BAB II

TEORI DASAR

Untuk lebih mempermuah pemahaman dalam pembahasan yang akan dilakukan dalam tugas akhir ini, maka akan diberikan terlebih dahulu beberapa teori sebagai penunjang yang akan melengkapi dalam pembahasan berikutnya.

2.1.Matrik

Matrik pada dasarnya merupakan alat yang banyak digunakan dalam memecahkan berbagai persoalan, termasuk didalam statistik yang digunakan untuk memecahkan persoalan regresi atau yang lainnya.

Matrik adalah suatu kumpulan angka-angka (sering disebut elemen-elemen) yang disusun menurut baris dan kolom, sehingga berbentuk empat persegi panjang, dimana panjang dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom-kolom dan baris-baris.

Contoh : $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 & 8 \\ 5 & 3 & -4 & 4 \\ 6 & -4 & -5 & 12 \end{bmatrix}$

Definisi 2.1. Suatu matrik A = [a_{ij}] dengan ukuran mxn. Transpose dari A bernotasi A′ adalah matrik dengan ukuran nxm yang diperoleh dari matrik A dengan menuliskan baris ke-i dari matrik A sebagai kolom ke-i dari A' atau $A' = [\, a_{ji} \,]$.

Sifat-sifat matrik transpose

1. $(A + B)' = A' + B'$
2. $(A')' = A$
3. $\lambda(A') = (\lambda A)'$
4. $(AB)' = A'B'$

Definisi 2.2. Matrik A dikatakan simetris jika transpose dari matrik A sama dengan A atau A simetris jika $A = A'$.

Definisi 2.3. Sebuah matrik bujur sangkar A ukuran nxn dikatakan mempu - nyai invers jika ada suatu matrik B sedemikian sehingga $AB=BA= I_n$. Matrik B disebut invers dari A, ditulis A^{-1}, merupakan matrik bujur sangkar ukuran n x n.

Definisi 2.4. Bentuk kuadrat dari variabel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ dapat ditulis

sebagai $X' A X$
$$= [\, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \,]\; A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}\, x_1^{\,2} + a_{22}\, x_2^{\,2} + \ldots + a_{nn}\, x_n^{\,2} + \Sigma_{i \neq j}\, a_{ij}\, x_i\, x_j$$

dengan A adalah matrik simetris.

Definisi 2.5. Bentuk kuadrat $X' A X$ disebut definit positif jika $X' A X > 0$, untuk setiap $X \neq 0$, semi definit positif jika $X' A X \geq 0$ dan jika tidak keduanya maka disebut non negatif definit. Matrik A disebut matrik definit positif jika $X' A X$ adalah bentuk kuadrat definit positif.

contoh : jika diketahui suatu matrik A dan X berturut-turut ,

$$\text{dengan } A : \begin{bmatrix} 37 & -2 & -24 \\ -2 & 13 & -3 \\ -24 & -3 & 17 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

maka bentuk kuadrat $X' A X$ adalah

$$= [\, x_1, x_2, x_3 \,] \begin{bmatrix} 37 & -2 & -24 \\ -2 & 13 & -3 \\ -24 & -3 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{jadi} \quad X' A X = 37\, x_1^2 + 13\, x_2^2 + 17\, x_3^2 - 4\, x_1 x_2 - 48\, x_1 x_3 - 6\, x_2 x_3$$

$$= (x_1 - 2x_2)^2 + (6x_1 - 4x_3)^2 + (3x_2 - x_3)^2$$

akan diperoleh $X' A X \geq 0$ untuk $X' = [\, 2, 1, 3 \,]$, sehingga $X' A X$ adalah semi definit positif .

2.2. Model Regresi Linier

Suatu model yang dapat di pakai dalam struktur regresi paling sederhana adalah model regresi linier. Pernyataan istilah sederhana menyatakan secara tidak langsung variabel regresor tunggal x dan istilah linier menyatakan suatu kelinieran dalam x.

Pola hubungan antara peubah y dan x yang bersifat linier dan sederhana dapat dimodelkan dengan persamaan

$$y_i = \beta_0 + \beta_i x_i + \varepsilon_i \quad , i = 1,2,3,\ldots,n \qquad \ldots(2.2.1)$$

dimana :

y_i adalah variabel tidak bebas pada pengamatan ke-i

x_i adalah variabel bebas pada pengamatan ke-i

β_0, β_i adalah parameter yang belum di ketahui nilainya atau koefisien regresi

ε_i adalah suatu sesatan pada pengamatan ke-i dengan asumsi bahwa ε_i berdistribusi bebas normal dengan rata-rata 0 dan varian σ^2 atau $\varepsilon_i \sim NID(0, \sigma^2)$

Model ini dapat diperluas dengan melibatkan sejumlah peubah penjelas x suatu model regresi linier yang melibatkan lebih dari satu variabel bebas disebut model regresi linier berganda. Model ini dapat dinyatakan sebagai berikut

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i \qquad \dots\ (2.2.2)$$

dimana diasumsikan bahwa $\varepsilon_i \sim NID(0, \sigma^2)$.

Model regresi linier berganda akan lebih mudah dipahami jika dinyatakan dalam bentuk matrik.persamaan (2.2.2) dapat dituliskan dalam bentuk matrik sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & X_{13} & \cdots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & X_{23} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & X_{n3} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad \dots\ (2.2.3)$$

dimana :

$$Y_{n \times 1} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \qquad X_{n \times (p+1)} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & X_{13} & \cdots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & X_{23} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & X_{n3} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix}$$

$$\beta_{(p+1)\times 1} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

2.3. Metode Kuadrat Terkecil.

Suatu metode yang menerangkan sebuah estimasi parameter regresi pada persamaan (2.2.2), yaitu estimasi pada β dinamakan metode kuadrat terkecil (*least square*). Misalkan ada n persamaan dan y_i adalah variabel tak bebas pada pengamatan ke-i, x_{ij} adalah variabel bebas ke-j pada pengamatan ke-i, maka y_i dapat dituliskan sebagai berikut :

$$y_i = \beta_0+\beta_1 x_{i1}+\beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i$$

$$= \beta_0+ \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ij} + \varepsilon_i \qquad \ldots(2.3.1)$$

Metode ini dilakukan dengan meminimumkan jumlah kuadrat sesatan $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2$ terhadap β . Untuk lebih mempermudah maka selanjutnya fungsi jumlah kuadrat sesatannya adalah :

$$S = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ij} \right)^2 \qquad \dots (2.3.2)$$

Jika S diminimumkan terhadap β_0 , β_1, β_2 , ..., β_p maka akan diperoleh taksiran kuadrat terkecil dari β_0 , β_1, β_2 , ... , β_p . Untuk memperoleh hasil dari taksirannya dilakukan dengan cara menurunkan secara parsial persamaan (2.3.2) sebagai berikut :

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ij} \right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_j} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ij} \right)(x_{ij})$$

Telah dijelaskan sebelumnya bahwa penggunaan matrik akan lebih memudahkan dalam menyelesaikan persoalan diatas. Untuk itu akan di cari vektor taksiran kuadrat terkecil β yang meminimumkan fungsi jumlah kuadrat sesatan dengan penggunaan matrik , yaitu :

$$S = \Sigma\, \varepsilon_i^2$$

$$= \varepsilon' \varepsilon$$

$$= (Y - X\beta)' (Y - X\beta)$$

$$= Y'Y - \beta' X'Y - Y'X\beta + \beta' X' X\beta$$

$$= Y'Y - 2\beta' X'Y + \beta' X'X\beta$$

Karena $\beta' X'Y$ adalah sebuah matrik ukuran 1x1 , maka $(\beta'X'Y)' =$ $Y'X\beta$ adalah merupakan suatu skalar yang sama.

Estimasi kuadrat terkecil harus memenuhi :

1. $\dfrac{\partial S}{\partial \beta} = 0$

   agar supaya taksiran β meminimumkan fungsi S, sehingga dapat ditunjukkan

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -2X'Y + 2X'X\beta$$

   dengan menyamakan turunan pertama dengan nol maka diperoleh taksiran β yang meminimumkan $\varepsilon'\varepsilon$, sehingga dapat ditunjukkan bahwa

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = 2X'X$$

$$-2X'Y + 2X'X\beta = 0$$

$$X'Y = X'X\beta$$

$$(X'X)\beta = X'Y \qquad \ldots \qquad (2.3.3)$$

   merupakan persamaan normal kuadrat terkecil.

Untuk mencari penyelesaian kedua ruas dikalikan dengan invers dari $(X'X)$, sehingga taksiran kuadrat terkecil untuk β adalah

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \qquad \ldots \quad (2.3.4)$$

asal $(X'X)^{-1}$ ada.

2. $\dfrac{\partial^2 S}{\partial \beta^2} > 0$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^2} = 2X'X$$

Dari matrik X'X berikut

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} & \sum X_{i3} & \cdots & \sum X_{ip} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i1}X_{i3} & \cdots & \sum X_{i1}X_{ip} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i2}X_{i1} & \sum X_{i2}^2 & \sum X_{i2}X_{i3} & \cdots & \sum X_{i2}X_{ip} \\ \sum X_{i3} & \sum X_{i3}X_{i1} & \sum X_{i3}X_{i2} & \sum X_{i3}^2 & \cdots & \sum X_{i3}X_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{ip} & \sum X_{ip}X_{i1} & \sum X_{ip}X_{i2} & \sum X_{ip}X_{i3} & \cdots & \sum X_{ip}^2 \end{bmatrix}$$

dapat diperoleh bahwa $X'X$ positif, maka berdasarkan definisi 2.5 maka matrik $X'X$ adalah definit positif dan $\dfrac{\partial^2 S}{\partial \beta^2} > 0$.

2.3.1. Kuadrat Terkecil Terboboti

Untuk melengkapi teori kuadrat terkecil pada pembahasan sebelumnya, maka selanjutnya akan diberikan mengenai teori kuadrat terkecil terboboti, tapi sebelumnya diberikan suatu definisi berikut :

Definisi 2.3.1. Matrik A dapat didiagonalisasi secara ortogonal, jika ada suatu matrik P sedemikian sehingga $P'AP = P^{-1}AP = \Lambda$, dengan Λ merupakan matrik diagonal.

Pandang model $Y = X\beta + \varepsilon$, berdasarkan teori kuadrat terkecil sesuai bab 2.3., maka mempunyai $E(\varepsilon) = 0$ dan $Var(\varepsilon) = I\sigma^2$

Pengembangan teori kuadrat terkecil pada model (2.2.3) dengan anggapan bahwa ε_i berkorelasi dan $Var(\varepsilon) = \sigma^2 V$, dimana V matrik definit positif berukuran n x n yang diketahui, maka ada suatu matrik non singular K yang berukuran n x n sedemikian sehingga $V = KK'$

Dimisalkan terdapat peubah Z, B, η, K, Y, X dan ε, maka dapat diambil suatu hubungan bahwa :

$$Z = K^{-1}Y, \; B = K^{-1}X, \; \eta = K^{-1}\varepsilon \qquad \text{... (2.3.1.1)}$$

jika persamaan (2.2.3) digandakan dengan K^{-1} maka akan diperoleh sebuah model baru sebagai berikut :

$$K^{-1}Y = K^{-1}X\beta + K^{-1}\varepsilon$$

sehingga dengan menggunakan persamaan (2.3.1.1), dapat disimpulkan bahwa terdapat model baru yaitu ,

$$Z = B\beta + \eta \qquad \text{..... (2.3.1.2)}$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $E(\eta) = 0$ dan $Var(\eta) = \sigma^2$

Karena $\eta = K^{-1}\varepsilon$, maka diperoleh $E(\eta) = K^{-1}E(\varepsilon) = 0$.

Jika η adalah suatu peubah acak dengan $E(\eta) = 0$, maka $E(\eta\eta') = Var(\eta)$ dengan nilai harapan diterapkan pada setiap unsur $\eta\eta'$ ukuran nxn , sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} Var(\eta) &= E(\eta\eta') \\ &= E(K^{-1}\varepsilon'\varepsilon K^{-1}) \text{ , karena } (K^{-1})' = K^{-1} \\ &= K^{-1}E(\varepsilon'\varepsilon)\ K^{-1} \\ &= K^{-1}KK\,K^{-1}\sigma^2 \text{ , karena } E(\varepsilon'\varepsilon) = cov(\varepsilon) = \sigma^2 V \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \sigma^2 KK \\ &= \sigma^2 I. \end{aligned}$$

Jadi model $Z = B\beta + \eta$, mempunyai $E(\eta) = 0$ dan $Var(\eta) = \sigma^2 I$.

Peminimalan $\eta'\eta$ terhadap β, dengan cara sama pada metode kuadrat terkecil maka estimasi kuadrat terkecil untuk β untuk model yang telah di transformasikan diatas adalah

$$\beta^* = (B'B)^{-1} B'Z$$

$$= (K'^{-1}X' K^{-1}X)^{-1} \quad K'^{-1} X'Z$$

$$= (X' (KK')^{-1} X)^{-1} K'^{-1} \quad X' K^{-1} Y$$

$$= (X' (KK')^{-1} X)^{-1} \quad X' (KK')^{-1} Y$$

$$= (X' V^{-1}X)^{-1} \quad X'V^{-1} Y$$

2.4. Matrik Topi

Nilai kecocokan Y yang berhubungan dengan observasi Y, sesuai dengan persamaan / model (2.2.3) adalah

$$\hat{Y} = X\hat{\beta}$$

dimana $\hat{\beta} = (X' X)^{-1} \quad X' Y$, maka

$$\hat{Y} = X (X' X)^{-1} \quad X' Y \qquad \ldots \quad (2.4.1)$$

Selanjutnya $X (X'X)^{-1} X'$ dinamakan matrik Topi P atau $P = X (X'X)^{-1} X'$. Dinamakan matrik topi karena matrik tersebut jika dikalikan dengan Y akan menghasilkan nilai taksiran untuk Y, dimana biasanya nilai taksiran itu diberi simbol seperti topi diatasnya yaitu $\hat{Y}$.

Andaikan p_{ij} adalah elemen ke-ij dari P

$$p_{ij} = x_i' (X'X)^{-1} x_j \qquad , i,j = 1, 2, ..., n \qquad ... (2.4.2)$$

maka elemen diagonal ke-i dari P adalah

$$p_{ii} = x_i' (X'X)^{-1} x_i \qquad , i = 1, 2, ..., n \qquad ... (2.4.3)$$

dimana x_i' dan x_j adalah baris ke-i dan kolom ke-j dari matrik X.

Sifat 2.1. P dan (I - P) adalah matrik-matrik simetris dan idempoten.

Bukti. a. $P' = (X(X'X)^{-1}X')'$

$= X((X'X)^{-1})'X'$

$= X(X'X)^{-1}X'$

$= P$

Jadi simetris.

b. $PP = (X(X'X)^{-1}X')\ (X(X'X)^{-1})X')$

$= X(X'X)^{-1}X'$

$= P$

Jadi P idempoten.

c. $(I - P)' \quad = I' - P'$

$= (I - P)$

Jadi $(I - P)$ simetris.

d. $(I - P)\ (I - P) = II - IP - IP + PP$

$= I - P - P - P$

$= (I - P)$

Jadi $(I - P)$ idempoten

2.5. Outlier

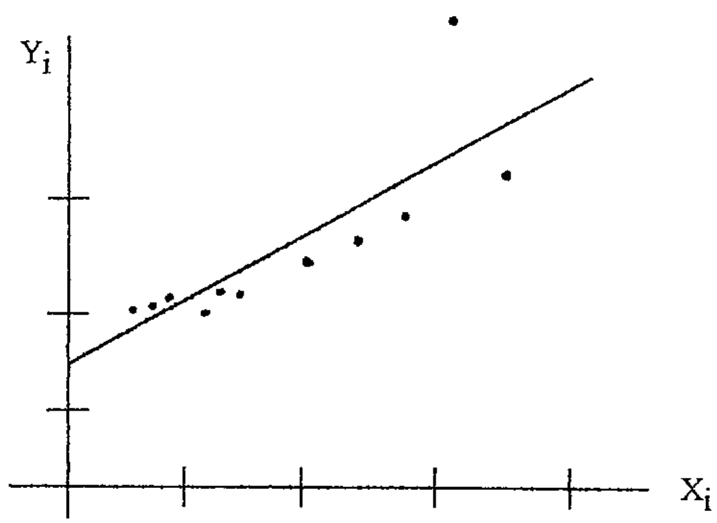
Diketahui bersama bahwa tidak semua pengamatan akan mempunyai pengaruh atau peran yang sama dalam pencocokan kuadrat terkecil dan analisis yang mengikutinya.

Adalah diluar kebiasaan dalam regresi linier bahwa terdapat satu atau lebih kasus didalam suatu analisis dengan pengamatan yang menyimpang dari model yang sesuai, saat dimana sebagian besar dari dari data yang ada kelihatan cocok dan baik.

Setiap kumpulan data pada umumnya akan memiliki nilai-nilai yang ekstrim, akan tetapi tidak selalu bahwa suatu nilai yang ekstrim tersebut adalah suatu outlier. Tetapi suatu pengamatan dengan nilai ekstrim merupakan kandidat utama untuk outlier.

Outlier didefinisikan sebagai pengamatan yang mempunyai nilai sisaan mutlak yang cukup besar jika dibandingkan dengan pengamatan yang lain dalam kumpulan data.

Sebagai ilustrasi dapat dilihat gambar berikut ini yang merupakan suatu kasus regresi sederhana



Gambar.2.1

Terlihat pada gambar diatas akan mempunyai kesan dan menunjukkan regresi sedehana yang sudah benar dan cocok untuk sebagian data, tetapi terlihat satu kasus dimana terletak jauh dari garis regresi kecocokan. Hal ini yang dinamakan outlier.

Untuk lebih jelasnya berikut diberikan suatu contoh.

Contoh : Skor Daya Nalar.

Data regresi sederhana pada tabel 2.1 menggambarkan hubungan antara x yang merupakan umur anak pada saat mengucapkan kata-kata pertama kalinya (dalam bulan) dan y berupa skor daya nalar dari masing-masing anak, sebanyak 21 anak.

Tabel 2.1 Data Skor Daya Nalar

No	x	y	No	x	y	No	x	y
1.	15	95	8.	11	100	15.	11	102
2.	26	71	9.	8	104	16.	10	100
3.	10	83	10.	20	94	17.	12	105
4.	9	91	11.	7	113	18.	42	57
5.	15	102	12.	9	96	19.	17	121
6.	20	87	13.	10	83	20.	11	86
7.	18	93	14	11	84	21.	10	100

Sumber: Cook & Weisberg 1982 hal 22.

Untuk mencari nilai estimasi koefisien parameter regresi untuk contoh model regresi sederhana diatas, dilakukan dengan menggunakan estimasi parameter sesuai dengan persamaan (2.3.4), yaitu :

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y .$$

Berikut perhitungan selengkapnya :

Pertama akan dicari nilai (X′X)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 15 & 26 & 10 & 9 & 15 & 20 & 18 & 11 & 8 & 20 & 7 & 9 & 10 & 11 & 11 & 10 & 12 & 42 & 17 & 11 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 26 \\ 1 & 10 \\ 1 & 9 \\ 1 & 15 \\ 1 & 20 \\ 1 & 18 \\ 1 & 11 \\ 1 & 8 \\ 1 & 20 \\ 1 & 7 \\ 1 & 9 \\ 1 & 10 \\ 1 & 11 \\ 1 & 11 \\ 1 & 10 \\ 1 & 12 \\ 1 & 42 \\ 1 & 17 \\ 1 & 11 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 21 & 302 \\ 302 & 5606 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari nilai inversnya. Berdasarkan definisi 2.4, maka untuk mencari nilai invers dari (X'X) akan dilakukan dengan memisalkan

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, sehinggadiperoleh$$

$$(X'X)(X'X)^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} 21 & 302 \\ 302 & 5606 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sehingga akan diperoleh persamaan sebagai berikut :

$21a + 302c = 1$ ... (1)

$21b + 302d = 0$ ... (2)

$302a + 5606c = 0$ ... (3)

$302b + 5606d = 1$ ... (4)

- dari persamaan (1) dan (3) dengan melakukan eliminasi diperoleh

$$\begin{array}{r} 6342a + 91204c = 302 \\ 6342a + 117726c = 0 \\ \hline 26522\ c = 302 \end{array} \quad -$$

$$c = -\ 0{,}011386773$$

- dengan melakukan hal yang sama pada persamaan (2) dan (4), diperoleh

  d = 0,0007917954905

- dengan memasukkan harga c ke persamaan (1) diperoleh

  21a + 302 (- 0,011386773) = 1

  a = 0,211371687

- dengan memasukkan harga d ke persamaan (4) diperoleh

  302b + 5606 (0,0007917954905) = 1,

  b = - 0,011386773

Jadi nilai invers (X'X) adalah

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}211371687 & -0{,}011386773 \\ -0{,}011386773 & 0{,}0007917954905 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari nilai X'Y dan diperoleh :

$$(X'Y) = \begin{bmatrix} 1967 \\ 26864 \end{bmatrix}$$

jadi

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0{,}211371687 & -0{,}011386773 \\ -0{,}011386773 & 0{,}0007917954905 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1967 \\ 26864 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 109{,}8738385 \\ -1{,}12700161 \end{bmatrix}$$

Disamping dengan perhitungan diatas, untuk lebih mempermudah perhitungan mencari nilai koefisien regresi khususnya untuk jumlah pengamatan n dan parameter p yang banyak, juga dapat digunakan bantuan program komputer SPSS.

Berdasarkan perhitungan perhitungan pencarian koefisien regresi dengan menggunakan program SPSS, maka hasil perhitungan estimasi / pendugaan contoh diatas dapat diketahui dengan memperhatikan **lampiran 1** , sehingga diperoleh persamaan regresi penduganya sbb :

$$\hat{y}_i = 109{,}92 - 1{,}13\ x_i$$

Nilai residual / sisaan (e) diperoleh dari nilai y berdasarkan pengamatan data dikurangi dengan nilai y penduganya, setelah memasukkan untuk masing-masing nilai x atau $e_i = y_i - \hat{y}_i$,dan hasil perhitungan lengkapnya dapat dilihat pada **tabel 2.2 lampiran 3.**

Terlihat pada gambar 2.2 lampiran 2 bahwa terdapat tiga pengamatan (ke-2, ke18 dan ke-19) yang perlu lebih diperhatikan. Dengan memperhatikan hasil pada lampiran 3, seandainya kita mengepas persamaan regresi sederhana terhadap data tersebut, maka pengamatan ke-19 akan kelihatan menonjol karena sisaannya besar, sedangkan pengamatan ke-2 dan ke-18 tidak tampak keanehannya karena berada pola utama dari pencaran titik-titik tersebut dan terlihat bahwa pengamatan ke-19 mempunyai nilai sisaan mutlak yang jauh lebih besar dibanding pengamatan yang lainnya. Hal ini memungkinkan bahwa pengamatan ke-19 merupakan outlier.