke titik y dalam E.

Definisi 2.7

Sebuah digraph–(p,s) adalah directed graph G (V,E) dimana p adalah jumlah maksimum garis berarah dari titik x ke titik y atau $|(x,y)| \le p$ untuk semua $(x,y) \in E$, $x \neq y$ dan s adalah jumlah maksimum loop dari digraph G atau $|(x,x)| \le s$ untuk semua $x \in V$, dengan p dan s adalah integer nonnegatif.

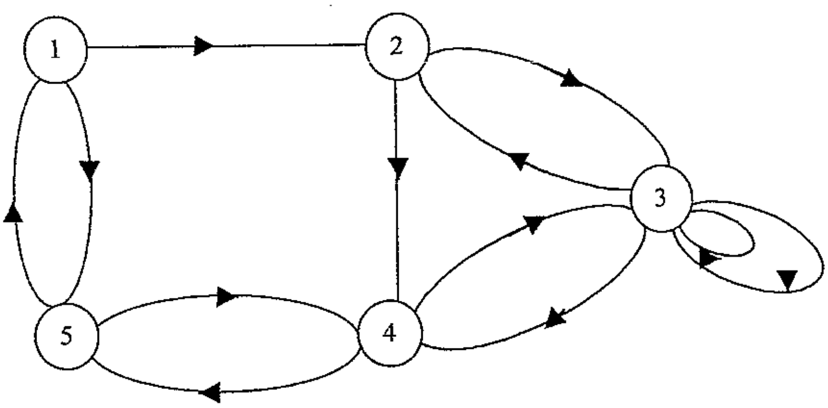
Contoh 2.5

Pada gambar 2.7, misal : X = {1,5}

Y = {2,3,4}

Maka (X,Y) = ({1,5}, {2,3,4}) = {(1,2),(5,4)}

Graph pada gambar 2.7 adalah directed graph-(1,2), karena jumlah maksimum garis berarah yang menghubungkan suatu titik ke titik yang lain adalah 1, dan jumlah maksimum dari self loop pada setiap titik adalah 2.



Gambar 2.7 Sebuah digraph-(1,2)

2.3. Jaringan

Jaringan G dinotasikan dengan G(V,E,c,f) merupakan suatu graph berarah dengan himpunan titik V, himpunan garis E, dimana masing-masing garis $(x,y) \in E$ mempunyai kapasitas garis c(x,y) dan nilai aliran f(x,y).

Kapasitas garis pada suatu jaringan G(V,E,c,f) merupakan suatu fungsi c dari himpunan garis E ke bilangan riil tidak negatif, dan aliran pada jaringan G(V,E,c,f) adalah suatu fungsi f dari E ke bilangan riil tidak negatif. Pada penyajian jaringan G(V,E,c,f), nilai fungsi c dan f secara berurutan akan dituliskan sebagai pasangan bilangan pada garis tersebut.

Definisi 2.8

Suatu pola aliran $\{f(x,y)\}$dikatakan fisibel dalam G(V,E,c,f) dan mempunyai nilai aliran f_{st} dari titik sumber s ke titik terminal t jika untuk setiap $x \in V$ terpenuhi :

$$\sum_y f(x,y) - \sum_y f(y,x) = f_{st}, \qquad x = s \qquad (2.1a)$$

$$= 0, \qquad x \neq s, t \qquad (2.1b)$$

$$= -f_{st}, \qquad x = t \qquad (2.1c)$$

$$c(x,y) \geq f(x,y) \geq 0, \qquad (i,j) \in E \qquad (2.2)$$

Definisi 2.9

Pada jaringan G(V,E,c,f), jika X dan Y sebagai subset tidak kosong dari V, maka didefinisikan :

$$(X,Y) = \{(x,y) \in E | x \in X, y \in Y\} \qquad (2.3)$$

Definisi 2.10

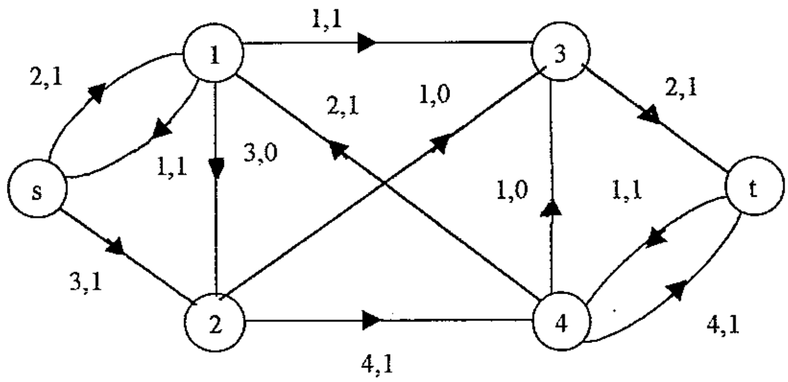
Nilai fungsi aliran f dan kapasitas c dari suatu himpunan garis (X,Y) pada jaringan G(V,E,c,f) didefinisikan :

$$f(X,Y) = \sum_{(x,y)\in(X,Y)} f(x,y) \qquad (2.4)$$

$$c(X,Y) = \sum_{(x,y)\in(X,Y)} c(x,y) \qquad (2.5)$$

Contoh 2.6

Diberikan jaringan G(V,E,c,f) sebagai berikut :



Gambar 2.8. Suatu jaringan G (V,E,c,f) dengan s adalah titik sumber dan t adalah titik terminal, dan titik-titik 1,2,3,4 adalah titik perantara.

Diperoleh :

c(s,1) = 2	c(1,s) = 1	c(s,2) = 3	c(3,t) = 2
c(1,2) = 3	c(1,3) = 1	c(2,3) = 1	c(4,t) = 4
c(2,4) =4	c(4,1) = 2	c(4,3) = 1	c(t,4) = 1

dan

f(s,1) = 1	f(1,s) = 1	f(s,2) = 1	f(3,t) = 1
f(1,2) = 0	f(1,3) = 1	f(2,3) = 1	f(4,t) = 1
f(2,4) = 1	f(4,1) = 1	f(4,3) = 0	f(t,4) = 1

Akan dihitung f(X,Y) dan c(X,Y) dalam jaringan tersebut untuk :

(i) X = {s,1,2} dan Y = {3,4,t}

(ii) X = {3,4,t} dan Y = {s,1,2}

Penyelesaian :

(i) Untuk $X = \{s,1,2\}$ dan $Y = \{3,4,t\}$, diperoleh :

$$(X,Y) = \{(1,3), (2,3), (2,4)\}$$

$$f(X,Y) = f\{(1,3), (2,3), (2,4)\}$$

$$= f(1,3) + f(2,3) + f(2,4)$$

$$= 1 + 0 + 1 = 2$$

$$c(X,Y) = c\{(1,3), (2,3), (2,4)\}$$

$$= c(1,3) + c(2,3) + c(2,4)$$

$$= 1 + 1 + 4 = 6$$

(ii) Untuk $X = \{3,4,t\}$ dan $Y = \{s,1,2\}$, diperoleh :

$$(X,Y) = \{(4,1)\}$$

$$f(X,Y) = f(4,1) = 1$$

$$c(X,Y) = c(4,1) = 2$$

2.4. Potongan-potongan s-t

Definisi 2.11

Potongan dari s ke t (s-t cut) pada jaringan G (V,E,c,f) adalah himpunan garis $(X,\overline{X})$ dengan $s \in X$ dan $t \in \overline{X}$ dimana X subset dari V dan $\overline{X} = V - X$

Definisi 2.12

Himpunan potong dari s ke t (s-t cutset) pada jaringan G (V,E,c,f) adalah minimal himpunan garis $(X,\overline{X})$ dengan $s \in X$ dan $t \in \overline{X}$ dimana X subset dari V dan $\overline{X} = V - X$, dan jika dihapus akan mematahkan semua path berarah dari s ke t.

Dari definisi 2.11 dan definisi 2.12, dapat dikatakan bahwa suatu s-t cut belum tentu merupakan suatu s-t cutset, tetapi setiap s-t cutset pasti merupakan s-t cut.

Definisi 2.13

Kapasitas pada suatu s-t cut $(X,\overline{X})$ dalam jaringan G (V,E,c,f) didefinisikan :

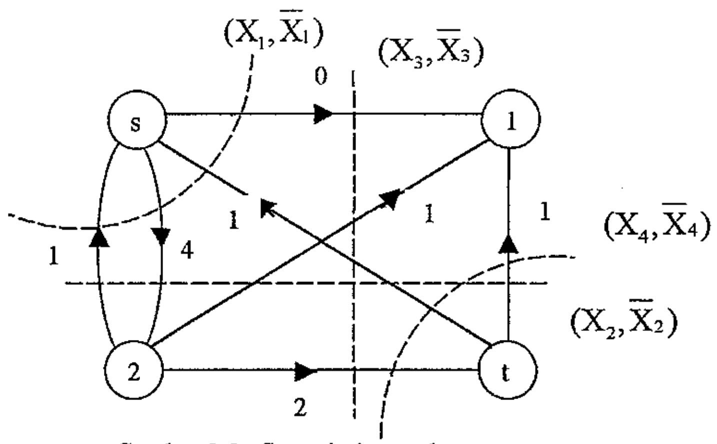
$$c(X,\overline{X}) = \sum_{(x,y)\in(X,\overline{X})} c(x,y)$$

Definisi 2.14

Kapasitas suatu s-t cutset Q dalam G didefinisikan dengan :

$$C(Q) = \sum_{(x,y)\in Q} c(x,y)$$

Contoh 2.7



Gambar 2.9. Suatu jaringan dengan empat s-t cut

Jaringan pada gambar 2.9 tersebut mempunyai empat s-t cut sebagai berikut :

$$(X_1, \overline{X}_1) = (s, \{1,2,t\}) = \{(s,1),(s,2)\}$$

$$(X_2, \overline{X}_2) = (\{s,1\}, \{2,t\}) = \{(s,2)\}$$

$$(X_3, \overline{X}_3) = (\{s,2\}, \{1,t\}) = \{(2,t),(2,1),(s,1)\}$$

$$(X_4, \overline{X}_4) = (\{s,1,2\}, t) = \{(2,t)\}$$

dengan nilai kapasitasnya adalah :

$$c(X_1, \overline{X}_1) = c(s,1) + c(s,2) = 4$$

$$c(X_2, \overline{X}_2) = c(s,2) = 4$$

$$c(X_3, \overline{X}_3) = c(2,t) + c(2,1) + c(s,1) = 3$$

$$c(X_4, \overline{X}_4) = c(2,t) = 2$$

Selanjutnya terdapat dua s-t cutset $Q_1 = (X_2, \overline{X}_2)$ dan $Q_2 = (X_4, \overline{X}_4)$ dengan nilai kapasitasnya

$$c(Q_1) = c(s,2) = 4$$

$$c(Q_2) = c(2,t) = 2$$

2.5. Transformasi Dasar (p,s) Invarian–d

Definisi 2.15

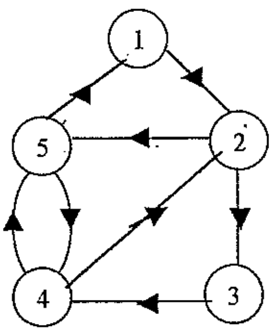
Dua subgraph-(p,s) atau digraph–(p,s) dikatakan invarian–d jika kedua digraph tersebut mempunyai barisan pasangan derajat (degree) sama dari setiap titiknya.

Satu implikasi dari invarian–d adalah jika dua digraph (p,s) dinamakan tidak invarian–d, maka tidak ada hubungan satu-satu antara himpunan titik sedemikian sehingga menghubungkan titik-titik yang mempunyai pasangan derajat yang sama.

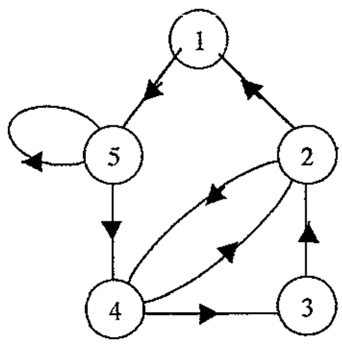
Contoh 2.8

Contoh terlihat pada gambar (2.10) dan gambar (2.11)

Digraph tersebut dikatakan invarian–d karena memiliki barisan pasangan derajat sama dari masing-masing titik. Barisan derajatnya adalah {[1,1], [2,2], [1,1], [2,2], [2,2]}.



Gambar 2.10. Suatu digraph G(V,E)



Gambar 2.11. Suatu digraph G(V,E)

Definisi 2.16

Dalam sebuah digraph G(V,E) jika terdapat dua garis (i_1,i_2) dan (j_1,j_2), $i_1 \neq j_1$, $i_2 \neq j_2$, sedemikian sehingga

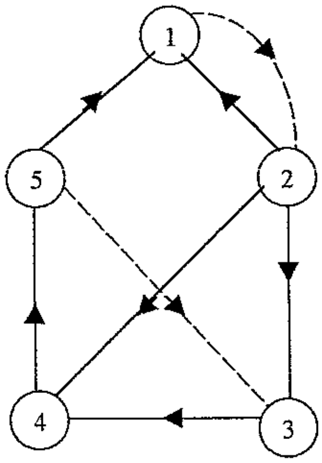
$$|(i_1,j_2)| < p \quad i_1 \neq j_2 \,; \qquad |(j_1,i_2)| < p \quad j_1 \neq i_2$$

$$|(i_1,j_2)| < s \quad i_1 = j_2 \,; \qquad |(j_1,i_2)| < s \quad j_1 = i_2$$

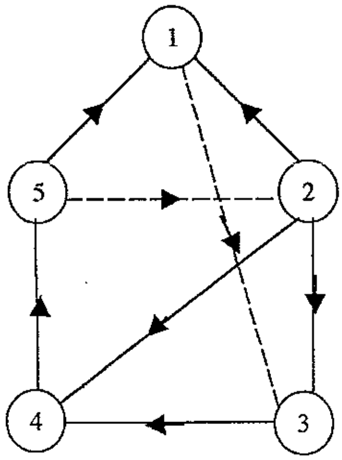
Maka operasi dari pergantian garis (i_1,i_2) dan (j_1,j_2) oleh garis (i_1,j_2) dan (j_1,i_2) disebut Transformasi Dasar (p,s) Invarian–d dari G

Contoh 2.9

Dua graph–(1,0) invarian–d, G_1 dan G_2 seperti pada gambar 2.12 dan gambar 2.13



Gambar 2.12 Sebuah graph G(V,E)



Gambar 2.13 Sebuah graph G(V,E)

Jika kita gantikan garis (1,2) dan (5,3) di G_1 pada gambar 2.12 dengan (1,3) dan (5,2) yang diperoleh dari G_2 pada gambar 2.13. G_2 dapat diperoleh dari G_1 dengan transformasi dasar (1,0) invarian–d.

Buktinya :

Dari gambar (2.12) dan (2.13)

Gambar (2.12), $i_1 = 1$ $\quad j_1 = 5$

$i_2 = 2$ $\quad j_2 = 3$

Terdapat dua garis $(i_1,i_2) = (1,2)$ dan $(j_1,j_2) = (5,3)$

$i_1 \neq j_1$, dan $i_2 \neq j_2$, sedemikian sehingga

$|(i_1,j_2)| < p$ $\quad i_1 \neq j_2$

$|(1,3)| < 1$ $\quad 1 \neq 3$

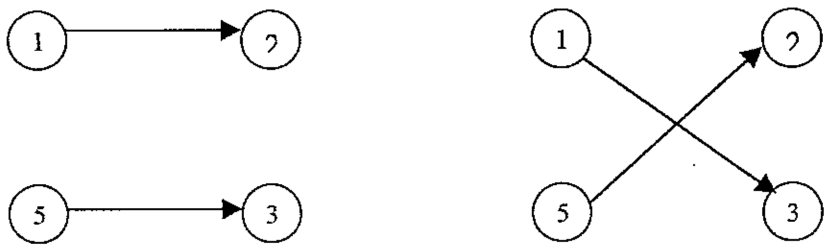
$0 < 1$

$|(j_1,i_2)| < p$ $\quad j_1 \neq i_2$

$|(5,2)| < 1$ $\quad 5 \neq 2$

$0 < 1$

Jadi dari definisi Transformasi dasar (p,s) invarian–d terpenuhi sehingga operasi pergantian garisnya terlihat pada gambar 2.14.



Gambar 2.14 Operasi pergantian garis dari graph G(V,E) pada gambar 2.11 ke 2.12

2.6. Teorema-teorema Aliran

Teorema aliran tentang jaringan persediaan permintaan dapat diperluas dengan menambah batas-batas pada tiap sumber dan tiap tujuannya, misal a(x) parsediaan batas bawah di x, $a'(x)$ persediaan batas atas di x, b(x) permintaan batas bawah di x, dan $b'(x)$ permintaan batas atas di x dengan $a(x) \leq a'(x)$ dan $b(x) \leq b'(x)$.

Teorema 2.1 (Perluasan Persediaan Permintaan)

Jaringan G(V,E,c,f) dengan himpunan V dipartisi menjadi tiga himpunan bagian yang tidak saling berhubungan S, R dan T. Setiap $x \in S$ berhubungan dengan dua fungsi real nonnegatif a(x) dan $a'(x)$, dimana $a(x) \leq a'(x)$. Dan untuk setiap $x \in T$ berhubungan dengan dua fungsi real nonnegatif b(x) dan $b'(x)$, dimana $b(x) \leq b'(x)$, sehingga

$$a(x) \leq f(x,V)-f(V,x) \leq a'(x), \qquad x \in S \qquad (2.6)$$

$$f(x,V)-f(V,x) = 0, \qquad x \in R \qquad (2.7)$$

$$b(x) \leq f(V,x)-f(x,V) \leq b'(x), \qquad x \in T \qquad (2.8)$$

$$c(x,y) \geq f(x,y) \geq 0, \qquad (x,y) \in E \qquad (2.9)$$

adalah fisibel jika dan hanya jika

$$c(X,\overline{X}) \geq b(T \cap \overline{X}) - a'(S \cap \overline{X}) \qquad (2.10)$$

$$c(X,\overline{X}) \geq a(S \cap X) - b'(T \cap X) \qquad (2.11)$$

berlaku untuk setiap $X \subseteq V$, dimana $\overline{X} = V-X$.

Bukti :

Pertama dibentuk perluasan jaringan $G'(V',E',c',f')$ seperti pada gambar 2.15 dengan menghubungkan titik baru s,t,u dan v dan garis (s,S), (u,S), (T,t), (T,v), (u,t), (s,v) dan (t,s) dengan kapasitas yang didefinisikan sebagai :

$$c'(s,x) = a'(x) - a(x), \qquad x \in S \qquad (2.12a)$$

$$c'(u,x) = a(x), \qquad x \in S \qquad (2.12b)$$

$$c'(x,t) = b'(x) - b(x), \qquad x \in T \qquad (2.12c)$$

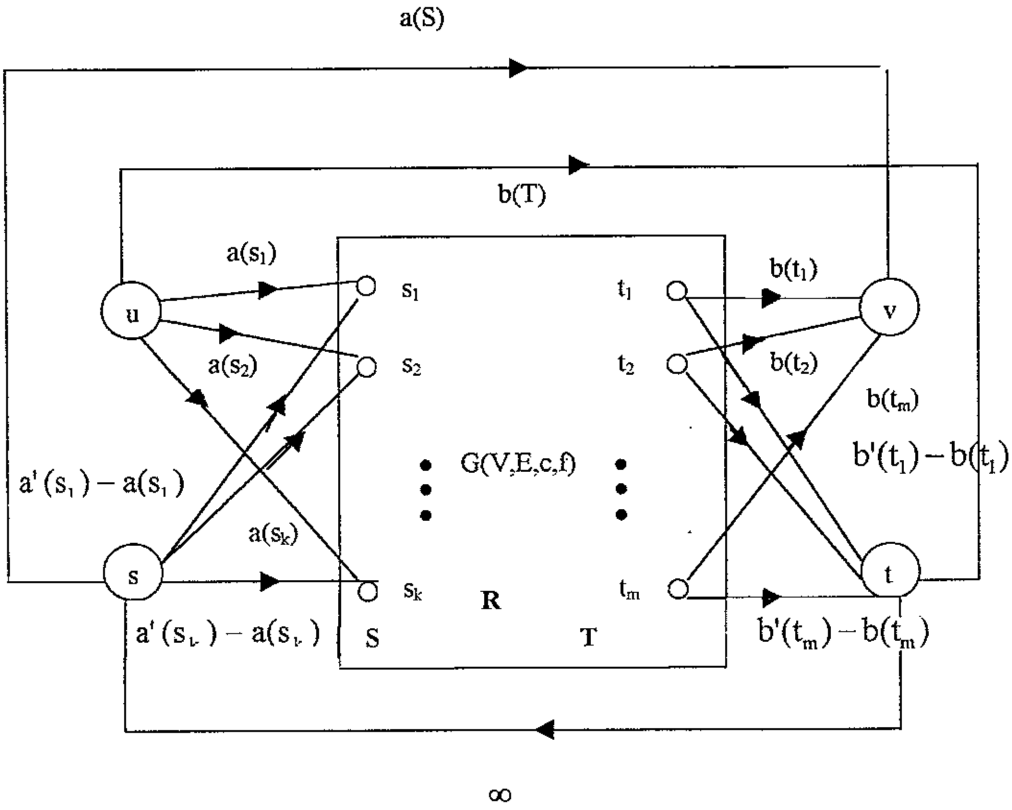
$$c'(x,v) = b(x), \qquad x \in T \qquad (2.12d)$$

$$c'(u,t) = b(T) \qquad (2.12e)$$

$$c'(s,v) = a(S) \qquad (2.12f)$$

$$c'(t,s) = \sim \qquad (2.12g)$$

$$c'(x,y) = c(x,y) \qquad (x,y) \in E \qquad (2.12h)$$



Gambar 2.15 Suatu jaringan $G'(V',E',c',f')$ yang diperoleh dari perluasanjaringan G(V,E,c,f) dengan menghubungkan titik-titik s, t, u dan titik v.

Dapat disimpulkan bahwa kondisi aturan (2.6) – (2.9) adalah fisibel jika dan hanya jika nilai dari aliran maksimal dari u ke v dalam G' adalah a(S) + b(T). Untuk menunjukkan hal tersebut, misalkan f adalah alur yang fisibel dalam G.

Perluas f dalam G ke f ' dalam G' dengan mendefinisikan :

$$f'(s,x) = f(x,V) - f(V,x) - a(x), \quad x \in S \qquad (2.13a)$$

$$f'(u,x) = a(x), \quad x \in S \qquad (2.13b)$$

$$f'(x,t) = f(V,x) - f(x,V) - b(x), \quad x \in T \qquad (2.13c)$$

$$f'(x,v) = b(x), \quad x \in T \qquad (2.13d)$$

$$f'(u,t) = b(T) \tag{2.13e}$$

$$f'(s,v) = a(S) \tag{2.13f}$$

$$f'(t,s) = f(S,V) - f(V,S) \tag{2.13g}$$

$$f'(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in E \tag{2.13h}$$

Kemudian dari sini dapat diperiksa apakah f', yang didefinisikan di atas adalah alur dari u ke v dalam G' yang bernilai a(S) + b(T).

Akibatnya, jika f' adalah aliran dari u ke v dalam G' yang bernilai a(S) + b(T) maka

$$f'(u,x) = a(x), \qquad x \in S \tag{2.14a}$$

$$f'(x,v) = b(x), \qquad x \in T \tag{2.14b}$$

Misal f menjadi f' dalam E. Maka untuk $x \in S$ diperoleh

$$f'(u,x) + f'(s,x) = f(x,V) - f(V,x) \tag{2.15}$$

Karena dari persamaan (2.12a)

$$a'(x) - a(x) \geq f'(s,x) \geq 0 \tag{2.16}$$

Per samaan (2.15) dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$a'(x) \geq f(x,V) - f(V,x) \geq a(x), \qquad x \in S \tag{2.17}$$

setelah melihat persamaan (2.14a). Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa

$$b'(x) \geq f(V,x) - f(x,V) \geq b(x), \qquad x \in T \tag{2.18}$$

Pembuktian secara lengkap dari pernyataan yang ditunjukkan oleh aturan (2.6) – (2.9) adalah benar jika dan hanya jika nilai aliran maksimal dari u ke v dalam G' adalah a(S) + b(T). Sehingga untuk membuktikan theorema di atas dengan menunjukkan bahwa kondisi (2.10) dan (2.11) adalah perlu dan cukup untuk keberadaan aliran f ' dari u ke v dalam G' yang memiliki nilai a(S) + b(T).

Akan ditunjukkan bahwa setiap potongan u – v dalam $G'(V',E',c',f')$ memiliki nilai kapasitas paling kecil a(S) + b(T), sehingga permasalahan menjadi fisibel atau dapat dipecahkan.

Untuk membedakannya diambil 4 kasus, misal $(X',\overline{X'})$ menjadi suatu potongan u-v didalam G'.

KASUS 1

$s\in X'$ dan $t \in \overline{X'}$. Partisi dari subset-subset X' dan $\overline{X'}$ dari V' ke dalam :

$X'=\{u,s\} \cup X$, $\overline{X'} = \{v,t\} \cup \overline{X}$ sehingga $\overline{X} = V-X$

Maka

$$c'(X',\overline{X'}) = c'(u,t)+ c'(u,\overline{X})+ c'(s,v)+ c'(s,\overline{X})+ c'(X,v)+ c'(X,t)+ c'(X, \overline{X})$$

$$= b(T) + a(S\cap\overline{X}) + a(S) + a'(S\cap\overline{X}) - a(S\cap\overline{X}) + b(T\cap X) + b'(T\cap X) - b(T\cap X) + c(X,\overline{X})$$

Karena $a'(S\cap\overline{X}) \geq a(S\cap\overline{X})$ dan $b'(T\cap X) \geq b(T\cap X)$, hal ini menunjukkan bahwa

$$c'(X',\overline{X'}) \geq a(S) + b(T)$$

KASUS 2

$s \in \overline{X'}$ dan $t \in X'$.

Pada kasus ini $c'(X',\overline{X'})$ adalah infinite dan tidak ada kondisi yang dipenuhi.

KASUS 3

$s,t \in X'$. Dipartisi X' dan $\overline{X'}$ kedalam

$$X' = \{s,t,u\} \cup X, \qquad \overline{X'} = \{v\} \cup \overline{X}$$

maka didapat

$$c'(X',\overline{X'}) = c'(s,v) + c'(s,\overline{X}) + c'(u,\overline{X}) + c'(X,v) + c'(X,\overline{X})$$

$$= a(S) + a'(S \cap \overline{X}) - a(S \cap \overline{X}) + b(T \cap X) + c(X,\overline{X})$$

$$= a(S) + a'(S \cap \overline{X}) + b(T) - b(T \cap \overline{X}) + c(X,\overline{X})$$

Hal ini menunjukkan bahwa

$$c'(X',\overline{X'}) \geq a(S) + b(T)$$

jika dan hanya jika

$$c(X,\overline{X}) \geq b(T \cap \overline{X}) - a'(S \cap \overline{X})$$

KASUS 4

$s,t \in \overline{X'}$. Partisi X' dan $\overline{X'}$ kedalam

$$X' = \{u\} \cup X, \qquad \overline{X'} = \{s,t,v\} \cup \overline{X}$$

Kemudian diperoleh

$$c'(X',\overline{X'}) = c'(u,t) + c'(u,\overline{X}) + c'(X,t) + c'(X,v) + c'(X,\overline{X})$$

$$= b(T) + a(S \cap \overline{X}) + b'(T \cap X) - b(T \cap X) + b(T \cap X) + c(X,\overline{X})$$

$$= b(T) + a(S) + - a(S \cap X) + b'(T \cap X) + c(X,\overline{X})$$

Hal ini menunjukkan bahwa

$$c'(X',\overline{X'}) \geq a(S) + b(T)$$

jika dan hanya jika

$$c(X,\overline{X}) \geq a(S \cap X) - b'(T \cap X)$$

Telah ditunjukkan bahwa aturan (2.6)-(2.9) adalah fisibel jika dan hanya jika nilai dari aliran maksimal dari u ke v dalam G' adalah a(S) + b(T), dan aliran dalam G' ada, jika dan hanya jika kondisi (2.10) dan (2.11) dipenuhi untuk setiap subset dari himpunan titik dalam G.

Teorema 2.2

Misalkan G (V,E) sebuah directed graph yang menghubungkan setiap $x \in V$ yang memenuhi

$$0 \leq a(x) \leq a'(x) \qquad (2.19a)$$

$$0 \leq b(x) \leq b'(x) \qquad (2.19b)$$

dengan $a(x)$, $a'(x)$, $b(x)$, $b'(x)$, integer non negatif.

Dan G(V,E) mempunyai sebuah (p,s) subgraph H dengan p,s integer nonnegatif dan derajat keluar $d_H^+(x)$, dan derajat masuk $d_H^-(x)$, yang memenuhi

$$a(x) \leq d_H^+(x) \leq a'(x) \qquad (2.20a)$$

$$b(x) \leq d_H^-(x) \leq b'(x) \qquad (2.20b)$$

Untuk setiap $x \in V$ jika hanya jika

$$\sum_{y \in \gamma(X)} \min \{ b'(y), \sum_{x \in X} \min [\,|(x,y)|\, \delta_{xy} (s-p) + p]\} \geq a(X) \qquad (2.21a)$$

$$\sum_{y \in \gamma^{-}(X)} \min \{ a'(y), \sum_{x \in X} \min [\,|(y,x)|\, \delta_{xy} (s-p) + p]\} \geq b(X) \qquad (2.21b)$$

Untuk semua $X \subseteq V$, dimana

δxy : kroneker delta $\quad \delta xy = 0,\ x \neq y$

$\delta xy = 1,\ x = y$

$\gamma(X)$: Himpunan titik-titik terminal dari garis-garis di G (V,E) yang mempunyai titik asal di X

$\gamma^*(X)$: Himpunan titik-titik asal dari garis-garis di G (V,E) yang mempunyai titik terminal di X

Bukti :

Pembuktian teorema diatas dengan mencari syarat perlu dan cukup di G (V,E) untuk sebuah (p,s) directed graph sebagai spanning subgraph H dari G (V,E) yang memenuhi derajat keluar $d_H^+(x)$, dan derajat masuk $d_H^-(x)$ yaitu :

$$a(x) \leq d_H^+(x) \leq a'(x),\ x \in V$$

$$b(x) \leq d_H^-(x) \leq b'(x)\ ,\ x \in V$$

Untuk menentukan syarat perlu dan cukup yaitu dengan mengubah permasalahan ini menjadi sebuah permasalahan aliran. Pertama membentuk directed graph bipartite $B(V', V'', E')$ dari G (V,E) untuk setiap $x \in V$ dengan cara menghubungkan dua titik yaitu $x' \in V'$ dan $x'' \in V''$. Garis (x', y'') didalam himpunan garis E' adalah sebuah garis (x,y) di G. Dalam kondisi ini garis-garis paralel x ke y di G diwakili dengan garis tunggal $(x', y'') \in E'$, sehingga $B(V', V'', E')$ adalah sebuah digraph-(1,0) yang berhubungan dengan G (V,E). Setiap garis $(x', y'') \in E'$ berhubungan dengan sebuah integer nonnegatif $c(x',y'')$ yang disebut kapasitas (x',y''). Fungsi kapasitas c dari E' ke integer non negatif didefinisikan

$$c(x',y'') = \min[|(x,y)|,p],\ x \neq y \qquad (2.22a)$$

$$= \min[|(x,y)|,s],\ x = y \qquad (2.22b)$$

Selanjutnya untuk melengkapi permasalahan persediaan permintaan dihubungkan setiap $x' \in V'$ dengan $a(x')$ dan $a'(x')$ integer nonnegatif, dan setiap $x'' \in V''$ dengan $b(x''), b'(x'')$ integer nonnegatif memenuhi

$$a(x') = a(x), \qquad a'(x') = a'(x), \qquad x \in V, \qquad x' \in V'$$

$$b(x'') = b(x) \qquad b'(x'') = b'(x), \qquad x \in V, \qquad x'' \in V''$$

Sekarang directed graph bipartite $B(V',V'',E')$ dapat dipikirkan sebagai jaringan persediaan permintaan $B(V',V'',E',c,f)$ dengan himpunan V' sebagai sumber dan himpunan V'' sebagai tujuan.

Kemudian dengan teorema 2.1 jaringan $G(V,E,c,f)$ dengan himpunan V dipartisi menjadi 3 himpunan bagian S, R,T, setiap $x \in S$ sebagai sumber berhubungan dengan $a(x)$ dan $a'(x)$ dimana $a(x) \leq a'(x)$ dan setiap $x \in T$ sebagai tujuan berhubungan dengan $b(x)$ dan $b'(x)$, dimana $b(x) \leq b'(x)$. Jaringan $G(V,E,c,f)$ ini identik dengan jaringan persediaan permintaan $B(V',V'',E',c,f)$ dengan himpunan V' sebagai sumber dan hipunan V'' sebagai tujuan..

Sebagai pertidaksamaan di jaringan $G(V,E,c,f)$

$$a(x) \leq f(x,V) - f(V,x) \leq a'(x), \qquad x \in S$$

$$f(x,V) - f(V,x) = 0, \qquad x \in R$$

$b(x) \leq f(V,x)-f(x,V) \leq b'(x)$, $\quad x \in T$

$c(x,y) \geq f(x,y) \geq 0$, $\quad (x,y) \in E$

adalah fisibel jika dan hanya jika

$$c(X,\overline{X}) \geq b(T \cap \overline{X}) - a'(S \cap \overline{X})$$

$$c(X,\overline{X}) \geq a(S \cap X) - b'(T \cap X)$$

Untuk setiap $X \subseteq V$, dimana $\overline{X} = V\text{-}X$, dapat diubah menjadi

$$a(x') \leq f(x', V' \cup V'') - f(V' \cup V'', x') \leq a'(x'), \quad x' \in V' \qquad (2.23)$$

$$b(x'') \leq f(V' \cup V'', x'') - f(x'', V' \cup V'') \leq b'(x''), x'' \in V'' \qquad (2.24)$$

$$c(x', y'') \geq f(x', y'') \geq 0, \qquad (x', y'') \in E' \qquad (2.25)$$

adalah fisibel jika dan hanya jika,

$$c(X,\overline{X}) \geq b(V'' \cap \overline{X}) - a'(V' \cap \overline{X}) \qquad (2.26a)$$

$$c(X,\overline{X}) \geq a(V' \cap X) - b'(V'' \cap X) \qquad (2.26b)$$

untuk setiap subset $X \subseteq V' \cup V''$, dengan $\overline{X} = V' \cup V''\text{-}X$ di jaringan persediaan permintaan $B(V', V'', E', c, f)$. Karena jaringan B adalah bipartite dengan garis arah dari sebuah titik di V' ke sebuah node di V'' maka

$$f(V' \cup V'', x') = 0 \qquad (2.27a)$$

$$f(x'', V' \cup V'') = 0 \qquad (2.27b)$$

Subset-subset X dan $\overline{X}$ adalah

$$X = X' \cup X'' \qquad (2.28a)$$

$$\overline{X} = \overline{X}' \cup \overline{X}'' \qquad (2.28b)$$

Dimana $X' \subseteq V', X'' \subseteq V''$, dan

$$\overline{X'} = V'-X' \quad (2.29a)$$

$$\overline{X''} = V''-X'' \quad (2.29b)$$

Dengan menggunakan sifat bipartite dari jaringan B, pertidaksamaan (2.26) dapat disederhanakan menjadi :

$$c(X',\overline{X''}) \geq b(\overline{X''}) - a'(\overline{X'}) \quad (2.30a)$$

$$c(X',\overline{X''}) \geq a(X') - b'(X'') \quad (2.30b)$$

Sehingga jaringan persediaan-permintaan $B(V' \cup V'', E', c, f)$ dengan himpunan V' sebagai sumber dan himpunan V'' sebagai tujuan menjadi

$$a(x') \leq f(x', V' \cup V'') \leq a'(x'), \qquad x' \in V' \quad (2.31)$$

$$b(x'') \leq f(V' \cup V'', x'') \leq b'(x''), \qquad x'' \in V'' \quad (2.32)$$

$$c(x', y'') \geq f(x', y'') \geq 0, \qquad (x', y'') \in E' \quad (2.33)$$

adalah fisibel jika dan hanya jika,

$$c(X',\overline{X''}) \geq b(\overline{X''}) - a'(\overline{X'}) \quad (2.34a)$$

$$c(X',\overline{X''}) \geq a(X') - b'(X'') \quad (2.34b)$$

untuk setiap $X' \subseteq V'$ dan $X'' \subseteq V''$.

Jadi dapat disimpulkan jika directed graph G(V,E) memiliki sebuah spanning subgraph-(p,s) H dengan derajat keluar dan derajat masuk yang memenuhi pertidaksamaan (2.20), maka ada f yang seluruh alirannya fidibel di B yang memenuhi pertidaksamaan (2.31)-(2.33) dengan fungsi kapasitas yang didefinisikan di persamaan (2.22). Sebaliknya jika ada f yang seluruh alirannya fisibel dari V' ke V'' di B yang memenuhi pertidaksamaan (2.31)-(2.33) maka dapat membentuk sebuah subgraph-(p,s) H yang memenuhi pertidaksamaan (2.20) di G(V,E), dengan garis (x,y) di H jika $f(x',y'') \neq 0$. Sehingga dengan menggunakan kondisi (2.34) dengan batas-batas di G(V,E) akan mendapat kondisi subgraph yang dimaksud.

Kemudian karena kondisi (2.34) masih dijaringan B dengan subset $X' \subseteq V'$ dan $X'' \subseteq V''$ maka (2.34) akan diubah untuk kondisi di G(V,E) dengan subset $X \subseteq V$.

Kondisi pertama untuk (2.34b) dengan subset $X' \subseteq V'$, dan didefinisikan :

$$U'' = \{y'' \mid y'' \in V'', b'(y'') < c(X', y'')\}, \qquad (2.35)$$

$$U'' \subseteq V''$$

Dari definisi tersebut diatas maka pertidaksamaan (2.34b) menjadi

$$c(X', \overline{X}'') \geq a(X') - b'(X'')$$

$$c(X', \overline{X}'') + b'(X'') \geq a(X')$$

$$c(X', \overline{U}'') + b'(U'') = \sum_{y'' \in \gamma(X')} \min\,[b'(y''), c(X', y'')] \geq a(X') \qquad (2.36)$$

Bagian sebelah kiri dari persamaan (2.36) adalah jumlah minimum untuk semua $X'' \subseteq V''$, seperti berikut ini

$$c(X', \overline{U}'') + b'(U'') = c(X', \overline{U}'' \cap X'') + c(X', \overline{X}'') - c(X', U'' \cap \overline{X}'') +$$
$$b'(U'' \cap \overline{X}'') + b'(X'') - b'(\overline{U}'' \cap X'')$$

karena

$$c(X', \overline{U}'' \cap X'') - b'(\overline{U}'' \cap X'') \leq 0$$

$$b'(U'' \cap \overline{X}'') - c(X', U'' \cap \overline{X}'') \leq 0, \text{ maka}$$

$$c(X', \overline{U}'') + b'(U'') \leq c(X', \overline{X}'') + b'(X'')$$

Analog untuk kondisi (2.34 a) dengan subset $X'' \subseteq V''$ dan didefinisikan

$$U' = \{x' | x' \in V', a'(x') > c(x', X'')\}, \qquad U' \subseteq V'. \qquad (2.37)$$

Dari definisi tersebut diatas maka pertidaksamaan (2.34a) menjadi

$$c(X', \overline{X}'') \geq b(\overline{X}'') - a'(\overline{X}')$$

$$c(X', \overline{X}'') + a'(\overline{X}') \geq b(\overline{X}'')$$

$$c(U', \overline{X}'') + a'(\overline{U}') = \sum_{x' \in \gamma^*(X'')} \min\,[a'(x'), c(x', X'')] \geq b(X'') \qquad (2.38)$$

Bagian sebelah kiri dari persamaan (2.38) adalah jumlah minimum untuk semua $U' \subseteq V'$, seperti berikut ini

$$c(U', \overline{X}'') + a'(\overline{U}'') = c(U' \cap \overline{X}', \overline{X}'') + c(X', \overline{X}'') - c(\overline{U}' \cap X', \overline{X}'') + a'(\overline{U}' \cap X') +$$

$$a'(\overline{X}') - a'(U' \cap \overline{X}')$$

karena

$$c(U' \cap \overline{X}', \overline{X}'') - a'(U' \cap \overline{X}') \leq 0$$

$$a'(\overline{U}' \cap X') - c(\overline{U}' \cap X', \overline{X}'') \leq 0, \text{ maka}$$

$$c(U', \overline{X}'') + a'(\overline{U}') \leq c(X', \overline{X}'') + a'(\overline{X}')$$

Untuk perhitungan $c(X', y'')$ dan $c(x', X'')$, $y'' \in V''$ dan $x' \in V'$ dengan memisalkan

$$X = \{x \in V | x' \in X'\} \qquad (2.39a)$$

$$Y = \{y \in V | y'' \in X''\} \qquad (2.39b)$$

Dan dengan definisi fungsi kapasitas (2.22) didapatkan

$$c(X', y'') = \sum_{x \in X} \min[|(x,y)|, \delta_{xy}(s-p) + p] \qquad (2.40a)$$

$$c(x',X") = \sum_{y\in Y} \min[|(x,y)|, \delta_{xy}(s-p) + p] \qquad (2.40b)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.40) pada pertidaksamaan (2.36) dan (2.38) akan didapat pertidaksamaan (2.21) yaitu

$$\sum_{y\in\gamma(X)} \min\left\{ b'(y), \sum_{x\in X} \min\,[|(x,y)|, \delta_{xy}(s-p)+p] \right\} \geq a(X)$$

$$\sum_{y\in\gamma^*(X)} \min\left\{ a'(y), \sum_{x\in X} \min\,[|(y,x)|, \delta_{xy}(s-p)+p] \right\} \geq b(X)$$

Contoh 2.10

Diketahui digraph Gambar (2.16) yaitu sebuah digraph-(2.2), tentukan sebuah subgraph H (1,1) dengan derajat keluar $d_H^+(x)$ dan derajat masuk $d_H^-(x)$ yang memenuhi :

$$a(1) = 1 \leq d_H^+(1) \leq 2 = a'(1) \qquad (2.41a)$$

$$a(2) = 1 \leq d_H^+(2) \leq 3 = a'(2) \qquad (2.41b)$$

$$a(3) = 2 \leq d_H^+(3) \leq 3 = a'(3) \qquad (2.41c)$$

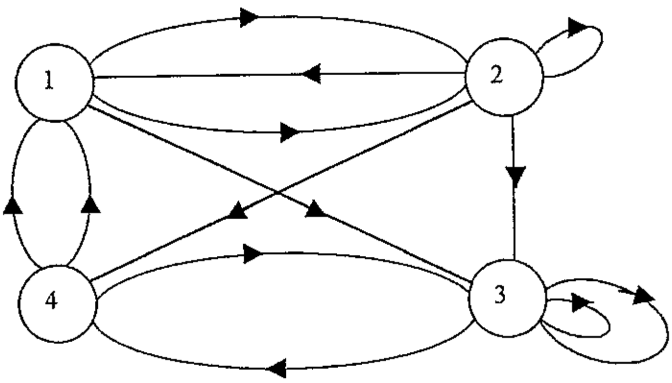
$$a(4) = 0 \leq d_H^+(4) \leq 1 = a'(4) \qquad (2.41d)$$

$$b(1) = 0 \leq d_H^-(1) \leq 2 = b'(1) \qquad (2.42a)$$

$$b(2) = 1 \leq d_H^-(2) \leq 3 = b'(2) \qquad (2.42b)$$

$$b(3) = 2 \leq d_H^-(3) \leq 4 = b'(3) \qquad (2.42c)$$

$$b(4) = 1 \leq d_H^-(4) \leq 3 = b'(4) \qquad (2.42d)$$



Gambar 2.16. Sebuah digraph-(2,2)

Masalah ini dapat diselesaikan dengan menggunakan teorema 2.2, dengan mengetahui semua subset X tidak kosong di V={1,2,3,4} dan dengan menggunakan p=s=1 di pertidaksamaan (2.21a) dan pertidaksamaan (2.21b). Dari kondisi (2.21a) terdapat subset 15 (=2^4-1) yaitu sebagai berikut

Untuk subset-subset dengan elemen tunggal menggunakan teorema 2.2 pertidaksamaan (2.21a) sebagai berikut

$$\sum_{y\in\gamma(X)} \min\left\{b'(y), \sum_{x\in X} \min\,[|(x,y)|, \delta_{xy}(s-p)+p]\right\} \geq a(X)$$

1. Untuk x = 1

$$\sum_{2,3\in\gamma(X)} \min\left\{ b'(y), \sum_{x\in X} \min\,[|(x,y)|, \delta_{xy}(1-1)+1]\right\} \geq a(X)$$

$$\min\{b'(2), \min\,[|(1,2)|, \delta_{12}(1-1)+1]\} + \min\,\{b'(3), \min[|(1,3)|, \delta_{13}(1-1)+1]\} \geq a(1)$$

$$\min\,\{3, \min\,[2,1]\} + \min\,\{4, \min\,[1,1]\} \geq 1$$

$1+1=2 \geq 1$ (terpenuhi)

Analog untuk subset tunggal lainnya

2. Untuk x = 2

$$\sum_{1,2,3,4\in\gamma(X)} \min\left\{ b'(y), \sum_{2\in X} \min [|(x,y)|, \delta_{xy}(1-1)+1] \right\} \geq a(X)$$

$\min\{2,\min[1,1]\}+\min\{3,\min[1,1]\}+\min\{4,\min[1,1]\}+\min\{3,\min[1,1]\} \geq 1$

$1+1+1+1=4 \geq 1$ (terpenuhi)

3. Untuk x = 3

$$\sum_{3,4\in\gamma(X)} \min\left\{ b'(y), \sum_{3\in X} \min [|(x,y)|, \delta_{xy}(1-1)+1] \right\} \geq a(X)$$

$\min\{4,\min[2,1]\}+\min\{3,\min[1,1]\} \geq 2$

$1+1 = 2 \geq 2$ (terpenuhi)

4. Untuk x = 4

$$\sum_{1,3\in\gamma(X)} \min\left\{ b'(y), \sum_{4\in X} \min [|(x,y)|, \delta_{xy}(1-1)+1] \right\} \geq a(X)$$

$\min\{2,\min[2,1]\}+\min\{4,\min[1,1]\} \geq 0$

$1+1=2 \geq 0$ (terpenuhi)

Kemudian untuk subset-subset dua elemen

5. Untuk x = 1 dan x = 2

$$\sum_{1,2,3,4\in\gamma(X)} \min\left\{ b'(y), \sum_{1,2\in X} \min [|(x,y)|, \delta_{xy}(1-1)+1] \right\} \geq a(X)$$

$\min\{b'(1),\min [|(1,1)|, \delta_{11}(1-1)+1]+\min [|(2,1)|, \delta_{21}(1-1)+1]\}+$

$\min\{b'(2),\min [|(1,2)|, \delta_{12}(1-1)+1]+\min [|(2,2)|, \delta_{22}(1-1)+1]\}+$

$\min\{b'(3),\min [|(1,3)|, \delta_{13}(1-1)+1]+\min [|(2,3)|, \delta_{23}(1-1)+1]\}+$

$\min\{b'(4),\min [|(1,4)|, \delta_{14}(1-1)+1]+\min [|(2,4)|, \delta_{24}(1-1)+1]\} \geq 2$

min {2,min[0,1]+min[1,1]}+min{3,min[2,1]+min[1,1]}+

min {4,min[1,1]+min[1,1]}+min{3,min[0,1]+min[1,1]} ≥ a(1)+a(2)

min {2,0+1}+min{3,1+1}+min {4,1+1}+min{3,0+1} ≥ 1+1 = 2

1+2+2+1=6 ≥ 2 (terpenuhi)

Analog untuk subset-subset dua elemen yang lain

6. Untuk x = 1dan x = 3

$$\sum_{2,3,4\in\gamma(X)} \min\left\{ b'(y), \sum_{1,3\in X} \min\left[|(x,y)|, \delta_{xy}(1-1)+1\right]\right\} \geq a(X)$$

min {3,min[2,1]+min[0,1]}+min{4,min[1,1]+min[2,1]}+

min {3,min[0,1]+min[1,1]} ≥ a(1)+a(3)

1+2+1 = 4 ≥ 1+2 = 3 (terpenuhi)

7. Untuk x = 1 dan x = 4

$$\sum_{1,2,3\in\gamma(X)} \min\left\{ b'(y), \sum_{1,4\in X} \min\left[|(x,y)|, \delta_{xy}(1-1)+1\right]\right\} \geq a(X)$$

min {2,min[0,1]+min[2,1]}+min{3,min[2,1]+min[0,1]}+

min {4,min[1,1]+min[1,1]} ≥ a(1)+a(4)

1+1+2 = 4 ≥ 1+0 = 1 (terpenuhi)

8. Untuk x = 2 dan x = 3

$$\sum_{1,2,3,4\in\gamma(X)} \min\left\{ b'(y), \sum_{2,3\in X} \min\left[|(x,y)|, \delta_{xy}(1-1)+1\right]\right\} \geq a(X)$$

min {2,min[1,1]+min[0,1]}+min{3,min[1,1]+min[0,1]}+

min {4,min[1,1]+min[2,1]}+ min {3,min[1,1]+min[1,1]}+ ≥ a(2)+a(3)

2+1+1+2 = 6 ≥ 1+2 = 3 (terpenuhi)

9. Untuk x = 2 dan x = 4

$$\sum_{1,2,3,4\in\gamma(X)} \min\left\{ b'(y), \sum_{2,4\in X} \min\left[|(x,y)|,\delta_{xy}(1-1)+1\right]\right\} \geq a(X)$$

min {2,min[1,1]+min[2,1]}+min{3,min[1,1]+min[0,1]}+

min{4,min[1,1]+min[1,1]}+ min {3,min[1,1]+min[0,1]}+ ≥ a(2)+a(4)

2+1+2+1 = 6 ≥ 1+0 = 1 (terpenuhi)

10. Untuk x = 3 dan x = 4

$$\sum_{1,3,4\in\gamma(X)} \min\left\{ b'(y), \sum_{3,4\in X} \min\left[|(x,y)|,\delta_{xy}(1-1)+1\right]\right\} \geq a(X)$$

min {2,min[1,1]+min[2,1]}+min{4,min[2,1]+min[1,1]}+

min{3,min[1,1]+min[0,1]} ≥ a(3)+a(4)

1+2+1 = 4 ≥ 2+0 = 2 (terpenuhi)

Kemudian untuk subset-subset tiga elemen

11. Untuk x = 1, x = 2, dan x = 3

$$\sum_{1,2,3,4\in\gamma(X)} \min\left\{ b'(y), \sum_{1,2,3\in X} \min\left[|(x,y)|,\delta_{xy}(1-1)+1\right]\right\} \geq a(X)$$

min {b'(1),min [|(1,1)|, δ_{11}(1-1)+1]+min [|(2,1)|, δ_{21}(1-1)+1]}+ min [|(3,1)|, δ_{31}(1-1)+1]}+min {b'(2),min [|(1,2)|, δ_{12}(1-1)+1]+min [|(2,2)|, δ_{22}(1-1)+1]}+ min [|(3,2)|, δ_{32}(1-1)+1]}+min {b'(2),min [|(1,2)|, δ_{12}(1-1)+1]+min [|(2,2)|, min [|(3,2)|, δ_{32}(1-1)+1]}+min {b'(3),min [|(1,3)|, δ_{13}(1-1)+1]+min [|(2,3)|, δ_{23}(1-1)+1]}+ min [|(3,3)|, δ_{33}(1-1)+1]}+min {b'(4),min [|(1,4)|, δ_{14}(1-1)+1]+min [|(2,4)|, δ_{24}(1-1)+1]}+ min [|(3,4)|, δ_{34}(1-1)+1]} ≥ a({1,2,3})

min{2,min[0,1]+min[1,1]+min[0,1]+

min{3,min[2,1]+min[1,1]+min[0,1]}+ min{4,min[1,1]+min[1,1]+min[2,1]}+

min{3,min[0,1]+min[1,1]+min[1,1]} $\geq$ a(1)+a(2)+a(3)

min{2,1}+min{3,2}+min{4,3}+min{3,2} $\geq$ a(1)+a(2)+a(3)

1+2+3+2 = 8 $\geq$ 1+1+2 = 4 (terpenuhi)

Analog untuk subset-subset tiga elemen yang lain

12. Untuk x = 1, x = 2 dan x = 4

$$\sum_{1,2,3,4\in\gamma(X)} \min\left\{ b'(y), \sum_{1,2,4\in X} \min\,[|(x,y)|, \delta_{xy}(1-1)+1] \right\} \geq a(X)$$

min{2,min[0,1]+min[1,1]+min[2,1]+min{3,min[2,1]+min[1,1]+min[0,1]}+

min{4,min[1,1]+min[1,1]+min[1,1]+min{3,min[0,1]+min[1,1]+min[0,1]}

$\geq$ a(1)+a(2)+a(4)

2+2+3+1 = 8 $\geq$ 1+1+0 = 2 (terpenuhi)

13. Untuk x = 1, x = 3 dan x = 4

$$\sum_{1,2,3,4\in\gamma(X)} \min\left\{ b'(y), \sum_{1,3,4\in X} \min\,[|(x,y)|, \delta_{xy}(1-1)+1] \right\} \geq a(X)$$

min{2,min[0,1]+min[1,1]+min[2,1]+

min{3,min[2,1]+min[1,1]+min[0,1]}+ min{4,min[1,1]+min[2,1]+min[1,1]}+

min{3,min[0,1]+min[1,1]+min[0,1]} $\geq$ a(1)+a(3)+a(4)

1+1+3+1 = 6 $\geq$ 1+2+0 = 3 (terpenuhi)

14. Untuk x = 2, x = 3 dan x = 4

$$\sum_{1,2,3,4\in\gamma(X)} \min\left\{ b'(y), \sum_{2,3,4\in X} \min\,[|(x,y)|, \delta_{xy}(1-1)+1] \right\} \geq a(X)$$

min{2,min[1,1]+min[0,1]+min[2,1]+

min{3,min[1,1]+min[0,1]+min[0,1]}+ min{4,min[1,1]+min[2,1]+min[1,1]}+

min{3,min[1,1]+min[1,1]+min[0,1]} ≥ a(2)+a(3)+a(4)

2+1+3+2 = 8 ≥ 1+2+0 = 3 (terpenuhi)

Kemudian untuk subset-subset empat elemen atau dengan dirinya sendiri

15. Untuk x = 1, x = 2, x = 3 dan x = 4

$$\sum_{1,2,3,4\in\gamma(X)} \min\left\{ b'(y), \sum_{1,2,3,4\in X} \min\left[|(x,y)|, \delta_{xy}(1-1)+1\right]\right\} \geq a(X)$$

$$\min\begin{Bmatrix} b'(1), \min\left[|(1,1)|, \delta_{11}(1-1)+1\right] + \min\left[|(2,1)|, \delta_{21}(1-1)+1\right] \\ + \min\left[|(3,1)|, \delta_{31}(1-1)+1\right] + \min\left[|(4,1)|, \delta_{41}(1-1)+1\right] \end{Bmatrix} +$$

$$\min\begin{Bmatrix} b'(2), \min\left[|(1,2)|, \delta_{12}(1-1)+1\right] + \min\left[|(2,2)|, \delta_{22}(1-1)+1\right] \\ + \min\left[|(3,2)|, \delta_{32}(1-1)+1\right] + \min\left[|(4,2)|, \delta_{42}(1-1)+1\right] \end{Bmatrix} +$$

$$\min\begin{Bmatrix} b'(3), \min\left[|(1,3)|, \delta_{13}(1-1)+1\right] + \min\left[|(2,3)|, \delta_{23}(1-1)+1\right] \\ + \min\left[|(3,3)|, \delta_{33}(1-1)+1\right] + \min\left[|(4,3)|, \delta_{43}(1-1)+1\right] \end{Bmatrix} +$$

$$\min\begin{Bmatrix} b'(4), \min\left[|(1,4)|, \delta_{14}(1-1)+1\right] + \min\left[|(2,4)|, \delta_{24}(1-1)+1\right] \\ + \min\left[|(3,4)|, \delta_{34}(1-1)+1\right] + \min\left[|(4,4)|, \delta_{44}(1-1)+1\right] \end{Bmatrix} \geq a(\{1,2,3,4\})$$

min{2,min[0,1]+min[1,1]+min[0,1]+min[2,1]}+

min{3,min[2,1]+min[1,1]+min[0,1]+min[0,1]}+

min{4min[1,1]+min[1,1]+min[2,1]+min[1,1]}+

min{3,min[0,1]+min[1,1]+min[1,1]+min[0,1]} ≥ a(1)+a(2)+a(3)+a(4)

min {2,2}+min{3,2}+min{4,4}+min{3,2}≥ a(1)+a(2)+a(3)+a(4)

2+2+4+2 = 10 ≥ 1+1+2+0 = 4 (terpenuhi)

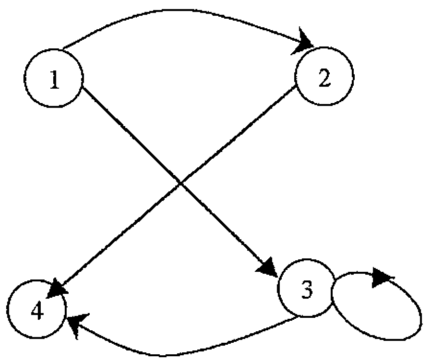
Selanjutnya untuk kondisi (2.21b) dengan 15 subset seperti pada (2.21a) adalah sebagai berikut :

Untuk subset-subset dengan elemen tunggal dengan menggunakan teorema 2.2 pada pertidaksamaan (2.21 b) yaitu

$$\sum_{y \in \gamma^*(X)} \min \left\{ a'(y), \sum_{x \in X} \min \left[|(y,x)|, \delta_{xy}(s-p)+p \right] \right\} \geq b(X)$$

Cara perhitungan dilakukan terdapat 15 subset analog dengan (2.21a) diperoleh hasil bahwa kondisi (2.21b) terpenuhi.

Jadi kondisi (2.21a) dan (2.21b) untuk semua subset X di V terpenuhi, sehingga dengan teorema 2.2 dapat disimpulkan bahwa sebuah subgraph H (1,1) dengan derajat masuk dan derajat keluar d_H^+ (x) dan d_H^- (x) memenuhi persamaan (2.41a,b,c,d) dan (2.42a,b,c,d) dan hasil dapat dilihat pada gambar 2.17.



Gambar 2.17. Sebuah subgraph H(1,1)