BAB II

MATERI PENUNJANG

Dalam prosedur penggabungan survey, perlu diketahui konsep dasar yang berkaitan dengan prosedur penggabungan survey tersebut. Ini diperlukan untuk mempermudah dalam pembahasan selanjutnya.

Untuk maksud tersebut dalam bab ini akan dibahas tentang konsep dasar survey sampling, basis, program linier, dualitas program linier, masalah transportasi dan graph.

2.1 Konsep Dasar Survey Sampling

Sekumpulan atau sejumlah objek-objek (satuan-satuan atau individu-individu) seperti manusia, desa, keluarga akan membentuk suatu populasi. Satuan-satuan atau individu-individu tersebut unit analisis atau elemen populasi.

Untuk memperoleh informasi tentang suatu populasi dilakukan suatu survey terhadap keseluruhan objek populasi atau bisa juga dengan cara mengambil sebagian dari objek populasi yang disebut sampel. Satuan–satuan yang akan diteliti dalam sampel dinamakan unit sampel. Unit sampel mungkin sama dengan unit analisis, tetapi mungkin juga tidak. Sebagai contoh untuk mengumpulkan informasi tentang orang, kita dapat menggunakan daftar yang lengkap dari sensus dan mengambil sampel langsung dari daftar tersebut. Tetapi mungkin juga memilih rumah tangga sebagai unit sampel dan orang-orang didalamnya sebagai unit analisis.

Metode survey sampling terdiri dari dua jenis yaitu sampling probabilitas adalah proses pengambilan sampel dengan probabilitas atau peluang tiap unit diambil dalam sampel diketahui dan sampling tak probabilitas adalah proses pengambilan sampel dengan probabilitas atau peluang suatu unit terambil sebagai sampel tidak dapat ditetapkan secara objektif. Probabilitas sampel dari suatu survey dapat diketahui dari lokasi pengambilan sampel dan penentuan objek mana yang disurvey. Sedangkan untuk survey yang lebih dari satu diperlukan juga hubungan atau status dari survey-survey tersebut.

Probabilitas Sampel Tanpa Pengembalian

Sampel tanpa pengembalian adalah penarikan sampel berukuran n dari suatu populasi berukuran N dengan tiap unit tidak muncul lebih dari satu kali dalam sampel.

Banyaknya kemungkinan sampel tanpa pengembalian berukuran n dari N populasi adalah ${}^{N}C_{n}$.

Contoh 2.1

Terdapat suatu populasi berukuran N=4 yaitu A, B, C, dan D. Jika diinginkan suatu sampel berukuran n=2 dari populasi tersebut tanpa pengembalian, maka terdapat sebanyak $^4C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$ buah sampel yang mungkin yaitu AB, AC, AD, BC, BD, dan CD.

Dalam banyak penerapan, unit-unit kelompok (seperti kota, blok-blok kota) mempunyai sejumlah elemen-elemen atau subunit-subunit yang berbeda (unit areal tanah, rumah tangga, orang-orang). Misalkan M_i adalah jumlah elemen unit ke-i . Jika seluruh M_i diketahui, maka teknik yang dikembangkan adalah memilih unit-unitnya dengan probabilitas proporsional untuk ukuran ke M_i –nya. Unit kelompok dengan ukuran M_i lebih besar cenderung mempunyai probabilitas lebih besar untuk terpilih dibandingkan dengan unit kelompok dengan ukuran M_i lebih kecil. Sehingga probabilitas p_i yaitu probabilitas terpilihnya unit kelompok ke-i sebagai sampel didefinisikan sebagai $p_i = \frac{M_i}{M_o}$ dengan $M_o = \sum_{i=1}^{N} M_i$.

Contoh 2.2

Diberikan suatu populasi dengan N=7 pada tabel 2.1 dan akan dipilih suatu unit tunggal dari populasi tersebut.

Tabel 2.1

Unit	Ukuran M_i	$\sum M_i$	Jarak yang dibentuk
1	3	3	1-3
2	1	4	4
3	11	15	5-15
4	6	21	16-21
5	4	25	22-25
6	2	27	26-27
7	3	30	28-30

Jumlah komulatif dari M_i telah diketahui. Untuk memilih sebuah unit, diambil sebuah bilangan acak antara 1 sampai $M_0=30$. Misalkan yang terpilih adalah bilangan ke-19. Pada jumlah komulatifnya (jarak yang dibentuk) bilangan 19 terletak antara bilangan 16 sampai 21, sehingga unit kelompok 4 terpilih sebagai sampel mempunyai probabilitas $p_4 = 6/30$. Dengan metode pengambilan ini, probabilitas bahwa setiap unit lainnya dipilih adalah proporsional terhadap ukurannya.

Untuk $n > 1$, penarikan sampel dengan pengembalian pada pemilihan unit kedua dengan metode komulatif, diambil sebuah bilangan acak baru antara 1 dan 30. Berbeda pada pengambilan sampel tanpa pengembalian, setiap unit akan dipilih, masing-masing bukan dari ukuran M_i asalnya . Untuk penarikan sampel berlapis N_h kecil telah dikembangkan metode penarikan sampel yang sederhana dengan probabilitas tanpa pengembalian yang berbeda.

Sebagian besar dari pekerjaan ini dihasilkan untuk survey-survey yang luas dimana kelompok-kelompok unit-unit yang pertama berlapis dengan beberapa prinsip lainnya (misalnya lokasi geografis) ke dalam sejumlah kecil dari kelompok unit-unit yang diambil dalam tiap lapisan.

Misalkan bahwa dua unit diambil dari sebuah lapisan. Unit pertama diambil dengan probabilitas p_i proporsional terhadap besarnya ukurannya. Misalnya ingin diambil n unit sebagai sampel tanpa pengembalian. Misalkan unit-i dipilih untuk pengambilan pertama maka pada pengambilan kedua, satu dari unit-unit sisanya dipilih dengan probabilitas $p_j/(1-p_i)$. Dengan teknik ini maka unit-unitnya diambil dengan probabilitas berturut-turut yaitu $p_j/(1-p_i)$, $p_k/(1-p_i-p_j)$ dan seterusnya. Misal akan diambil n unit sebagai sampel dan dinotasikan p(s/i) adalah probabilitas bersyarat memperoleh sekumpulan unit-unit yang telah diambil, dengan syarat bahwa unit ke-i telah diambil pertama dan dinotasikan pula p(s) sebagai probabilitas tidak bersyarat memperoleh sekumpulan unit-unit yang telah diambil.

Contoh 2.3

- Untuk n=2 dengan unit pertama i dan unit kedua j maka $p(s/i) = p_j/(1-p_i)$, sehingga probabilitas sampel yang terdiri dari unit i dan j adalah

  $p(s) = p_i\, p(s/i) + p_j\, p(s/j)$
- Untuk n=3 dengan unit ketiganya adalah k maka $p(s/ij) = p_j\, p_k/(1-p_i)(1-p_i-p_j)$, sehingga probabilitas sampel yang terdiri dari unit i, j, dan k adalah

  $p(s) = p_i\, p(s/ij) + p_i\, p(s/ik) + p_j\, p(s/jk) + p_j\, p(s/ji) + p_k\, p(s/ki) + p_k\, p(s/kj)$
- Dengan cara yang sama berlaku untuk $n > 3$.

2.2 Basis

Suatu vektor **W** dinamakan kombinasi linier dari vektor-vektor $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$,....., $\mathbf{v_r}$ jika vektor **W** dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\mathbf{W} = k_1\, \mathbf{v_1} + k_2\, \mathbf{v_2} + \ldots + k_r\, \mathbf{v_r}$$

dimana $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_r$ skalar.

Jika untuk setiap vektor dalam ruang vektor $V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_r \}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $v_1, v_2, \ldots, v_r$ maka dikatakan vektor-vektor tersebut merentang V .

Himpunan $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_r \}$ disebut himpunan bebas linier jika persamaan

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_r v_r = 0$$

hanya dipenuhi untuk $k_1 = 0$, $k_2 = 0, \ldots\ldots, k_r = 0$. Tetapi jika persamaan tersebut tidak hanya dipenuhi untuk nol dan terdapat pemecahan lainnya maka dikatakan himpunan $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_r \}$ tidak bebas linier .

Jika himpunan $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_r \}$ bebas linier dan merentang ruang vektor V maka himpunan S disebut basis dari ruang vektor V .

2.3 Program Linier

Program linier adalah suatu cara untuk menyelesaikan persoalan pengalokasian sumber-sumber yang terbatas diantara beberapa aktivitas yang bersaing dengan cara terbaik yang dilakukan.

Formulasi model matematis dari progam linier secara umum adalah

Memaksimalkan atau meminimalkan $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots\dots\dots + c_nx_n$ (2.1)

Dengan pembatas $a_{11}\ x_{11} + a_{12}x_{12}\ + \dots\dots\dots + a_{1n}x_{1n} \leq \text{atau} \geq b_1$ (2.2)

$a_{21}\ x_{21} + a_{22}x_{22}\ + \dots\dots\dots + a_{2n}x_{2n} \leq \text{atau} \geq b_2$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \dots\dots\dots + a_{mn}x_{mn} \leq \text{atau} \geq b_m$

$x_1,\ x_2, \dots\dots, x_n \leq 0$ atau ≥ 0 (2.3)

Dalam membangun model persoalan program linier, biasanya digunakan karakteristik-karakteristik sebagai berikut:

a. Variabel keputusan adalah variabel yang menguraikan secara lengkap keputusan-keputusan yang akan dibuat.

   Pada formulasi program linier di atas $x_1,\ x_2, \dots\dots, x_n$ merupakan variabel keputusan.

b. Fungsi tujuan adalah fungsi dari variabel yang akan dimaksimalkan atau diminimalkan.

   Pada formulasi program linier di atas persamaan 2.1 merupakan fungsi tujuan.

c. Pembatas adalah kendala yang dihadapi sehingga kita tidak bisa menentukan harga-harga dari variabel keputusan secara sebarang.

   Pada formulasi program linier di atas persamaan 2.2 merupakan pembatas.

d. Pembatas tanda adalah pembatas yang menjelaskan apakah variabel keputusan boleh positif, negatif , atau tidak terbatas dalam tanda.

Pada formulasi program linier di atas persamaan 2.3 merupakan pembatas tanda.

2.4 Dualitas Program Linier

Pada setiap persoalan program linier mempunyai suatu programa linier yang lain yang saling berkaitan yang disebut "dual", sedemikian sehingga solusi pada persoalan semula (yang disebut "primal") juga memberi solusi pada dualnya.

Ketentuan-ketentuan untuk menuliskan bentuk dual dari program linier adalah

1. Koefisien fungsi tujuan pada primal menjadi konstanta pada dual, dan konstanta pada primal menjadi koefisien fungsi tujuan pada dual.
2. Untuk setiap pembatas primal ada satu variabel dual, dan setiap variabel primal ada satu pembatas dual.
3. Tanda ketidaksamaan pada pembatas bergantung pada fungsi tujuan.
4. Kasus maksimal pada primal menjadi kasus minimal pada dual, dan sebaliknya kasus minimal pada primal menjadi kasus maksimal pada dual.
5. Setiap kolom pada primal berkorespondensi dengan baris pada dual, dan setiap baris pada primal berkorespondensi dengan kolom pada dual.

Bentuk umum masalah primal dual adalah sebagai berikut

Masalah Primal : Misal $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ adalah suatu vektor kolom yang meminimalkan fungsi linier

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{cX} \tag{2.4}$$

dengan pembatas

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b} \tag{2.5}$$

dan

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \tag{2.6}$$

dengan banyaknya baris dari **A** lebih kecil daripada banyaknya kolom dari **A**.

Masalah Dual : Misal $\mathbf{W} = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ adalah vektor baris yang memaksimalkan fungsi linier

$$g(\mathbf{W}) = \mathbf{Wb} \tag{2.7}$$

dengan pembatas

$$\mathbf{WA} \leq \mathbf{c} \tag{2.8}$$

dan

$$\mathbf{W} \text{ tidak terbatas} \tag{2.9}$$

Jika $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ adalah vektor baris, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ adalah vektor kolom, dan $\mathbf{A} = (a_{ij})$ adalah matrik koefisien masalah primal, maka perkalian vektor baris **W** berukuran 1xm dengan matrik **A** berukuran mxn akan menghasilkan bentuk eksplisit (2.3) yaitu

$$a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m \leq c_1$$
$$a_{12}w_2 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{m2}w_m \leq c_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m \leq c_n$$

Apabila salah satu masalah primal atau dual tersebut mempunyai solusi optimal berhingga maka masalah lainnya juga mempunyai solusi optimal yang berhingga dan min f(X)=max g(X), serta berlaku bahwa apabila salah satu masalah primal atau dual tersebut mempunyai solusi optimal tak terbatas, maka solusi yang lain tidak mempunyai solusi fisibel.

2.5 Masalah Transportasi

Masalah transportasi merupakan tipe khusus dari masalah program linier yang membahas pendistribusian suatu komoditas atau produk dari sejumlah sumber (supply) kepada sejumlah tujuan (destination, demand), dengan tujuan meminimumkan ongkos pengangkutan yang terjadi.

Ciri-ciri khusus persoalan transportasi adalah

1. Terdapat sejumlah sumber dan sejumlah tujuan tertentu.
2. Kuantitas komoditas atau barang yang didistribusikan dari setiap sumber dan yang diminta oleh setiap tujuan besarnya tertentu.
3. Komoditas yang dikirim atau diangkut dari suatu sumber ke suatu tujuan besarnya sesuai dengan permintaan dan atau kapasitas sumber.
4. Ongkos pengangkutan komoditas dari suatu sumber ke suatu tujuan besarnya tertentu.

Formulasi program linier untuk masalah transportasi secara umum adalah

Meminimalkan $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ (2.10)

Dengan pembatas $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i$ $\quad i = 1, 2, \ldots.., m$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$ $\quad j = 1, 2, \ldots.., n$

$x_{ij} \geq o$ $\quad$ untuk semua i dan j

Dengan:

s_i = kapasitas masing-masing sumber

d_j = komoditas yang diperlukan masing-masing tujuan

x_{ij} = jumlah satuan (unit) yang dikirimkan dari sumber i ke tujuan j

c_{ij} = biaya pengiriman per unit dari sumber i ke tujuan j.

Matrik koefisien untuk pembatas pada masalah transportasi adalah

$$
\begin{array}{rcl}
 & \begin{array}{cccccccccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & & x_{2n} & & \cdots & & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & & x_{mn} \end{array} & \\
A = & \left[\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \cdot & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & \cdot & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\
1 & & & & & 1 & & & & & & & & 1 & & & & \\
 & 1 & & & & & 1 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & 1 & & & \\
 & & \cdot & & & & & \cdot & & & & & & & & \cdot & & \\
 & & & \cdot & & & & & \cdot & & & & & & & & \cdot & \\
 & & & & 1 & & & & & 1 & & & & & & & & 1
\end{array}\right] & \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\text{Kendala Suplai} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\text{Kendala Permintaan} \end{array}
\end{array}
$$

Untuk menyelesaikan masalah transportasi digunakan metode simpleks transportasi yaitu suatu prosedur yang memanfaatkan struktur khusus metode simpleks.

Langkah-langkah dalam menyelesaikan masalah transportasi dengan metode simpleks transportasi adalah sebagai berikut :

1. Langkah awal

   Tujuan langkah awal ini adalah untuk memperoleh suatu basis solusi fisibel awal. Untuk masalah transportasi dengan m sumber dan n tujuan dengan kendala m+n mempunyai variabel keputusan paling banyak m+n-1. Hal ini dikarenakan bahwa kendala-kendala tersebut merupakan kendala-kendala persamaan, dan himpunan persamaan (m+n) mempunyai satu persamaan tambahan (kelebihan) yang dapat dihilangkan tanpa merubah daerah fisibel; ialah kendala manapun dipenuhi dengan sendirinya bila m+n-1 kendala-kendala lain dipenuhi. Hal ini dibuktikan dengan memperlihatkan bahwa sembarang kendala suplai tepat sama dengan jumlah kendala-kendala permintaan dikurangi jumlah kendala-kendala suplai lain, dan sembarang kendala permintaan dapat juga ditimbulkan dengan menjumlahkan kendala-kendala suplai dan mengurangkan dengan kendala-kendala permintaan yang lain.

   Untuk memperoleh basis solusi fisibel awal dengan mengikuti prosedur

   <u>Langkah 1:</u> Diantara baris-baris dan kolom-kolom dipilih variabel basis dengan suatu metode atau cara tertentu, yaitu

a. NWCR (Northwest Corner Rule) atau Aturan Sudut Barat Laut atau Pojok Kiri Atas

Memulai dengan memilih x_{11}. Kemudian jika x_{ij} adalah variabel basis selanjutnya yang dipilih, maka dipilih $x_{i,j+1}$ bila i masih mempunyai sisa suplai dan dipilih $x_{i+1,j}$ bila j masih mempunyai sisa permintaan; atau

b. MMR (Matrix Minima Rule)

Untuk setiap baris atau kolom dipilih C_{ij} terkecil. Jika ada C_{ij} terkecil yang sama dipilih sembarang.

Langkah 2: Dibuat alokasi cukup besar agar tepat menghasilkan sisa suplai dalam barisnya atau sisa permintaan dalam kolomnya dipilih yang terkecil.

Langkah 3: Keluarkan baris atau kolom yang dipilih dalam langkah 2.

Langkah 4: Jika hanya ada satu baris atau satu kolom yang dipilih, maka prosedur dilengkapi dengan setiap variabel sisa. Jika tidak maka kembali ke langkah 1.

2. Langkah Iterasi

Bagian 1: Tentukan variabel basis yang masuk. Pilih variabel nonbasis x_{ij} yang mempunyai $| C_{ij} - u_i - v_j |$ terbesar dengan u_i dan v_j adalah variabel dual untuk masalah transportasi di atas.

Bagian 2: Tentukan variabel basis yang keluar. Tentukan reaksi berantai yang diperlukan untuk mempertahankan kelayakan bilamana variabel basis masuk dinaikkan diantara sel donor, pilih variabel basis yang mempunyai nilai terkecil.

Bagian 3: Tentukan basis solusi fisibel baru. Tambahkan nilai dari variabel basis keluar kepada alokasi untuk setiap sel penerima dan untuk setiap sel donor dikurangi variabel basis keluar.

3. Uji Optimalitas

Buat derivasi u_i dan v_j dengan memilih baris yang mempunyai jumlah alokasi terbesar dan tetapkan v_j =0, kemudian selesaikan himpunan persamaan $C_{ij} = u_i + v_j$ untuk setiap (i,j) dengan x_{ij} adalah basis. Jika $(C_{ij} - u_i - v_j) \geq 0$ untuk setiap (i,j) dengan x_{ij} nonbasis, maka penyelesaian yang diperoleh adalah optimal, sehingga proses berhenti. Jika tidak kembali ke langkah iterasi.

Format tabel simpleks transportasi adalah sebagai berikut:

		Tujuan				Suplai	u_i
		1	2	....	n		
	1	c_{11}	c_{12}	....	c_{1n}	s_1	
	2	c_{21}	c_{22}	....	c_{2n}	s_2	
Sumber	. .	. .	. .	....		. .	
	m	c_{m1}	c_{m2}	....	c_{mn}	s_m	
Permintaan		d_1	d_2	....	d_n	Z=	
v_j							

2.6 Graph

Suatu graph G adalah himpunan pasangan tak kosong (V,E) dimana V adalah himpunan titik yang terbatas dan E adalah himpunan edge (garis) yang merupakan pasangan titik dalam V.

Elemen E dinotasikan dengan $(i\ ;\ j)$ dengan $i \neq j$ untuk $i, j \in V$. Jika $(i\ ;\ j) \in E$ maka $(j\ ;\ i)$ menunjuk pada garis yang sama.

Suatu path dalam graph G dari i_0 ke i_k dengan $i_0, i_k \in V$ didefinisikan sebagai barisan berselang-seling antara titik dan garis yang berbentuk

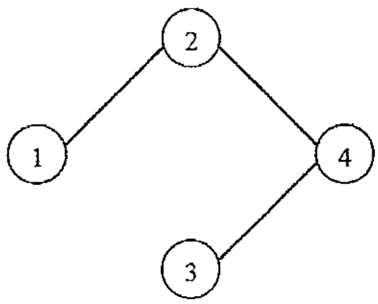
$$i_o, (i_o ; i_1), i_1, (i_1 ; i_2), i_2, \ldots\ldots\ldots, i_{k-1}, (i_{k-1} ; i_k), i_k$$

dengan tidak boleh ada garis yang muncul dua kali.

Graph G dikatakan terhubung jika dalam gaph tersebut terdapat path dari satu titik ke titik lain.

Contoh 2.4

Diketahui graph G=(V,E) dengan V={1, 2, 3, 4} dan E={(1;2), (3;4), (2;4)}. Graph G tesebut merupakan graph terhubung yang diperlihatkan pada gambar 2.1.

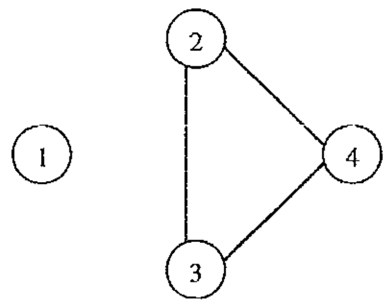


Gambar 2.1
Graph terhubung

Suatu path tertutup dalam graph G didefinisikan sebagai suatu path dari sembarang titik i dan kembali ke titik tersebut.

Contoh 2.5

Dketahui graph G=(V,E) dimana V={1, 2, 3, 4} dan E={(2;4), (3;4), (3;2)} maka didapat path tertutup 2, (2;4), 4, (4;3), 3, (3;2), 2. Gambar untuk path tertutup tersebut diperlihatkan pada gambar 2.2.



Gambar 2.2
Path tertutup

Suatu graph terhubung yang tidak mempunyai path tertutup adalah suatu tree. Tree ini akan mempunyai n garis dan n+1 titik dalam graph G.