BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 Teori Probabilitas

Dalam teori probabilitas biasanya mempelajari gejala acak yang memperhatikan hasil percobaan dan percobaan itu tidak selalu menghasilkan hasil yang sama. Pengumpulan semua hasil yang mungkin dinyatakan sebagai *ruang sampel* (Ω) dan $\Re$ suatu koleksi dari setiap himpunan bagian dari Ω.

Definisi 2.1.1

Suatu fungsi probabilitas P(.) merupakan suatu fungsi yang ditetapkan dengan domain (daerah asal) A dan co-domain (daerah hasil) [0,1] yang memenuhi aksioma sebagai berikut :

(i) $P(A) \geq 0$ untuk setiap $A \in \Re$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) Jika $A_1, A_2 \ldots$ suatu barisan peristiwa saling asing di dalam $\Re$ (yaitu $A_i \cap A_j = \phi$ *untuk* $i \neq j$ *untuk* $i, j = 1, 2, \ldots$) dan jika $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Re$ maka

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Untuk selanjutnya koleksi dari setiap himpunan dari Ω yaitu $\Re$ disebut *ruang peristiwa* dari Ω.

Definisi 2.1.2

Susunan tripel $\{\Omega, \Re, P\}$ disebut suatu ruang probabilitas, dimana Ω merupakan suatu ruang sampel, $\Re$ suatu ruang peristiwa dari Ω dan P(.) adalah suatu fungsi probabilitas dengan domain $\Re$.

Definisi 2.1.3

Suatu partisi U = $[A_1, A_2, ...A_n]$ adalah koleksi himpunan bagian A_i dari Ω yang saling asing yang memenuhi :

(i) $A_i \subset \Omega$

(ii) $A_i \cap A_j = \phi \quad i \neq j$ dan

(iii) $A_1 \cup A_2 \cup ... A_n = \Omega$

Contoh 2.1.1

Diberikan ruang sampel $\Omega = \{1, 2, ... 15\}$ dan diambil lima peristiwa

$A_1 = \{1, 2, ... 5\}$	$B_1 = \{1, 3, ... 15\}$
$A_2 = \{6, 7, ... 10$	$B_2 = \{2, 4, ... 14\}$
$A_3 = \{11, 12, ... 15\}$	

Dari sini dapat dilihat bahwa :

(i) $A_i \subset \Omega, i = 1, 2, 3$	dan	$B_j \subset \Omega, j = 1, 2$
(ii) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \phi$	dan	$B_1 \cap B_2 = \phi$
(iii) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$	dan	$B_1 \cup B_2 = \Omega$

Dengan demikian

- A_1, A_2, A_3 merupakan koleksi himpunan bagian dari Ω dan yang menjadi suatu partisi dari Ω
- $B_1, B_2,$ merupakan koleksi himpunan bagian dari Ω dan yang menjadi suatu partisi dari Ω

Karena $A_i \cap B_j \neq \phi$ untuk setiap i dan j, maka A_i dan B_j tidak bisa menjadi partisi dari Ω.

Maka untuk suatu himpunan $B \in \Re$ diperoleh :

$$
\begin{aligned}
B &= \Omega \cap B \\
&= (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B \\
&= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)
\end{aligned}
$$

$B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$ sehingga $P(B) = P(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B))$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) \qquad (2.1.1)$$

Contoh 2.1.2. :

Pandang suatu pelantunan sebuah dadu seimbang, Diambil dua partisi U dan B dari ruang sampel yang sama, B merupakan . partisi biner, dimana B = {genap, ganjil}, sedang U adalah partisi elementer dari Ω, maka

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$U = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$

$B = \{\{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$

$P(A_i) = \frac{1}{6}$, $\quad i = 1, 2 \ldots 6.$

$P(B_j) = \frac{1}{2}$, $\quad j = 1, 2.$

Diambil C suatu peristiwa di dalam ruang probabilitas $(\Omega, \Re, P)$, dimana

$C = \{1, 2, 5, 6\}$

Dengan menggunakan persamaan (2.1.1) akan dicari probabilitas dari peristiwa C

$$P(C) = \sum_{i=1}^{6} P(A_i \cap C)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 + 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(C) = \sum_{j=1}^{2} P(B_j \cap C)$$

$$= \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

Definisi 2.1.4 :

Diberikan dua peristiwa A dan B dalam ruang sampel Ω dan ruang probabilitas yang diberikan (Ω, $\Re$, P), maka probabilitas bersyarat A diketahui B (lambang P(A/B)) didefinisikan

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{dimana} \qquad P(B) > 0$$

Contoh 2.1.3

Diberikan eksperimen pelantunan dua dadu yang seimbang dan diambil ruang sampel

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(2,3),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(5,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{matrix} \right\}$$

Misalkan A dan B adalah dua peristiwa dalam Ω dimana A peristiwa "jumlahnya 7" dan B peristiwa " dadu pertama muncul 6"

A= { (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) }

B = { (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) }

Maka :

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{36} \qquad P(A) = \frac{1}{6}$$

Probabilitas bersyarat $P(A/B) = \frac{1}{36} / \frac{1}{6} = \frac{1}{6} = P(A)$

Akibat

Jika $P(A) > 0$ dan $P(B) > 0$, dengan menggunakan definisi probabilitas bersyarat diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A/B).\ P(B) \\ &= P(B/A)\ .\ P(A) \end{aligned}$$

dari definisi probabilitas bersyarat akan di kembangkan teorema probabilitas total.

Teorema 2.1.1

Diberikan suatu ruang probabilitas $(\Omega, \Re, P)$, jika $A_1, A_2, \ldots A_n$ merupakan koleksi *himpunan peristiwa saling asing di dalam* $\Re$ *yang memenuhi* $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ dan $P(A_i) > 0$ untuk $i = 1, 2, \ldots n$ maka untuk setiap $B \in A$ dimana $P(B) > 0$ berlaku

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\ P(A_i)$$

Bukti

Sebagaimana diketahui bahwa untuk $B \in \Re$

$$\begin{aligned} B &= \Omega \cap B \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B) \end{aligned}$$

Dan karena $A_i \cap A_j = \phi \cap B = \phi$

Maka masing-masing peristiwa ($A_i \cap B$) adalah saling asing dari sini

$$P(B) = P[\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\,P(A_i)$$

Teorema 2.1.2.

Diberikan suatu ruang probabilitas (Ω, $\Re$, P), jika $A_1, A_2, \ldots A_n$ merupakan koleksi himpunan *peristiwa saling asing di dalam* $\Re$ *yang memenuhi* $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ dan $P(A_i) > 0$ untuk i = 1, 2, ... n maka untuk sembarang peristiwa $B \in A$ dimana $P(B) > 0$, maka untuk k = 1, 2, ... n

$$P(A_k / B) = \frac{P(B/A_k).P(A_k)}{\sum_{i}^{n} P(B/A_i).P(A_i)}$$

Bukti

Karena

$$P(A_k \cap B) = P(B/A_k)\,P(A_k)$$

dan

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\,P(A_i)$$

maka

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A_k / B) = \frac{P(B/A_k).P(A_k)}{\sum_{i}^{n} P(B/A_i).P(A_i)}$$

2.2. Variabel Random (Peubah Acak)

Hasil dari suatu percobaan yang dilakukan secara lengkap oleh suatu ruang sampel Ω dengan fungsi probabilitas P(.) pada peristiwanya dan dengan mengamati suatu $\omega \in \Omega$ yang di pilih berdasarkan P(.).Hal ini dapat menganalisis percobaan tersebut, akan tetapi dalam hal ini kita mengamati fungsi dari ω yang disebut variabel random.

2.2.1 Univariat Variabel Random (Satu Peubah Acak)

Bila mempunyai satu variabel random saja maka akan dikatakan *univariat variabel random.*

Definisi 2.2.1.1

$(\Omega, \Re, P)$ adalah ruang probabilitas, X adalah suatu fungsi dengan daerah definisi Ω dan daerah nilai bilangan real yakni untuk setiap $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in R = \{ x, -\infty < x < \infty\}$.

Contoh 2.2.1

Eksperimen melempar 3 mata uang sekali.

Ω = {(HHH), (HHT), (HTH), (THH), (HTT), (THT), (TTH), (TTT)}

Untuk setiap $\omega \in \Omega$

X = banyaknya sisi H dalam ω

X (ω) = x, dimana x = 0,1,2,3

X(BBB) = 0 X(HTT) = X(THT) = X(TTH) = 1

X(HHT) = X(HTH) = X(THH) = 2 X(HHH) = 3

Definisi 2.2.1.2

1. X disebut variabel random diskrit bila X variabel random yang hanya mendapat nilai berhingga atau banyaknya terbilang.
2. X disebut variabel random kontinu bila X variabel random yang hanya mendapat nilai tak berhingga atau banyaknya tak terbilang.

Contoh 2.2.1.2

1. Pada contoh 2.2.1 variabel randomnya diskrit karena ruang hasilnya berhingga yaitu $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$.
2. Misal X variabel random yang menyatakan jarak tempuh perjalanan seseorang dalam 4 hari yang tidak melebihi 100 km. Maka X merupakan interval dari $X = 0$ sampai $X = 100$ dengan $A = \{0 \leq X \leq 100\}$.

Definisi 2.2.1.3

Fungsi f(x) adalah suatu fungsi yang menyatakan fungsi probabilitas atau distribusi probabilitas suatu variabel random diskrit jika untuk setiap hasil x yang mungkin.

1. $f(x) > 0$
2. $\sum f(x) = 1$
3. $P(X = x) = f(x)$

Contoh 2.2.1.3

Misalkan X variabel random dengan nilai X yang menyatakan jumlah muka bila mata uang dilempar 4 kali.

Ruang sampel adalah $= 2^4 = 16$ titik.

Untuk mencari banyaknya cara memperoleh muka adalah $\binom{4}{x}$ cara, dengan x = 0, 1, 2, 3, 4. Maka $f(x) = P(X = x)$

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}}{16}, \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\sum_x f(x) = \frac{\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}}{16}$$

$$= \frac{16}{16} = 1$$

Definisi 2.2.1.4

Distribusi kumulatif F(x) suatu variabel random diskrit X dengan distribusi probabilitas f(x) dinyatakan oleh

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{X \le x} f(x)$$

Contoh 2.2.1.4

Dari contoh 2.2.3 akan dihitung distribusi kumulatif dari variabel random X dengan :

$f(0) = 1/16 \quad f(2) = 3/8 \quad f(4) = 1/16$

$f(1) = 1/4 \quad f(3) = 1/4$

maka

$F(0) = f(0) = 1/16$

$F(1) = f(0) + f(1) = 5/16$

$F(2) = f(0) + f(1) + f(2) = 11/16$

$F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 15/16$

$F(4) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/16, & 0 \le x \le 1 \\ 5/16, & 1 \le x < 2 \\ 11/16, & 2 \le x < 3 \\ 15/16, & 3 \le x < 4 \\ 1, & 4 \ge x \end{cases}$$

Definisi 2.2.1.5

Fungsi f(x) adalah fungsi kepadatan probabilitas variabel random kontinu X yang didefinisikan diatas semua himpunan bilangan riil R , bila

1. $f(x) \ge 0$, Untuk semua $x \in R$
2. $\int f(x)\, dx = 1$
3. $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\, dx$

Contoh 2.2.1.5.

Misal variabel random X mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(x) = \frac{x^2}{3}, \ -1 < x < 2$$

$$= 0, \quad \text{untuk x lainya.}$$

Maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{9}\Big|_{-1}^{2} = 8/9 + 1/9 = 1$$

dan $P(0 < x \leq 1) = \int_{0}^{1} \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{9}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{9}$

Definisi 2.2.1.6.

Distribusi komulatif F(x) suatu variabel random kontinu X dengan fungsi kepadatan f(x) diberikan oleh:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$$

2.2.2 Multivariat Variabel Random (Lebih Satu Peubah Acak)

Bila variabel random mempunyai leblh dari satu variabel random atau variabel random berdimensi $n \geq 2$ maka akan dikatakan *multivariat variabel random.*

Definisi 2.2.2.1

Jika $S^n = \Omega_1 \times \Omega_2 \ldots \Omega_n$ adalah ruang sampel dimana $\Omega_1, \Omega_2 \ldots \Omega_n$ yang berhubungan dengan suatu percobaan $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ dan $X_1, X_2 \ldots X_n$ adalah variabel random, masing-masing menunjukkan bilangan riil $X_1(e), X_2(e) \ldots X_n(e)$ untuk setiap hasil e. $[X_1, X_2 \ldots X_n]$ merupakan sebuah vektor random berdimensi-n.

Ruang hasil random $[X_1, X_2 \dots X_n]$ adalah himpunan seluruh nilai-nilai yang mungkin pada vektor random.

Dapat disajikan sebagai $R_{x_1,x_2 \dots x_n}$ dimana

$$R_{x_1,x_2 \dots x_n} = \{[x_1, x_2 \dots x_n] : x_1 \in R_{x_1}, x_2 \in R_{x_2}, \dots x_n \in R_{x_n}\}$$

Contoh 2.2.2.1

Pelemparan mata uang logam sebanyak 4 percobaan dimana ruang sampel dari setiap percobaan memenuhi $\Omega_i = \{0, 1\}$ untuk i = 1, 2, ...4. Nilai 0 merupakan hasil dari munculnya uang logam bergambar (H) dan nilai 1 merupakan hasil munculnya uang logam angka (A). Bila dalam percobaan tersebut keluar H, T, T, H maka ruang hasil random berdimensi 4 adalah [0, 1, 1, 0]

Definisi 2.2.2.2

1) Jika nilai-nilai vektor random merupakan bilangan yang terbatas dan dapat dihitung disebut vektor random diskrit.
2) Jika nilai-nilai vektor random merupakan bilangan yang tak terbatas dan tak dapat dihitung disebut vektor random kontinu.

Contoh 2.2.2.2

1) Didalam contoh 2.2.2.1 nilai-nilai dari vektor random merupakan diskrit karena hanya memenuhi dua nilai 0 atau 1.
2) Masalah kekuatan dan guntingan diameter baja yang dilas diukur. Jika kita tandai X_1 mengambarkan diameter dalam inci dan X_2 kekuatan dalam pon, dan jika diketahui $0 \le X_1 \le 0{,}25$ inci dengan $0 \le X_1 \le 2000$ pon, kemudian ruang hasil untuk (X_1, X_2) adalah himpunan $\{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le 0{,}25,\ 0 \le x_2 \le 2000\}$

Definisi 2.2.2.3

1) Kasus diskrit : Untuk setiap hasil $[x_{1_{a_1}}, x_{2_{a_2}} \dots x_{n_{a_n}}]$ dari dari vektor random diskrit $(X_1, X_2, \dots X_n)$, fungsi probabilitas bersama jumlahnya :

$$p[x_{1_{a_1}}, x_{2_{a_2}} \dots x_{n_{a_n}}] = P[X_1 = x_{1_{a_1}} \; dan \; X_{2_{a_2}} \dots X_{n_{a_n}}]$$

dimana :

$$p[x_{1_{a_1}}, x_{2_{a_2}} \ldots x_{n_{a_n}}] \geq 0$$

dan

$$\sum_{a_1}\sum_{a_2} \ldots \sum_{a_n} p[x_{1_{a_1}} x_{2_{a_2}} \ldots x_{n_{a_n}}] = 1$$

2) Kasus kontinu : Jika (X_1, X_2 ... X_n) adalah sebuah vektor random kontinu dengan ruang hasil R dalam euclidian plan, fungsi densitas bersama mempunyai sifat :

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) \geq 0$$

dan

$$\iint_R \ldots \int f(x_1, x_2 \ldots x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 1$$

suatu pernyataan probabilitas ini berasal dari bentuk :

$$P[a_1 \leq X_1 \leq b_1, a_2 \leq X_2 \leq b_2, \ldots a_n \leq X_n \leq b_n] = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2 \ldots x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

Contoh 2.2.2.3

1. Penentuan nilai k yang mana fungsi yang diberikan oleh :

   y = kxy   untuk x = 1, 2, 3   y = 1, 2

   dapat dinyatakan sebagai distribusi probabilitas.

   Penyelesaiannya :

   Maka f(1, 1) = k, f(1, 2) = 2k, f(1, 3) = 3k, f(2, 1) = 2k, f(2, 2) = 4k, f(2, 3) = 6k f(3, 1) = 3k, f(3, 2) = 6k, f(3, 3) = 9k. Pada kondisi pertama pada teorema 2.2.2.3 adalah :

   k + 2k + 3k + 2k + 4k + 6k + 3k + 6k + 9k = 1

   sedemikian sehingga 36k = 1dan k = 1/ 36.

   Jadi distribusi probabilitas diskrit adalah f(x, y) = ! /36 (xy).

2. Fungsi densitas bersama :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}x(x+y) \\ 0 \end{cases}$$

Dua random variabel X dan Y, didapatkan (X, Y) ∈ A, dimana A ={(x, y) / 0<x <1, 1 < y < 2 }.

Penyelesaian :

$$P[(X,Y) \in A] = P(0 < X < \frac{1}{2}, 1 < Y < 2)$$

$$= \int_1^2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{5} x(x+y)\,dx\,dy$$

$$= \int_1^2 \left. \frac{3x^2 y}{10} + \frac{3x^3}{15} \right|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} dy$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{3y}{40} + \frac{1}{40}\right)dy = \left. \frac{3y^2}{80} + \frac{y}{40} \right|_1^2$$

$$= \frac{11}{80}$$

Definisi 2.2.2.4

i. Fungsi distribusi komulatif $F(x_1, x_2, ...x_n)$ suatu variabel random diskrit vektor $(X_1, X_2 \ldots X_n)$ dengan distribusi probabilitas bersama $p(x_1, x_2, ...x_n)$ dinyatakan oleh :

$$F[x_1, x_2 .... x_n] = P[X_1 \le x_1, X_2 \le x_2 .... X_n \le x_n]$$
$$= \sum_{X_1 \le x_1} \sum_{X_2 \le x_2} .... \sum_{X_n \le x_n} p[x_1, x_2 .... x_n]$$

ii. Fungsi distribusi komulatif $F(x_1, x_2, ...x_n)$ suatu variabel random kontinu vektor $(X_1, X_2 \ldots X_n)$ dengan fungsi densitas bersama $f(x_1, x_2, ...x_n)$ dinyatakan oleh :

$$F(x_1, x_2 .... x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2 .... X_n \le x_n)$$
$$= \int_{X_1 \le x_1} \int_{X_2 \le x_2} .... \int_{X_n \le x_n} f(x_1, x_2, ... x_n)\,dx_1 dx_2 .... dx_n$$

Contoh 2.2.2.4

i) Pada contoh 2.2.2.3 akan dicari F(1, 1)

$$
\begin{aligned}
F(1,1) &= P(X \leq 1, Y \leq 1) \\
&= f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1) \\
&= 1/6 + 2/9 + 1/3 + 1/6 \\
&= 8/9
\end{aligned}
$$

ii) Fungsi densitas bersama X dan Y diberikan oleh :

$$
f(x,y) = \begin{cases} x + y & \textit{untuk } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \textit{yang lain} \end{cases}
$$

mencari fungsi komulatif bersama dua variabel random.

Untuk x < 0 dan y <0 $\qquad$ F(x, y) = 0

Untuk 0 < x < 1 dan y < 0

$$
F(x,y) = \int_0^y\int_0^x (x+y)dxdy = \int (\frac{1}{2}x^2 + yx)\Big|_0^x dy = \int^y (\frac{1}{2}x^2 + yx)dy = (\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2x)\Big|\ 0 = \frac{1}{2}xy(x+y)
$$

Untuk x > 1 dan 0 < y < 1

$$
F(x,y) = \int_0^y\int_0^x (x+y)dxdy = \int (\frac{1}{2}x^2 + yx)\Big|_0^x dy = \int^y (\frac{1}{2}x^2 + yx)dy = (\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2x)\Big|\ 0 = \frac{1}{2}xy(x+y)
$$

Untuk 0 < x < 1 dan y > 1

$$
F(x,y) = \int_0^y\int_0^x (x+y)dxdy = \int (\frac{1}{2}x^2 + yx)\Big|_0^x dy = \int^y (\frac{1}{2}x^2 + yx)dy = (\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2x)\Big|\ 0 = \frac{1}{2}xy(x+y)
$$

Definisi 2.2.2.5

Fungsi densitas bersama dengan variabel random vektor X_1, X_2 ...X_n dengan parameter θ yang tidak di ketahui yang mana diasumsikan dengan random $\theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ dan $\pi(\theta)$ distribusi prior adalah

$$
f(x_1, x_2, \ldots x_n, \theta) = f(x_1, x_2, \ldots x_n / \theta)\ \pi(\theta)
$$

Contoh 2.2.2.5

Fungsi kepadatan bersama dengan variabel random normal X, bergantung pada dua parameter dan dinyatakan dengan n(x, μ, δ). Kesimpulan distribusi normal N(θ,1) dinyatakan dengan

N(θ, 1, θ ∈ Ω).; $-\infty < \theta < \infty$

Definisi 2.2.2.6

i. Fungsi probabilitas marginal diskrit $m(x_1, x_2, \ldots x_n)$ dari fungsi probabilitas bersama dengan variabel random diskrit$(X_1, X_2, \ldots X_n)$ dengan parameter θ yang tidak diketahui adalah:

$$m(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{\theta} f(x_1, x_2 \ldots x_n, \theta)$$
$$= \sum_{\theta} f(x_1, x_2 \ldots x_n / \theta)\pi(\theta)$$

ii. Fungsi kepadatan marginal $m(x_1, x_2, \ldots x_n)$ dari fungsi kepadatan bersama dengan variabel random kontinu $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ dengan parameter θ yang tidak diketahui adalah:

$$m(x_1, x_2, \ldots x_n) = \int_{\theta} f(x_1, x_2, \ldots x_n, \theta) d\theta$$
$$= \int_{\theta} f(x_1, x_2, \ldots x_n / \theta)\pi(\theta) d\theta$$

Contoh 2.2.2.6

i. Dari contoh 2.2.2.3 fungsi probabilitas

f(x,y) = 1/36 (xy)

Penyelesaian :

$$f(x) = \sum_{1}^{2} f(x,y) = \frac{1}{36}\sum_{1}^{2}(xy) = \frac{1}{36}(y + 2y) = \frac{1}{12}y$$

dan

$$f(x) = \sum_{1}^{3} f(x,y) = \frac{1}{36}\sum_{1}^{3}(xy) = \frac{1}{36}(x + 2x + 3x) = \frac{1}{6}x$$

ii. Diberikan fungsi kepadatan bersama :

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{3}(x+2y) & \textit{untuk } 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0 & \textit{yang lain}\end{cases}$$

Penyelesaian :

Bentuk integrasi tertentu :

$$g(x)=\int_{\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_{0}^{1}\frac{2}{3}(x+y)dy=\frac{2}{3}\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}(x+1)$$

Untuk $0 < x < 1$ dan $g(x) = 0$ yang lain.

$$g(y)=\int_{\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_{0}^{1}\frac{2}{3}(x+y)dx=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x^2+xy\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}(1+y)$$

Untuk $0 < y < 1$ dan $g(y) = 0$ yang lain

Definisi 2.2.2.7

Fungsi kepadatan bersyarat variabel random vektor $(X_1,X_2,...X_n)$ dengan parameter θ adalah :

$$f(\theta / x_1,x_2...x_n)=\frac{f(x_1,x_2,...x_n/\theta)\pi(\theta)}{m(x_1,x_2,...x_n)}$$

dapat ditulis $f(\theta / y)=\dfrac{f(y,\theta)}{f(y)}$

f(θ/y) disebut distribusi posterior.

Contoh 2.2.2.7

i. Dari contoh 2.2.2.3 dan 2.2.2.6 akan diaplikasikan pada fungsi kepadatan variabel random diskrit yang diberikan Y = 1

Penyelesaian

$$f(0/1)=\frac{f(0,1)}{f(1)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{18}}=\frac{4}{7}$$

$$f(1/1)=\frac{f(1,1)}{f(1)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{18}}=\frac{3}{7}$$

$$f(2/1)=\frac{f(2,1)}{f(1)}=\frac{0}{\frac{7}{18}}=0$$

ii. Fungsi densitas yang diberikan oleh :

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy & \textit{untuk } 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0 & \textit{yang lain}\end{cases}$$

Penyelesaian

Fungsi kepadatan marginal

$$g(x)=\int_{\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_{0}^{1}4xydy=2xy^2\Big|_{y=0}^{y=1}=2x$$

Untuk 0 < x < 1 dan g(x) = 0 yang lain

$$g(y)=\int_{\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_{0}^{1}4xydx=2yx^2\Big|_{x=0}^{x=1}=2y$$

Untuk 0 < y < 1 dan g(y) = 0 yang lain

2.3 Fungsi-Fungsi Dalam Kalkulus

2.3.1 Fungsi Ekstrim Dari Suatu Fungsi

Definisi 2.3.1.1

Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x\to a} f(x,y)=L$ berarti untuk setiap $\varepsilon>0$ (betapapun kecilnya) terdapat $\delta>0$ yang berpadanan sedemikian sehingga $|f(x)-L|<\varepsilon$ dengan syarat bahwa $|x-a|<\delta$

Definisi 2.3.1.2

Diasumsikan f(x) kontinu dititik a dengan syarat bahwa :

i. f(a) nilainya ada

ii. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ nilainya ada

iii. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(x)$

Fungsi Maksimum dan Minimum

Fungsi kontinu dari z = F(x,y) dikatakan terbatas keatas jika z mempunyai nilai maksimum. Fungsi z = F(x,y) dikatakan nilai maksimum jika :

$$\Delta = \frac{\delta^2 F}{\delta X^2} x \frac{\delta^2 F}{\delta Y^2} - \left[\frac{\delta^2 F}{\delta X \delta Y}\right]^2 > 0 \qquad (2.3.1.1)$$

$$\frac{\delta^2 F(x,y)}{\delta X^2} < 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\delta^2 F(x,y)}{\delta Y^2} < 0 \qquad (2.3.1.2)$$

Persamaan (2.3.1.1) dan (2.3.1.2) merupakan syarat cukup dan syarat perlunya

$$\frac{\delta F}{\delta X} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\delta F}{\delta Y} = 0 \qquad (2.3.1.3)$$

Sebaliknya fungsi kontinu dari z = F(x,y) dikatakan terbatas kebawah jika z mempunyai nilai minimum. Fungsi z = F(x,y) dikatakan nilai minimum jika :

$$\Delta = \frac{\delta^2 F}{\delta X^2} x \frac{\delta^2 F}{\delta Y^2} - \left[\frac{\delta^2 F}{\delta X \delta Y}\right]^2 > 0 \qquad (2.3.1.4)$$

$$\frac{\delta^2 F(x,y)}{\delta X^2} > 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\delta^2 F(x,y)}{\delta Y^2} > 0 \qquad (2.3.1.5)$$

Persamaan (2.3.1.4) dan (2.3.1.5) merupakan syarat cukup dan syarat perlunya

$$\frac{\delta F}{\delta X} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\delta F}{\delta Y} = 0 \qquad (2.3.1.6)$$

Teorema 2.3.1.1

Misalkan $\sum U_n$ sebuah deret yang sukunya positif dan andaiikan

$$\lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$$

i. Jika $l < 1$ deret konvergen

ii. Jika $l > 1$ deret divergen

iii. Jika $l = 1$, pengujian ini tidak memberikan kepastian .

Bukti

Inilah yang dimaksudkan oleh Uji Hasil Bagi. Oleh karena, $\lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$ maka $U_{n+1} = lU_{n+1}$, *ini berarti deret berlaku seperti suatu* deret geometri dengan pembanding l. Suatu deret geometri akan konvergen apabila hasil bagi l kurang dari 1 dan divergen apabila hasil bagi itu lebih dari 1. Uraian diatas itu tentunya akan kita tuangkan dalam ungkapan yang lebih tepat sebagai berikut:

i. Oleh karena $l < 1$, kita dapat memilih bilangan r sehingga $l < r < 1$, misalnya, $r = (l+1)/2$. Kemudian pilihlah N sehingga untuk n ≥ N berlaku $\frac{U_{n+1}}{U_n} < r$.

Maka :

$U_{N+1} < r.U_N$

$U_{N+2} < r.U_{N+1} < r^2.U_N$

$U_{N+3} < r.U_{N+2} < r^3.U_N$

.

.

.

Oleh karena $r.U_N + r^2.U_N + r^3.U_N \ldots$ deret geometri dengan $0 < r < 1$, maka deret ini akan konvergen. Dengan menggunakan uji banding , deret $\sum_{n=N+1}^{\infty} U_n$ konvergen sehingga $\sum_{n=N+1}^{\infty} U_n$ yang konvergen.

ii. Andaikan $l < 1$, maka ada N sedemikian sehingga $U_{n+1}/U_n > 1$ untuk semua $n \geq N$. Jadi

$U_{N+1} > r.U_N$

$U_{N+2} > r.U_{N+1} > r^2.U_N$

$U_{N+3} > r.U_{N+2} > r^3.U_N$

.

.

.

Jadi, $U_n > U_N > 0$ untuk semua $n > N$, yang berarti bahwa $\lim_{n\to\infty} U_n$ tidak mungkin sama dengan nol. Maka menurut uji coba suku-n, deret $\sum U_n$ divergen.

iii. Kita tahu $\sum 1/n$ divergen sedangkan $\sum 1/n^2$ konvergen. Untuk deret yang pertama,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = l$$

Untuk deret kedua

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{(\frac{1}{n})^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = l$$

Jadi, uji hasil bagi ini tidak dapat membedakan deret yang konvergen dengan deret yang divergen apabila $l = 1$.

2.3.2 Fungsi-Fungsi Konvek-Dan Konkaf.

Pada bagian ini diasumsikan $X_1, X_2, X \in S \subseteq R^n$ (R^n = Ruang euclid berdimensi n)

Definisi 2.3.2.1

Himpunan S konvek bila hanya bila $\forall\, X_1, X_2 \in S \Rightarrow X \in S$ dengan $X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$,

$0 \le \alpha \le 1$, dimana persamaan tersebut sebagai kombinasi linear konvek dari X_1 dan X_2.

Definisi 2.3.2.2

Fungsi f(x) konvek pada himpunan S bila hanya bila $f(X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2) \le \alpha f(X_1) + (1-\alpha) f(X_2)$

dengan $X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$, $0 \le \alpha \le 1$

Teorema 2.3.2.1

Suatu fungsi bernilai real f yang didefinisikan pada selang terbuka (d,e) disebut konveks jika $f(X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2) \le \alpha f(X_1) + (1-\alpha) f(X_2)$ dengan $X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$, $0 \le \alpha \le 1$, dimana $d < X_1 < e$, $d < X_2 < e$.sehingga setiap fungsi konveks adalah kontinu.

Bukti :

Diberikan $\varepsilon > 0$ dan $p \in (d,e)$

Diambil x_{11} dan x_{21} sehingga $d < x_{11} < p < x_{21} < e$ dan $p = 1/2\,(x_{11} + x_{21})$. Garis lurus penghubung titik $(x_{21}, f(x_{21}))$ dan $(p, f(p))$ mempunyai persamaan

$$y = k_2(x) = \frac{f(x_{21}) - f(p)}{x_{21} - p}(x_{21} - p) + f(p)$$

Jika $p < x < x_{21}$, maka $x = \alpha x_{21} + (1-\alpha) p$ dengan $0 < \alpha = (p-x)/(x_{21}-p) < 1$

Jadi $f(\alpha x_{21} + (1-\alpha) p) = f(x) \le \alpha f(x_{21}) + (1-\alpha) f(p) =$

$$\frac{x-p}{x_{21}-p} f(x_{21}) + \frac{x_{21}-x}{x_{21}-p} f(p) = \frac{f(x_{21}) - f(p)}{x_{21}-p}(x-p) + f(p) = k_2(x)$$

Jika $x < p < x_{21}$, maka $x = \alpha x_{21} + (1-\alpha) p$ dengan $0 < \alpha = p - x / x_{21} - x < 1$.

Jadi $\frac{p-x}{x_{21}-x} f(x_{21}) + \frac{x_{21}-p}{x_{21}-x} f(x)$

$(x_{21} - x) f(p) \leq (p - x) f(x_{21}) + (x_{21} - p) f(x)$, diperoleh

$$f(x) \geq \frac{f(x_{21}) - f(p)}{x_{21} - p} f(x_{21}) + f(p) = k_2(x)$$

Diperoleh hasil: $f(x) \leq k_2(x)$, $(p < x < x_{21})$ dan $f(x) \geq k_2(x)$, $(x < p)$.

Dengan cara yang sama dapat anda buktikan:

$f(x) \leq k_1(x)$, $(p > x)$ dan $f(x) \geq k_1(x)$, $(x_{11} < x < p)$

dengan $y = k_1(x)$ garis penghubung titik $(x_{11}, f(x_{11}))$ dan $(p, f(p))$. Karena p titik tengah x_{11} dan x_{21}, maka $k_1(x_{11}) - k_2(x_{11}) = k_1(x_{21}) - k_2(x_{21})$ = tetap = M, jadi jika diambil $|x - p| < \delta < x_{21} - p$ maka berlaku

$|f(x) - f(p)| < M\delta / x_2 - p$

Untuk $|x - p| < \delta < (x^2 - p)\varepsilon / x_2 - p$ maka $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$, jadi f kontinu di p.

Definisi 2.3.2.3

Fungsi f(x) konkaf pada himpunan S bila hanya bila $f(X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2) \geq \alpha f(X_1) + (1-\alpha) f(X_2)$

dengan $X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$, $0 \leq \alpha \leq 1$

Lemma 2.3.2.1

Misalkan g(x) fungsi yang merupakan konvek terbuka himpunan bagian Ω pada R^n yang mana derivatif partial tingkat kedua

$$g^{(i,j)}(x) = \frac{\delta^2}{\delta x_i \delta y_j} g(x)$$

ada dan terbatas. g konvek jika hanya jika matrik G pada derivatif partial tingkat dua (misalkan matrik (mxm) dengan elemen $g^{(i,j)}(x)$)adalah nonnegatif definit untuk semua $x \in \Omega$ (misalkan $z'Gz \geq 0$ untuk semua $z \in R^m$ dan $x \in \Omega$).g konkaf jika –G definit nonnegatif. Jika G definit positif maka g stricly konvek dan jika G definit negatif maka stricly konkaf.

2.4 Momen Dan Ekspektasi

Definisi 2.4.1

1) Fungsi pembangkit momen suatu variabel random diskrit z adalah :

$$M_z(t) = E(e^{tz})$$
$$= \Sigma\, e^{tz} f(z)$$

2) Fungsi pembangkit momen suatu variabel random kontinu z adalah :

$$M_z(t) = E(e^{tz})$$
$$= \int e^{tz} f(z)\, dz$$

Contoh 2.4.1

1. Misalkan variabel random Z mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(z) = 2(\frac{1}{3})^z, \qquad z = 1, 2, 3$$

Maka fungsi pembangkit momen z adalah :

$$M_z(t) = \sum_{z=1}^{\infty} e^{tz} 2(\frac{1}{3})^z = \sum_{z=1}^{\infty} e^{tz} 2(\frac{e^t}{3})^z$$

$$= \frac{2(e^t/3)}{3-e^t}, \qquad \text{untuk } \frac{e^t}{3} < 1$$

atau

$$M_z(t) = \frac{2(e^t/3)}{3-e^t}, \qquad \text{untuk } t < \log 3$$

2. Misalkan variabel random Z mempunyai fungsi kepadatan probabilitas :

$$f(z) = \begin{cases} e^{-z} & untuk\ z > 0 \\ 0 & yang\ lain \end{cases}$$

Maka fungsi pembangkit momen Z adalah :

$$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = \int_0^{\infty} e^{tz}.e^{-z}dz$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-z(t-1)}dz = \frac{1}{1-t} \qquad \text{untuk } t < 1$$

Definisi 2.4.2

i. Jika S(z) adalah fungsi random diskrit $z_1, z_2, \ldots z_n$ maka fungsi pembangkit momennya didefinisikan

$$M_{S(z)}(t) = E(e^{tS(z)})$$
$$= \Sigma\, e^{tS(z)}\, f(z)$$

ii. Jika S(z) adalah fungsi random kontinu $z_1, z_2, \ldots z_n$ maka fungsi pembangkit momennya didefinisikan

$$M_{S(z)}(t) = E(e^{tS(z)})$$
$$= \int e^{tS(z)}\, f(z)\, d(z)$$

Contoh 2.4.2

Misalkan $Z^* = (Z_1, Z_2, \ldots Z_n)$ berdistribusi multinomial, yakni :

$$P(Z_1, Z_2, \ldots Z_n) = \frac{m!}{z_1!\, z_2!\ldots z_n!}\, p_1^{z_1} p_2^{z_2} \ldots p_n^{z_n}$$

dengan $S = z_1 + z_2 + \ldots + x_n$. Maka fungsi pembangkit momennya adalah :

$$M_S(t,t,\ldots t) = \sum_{z_1, z_2, \ldots z_n} e^{t(z_1+z_2+\ldots+z_n)} \frac{m!}{z_1!\, z_2!\ldots z_n!}\, p_1^{z_1} p_2^{z_2} \ldots p_n^{z_n}$$

$$= \sum_{z_1, z_2 \ldots z_n} \frac{m!}{z_1!\, z_2!\ldots z_n!} (p_1e^t)^{z_1} (p_2e^t)^{z_2} \ldots (p_ne^t)^{z_n}$$

$$= (p_1e^t + p_2e^t + \ldots + p_ne^t)^m$$

$$= e^{tm}(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)$$

Definisi 2.4.3

Momen. Jika z variabel random, momen ke-n pada z disimbolkan μ_n didefinisikan sebagai berikut :

$$\mu_n = E(z^n)$$

dimana $E(z^n) = \dfrac{d^n M_z(t)}{dt^n}$

Misalkan :

1) Untuk mean (rata-rata)

$$\mu_1 = E(z) = \frac{dM_z(t)}{dt}$$

2) Untuk Varian

$$\mu_2 = E(z^2) = \frac{d^2 M_z(t)}{dt^2}$$

Definisi 2.4.4

i. Misalkan z suatu variabel random diskrit dengan distribusi probabilitas f(z). Nilai ekspektasi adalah :

$$E(z) = \Sigma\, z\, f(z)$$

ii. Misalkan z suatu variabel random kontinu dengan fungsi densitas probabilitas f(z). Nilai ekspektasi adalah :

$$E(z) = \int z\, f(z)$$

Definisi 2.4.5

i. Misalkan z_1, z_2, ...z_n variabel random diskrit dan g(.) dinyatakan fungsi domain diskrit dan daerah asal R.Ekspektasi nilai fungsi probabilitas g(.) pada random variabel diskrit z_1, z_2, ...z_n disimbolkan dengan E(g(z)) yang didefinisikan : $E(g(z)) = \Sigma\, g(z_n)\, f_z(z_n)$

ii. Misalkan z_1, z_2, ...z_n variabel random kontinu dan g(.) dinyatakan fungsi domain kontinu dan daerah asal R.Ekspektasi nilai fungsi densitas g(.) pada random variabel kontinut z_1, z_2, ...z_n disimbolkan dengan E(g(z)) yang didefinisikan :

$$E(g(z)) = \int g(z_n)\, f_Z(z_n)\, dz_n$$

2.5 Teori Uji Hipotesis

Tujuan dari suatu uji hipotesa adalah memperoleh suatu keputusan menerima hipotesa berdasarkan analisis sampel tertentu. Dalam proses ini memungkinkan terjadi dua kesalahan, yaitu :

1. Kesalahan tipe I (α_0)

   Kesalahan tipe I adalah kesalahan yang dibuat apabila menolak hipotesa H_0 yang pada hakekatnya H_0 benar.

2. Kesalahan tipe II (α_1)

   Kesalahan tipe II adalah kesalahan yang dibuat apabila menolak hipotesa H_1 yang pada hakekatnya H_1 benar.

Hipotesa

Kesimpulan	H_0 benar	H_1 benar
Tolak H_0	Kesalahan Tipe I (α_0)	$\beta(\theta_1) = (1 - \alpha_1)$
Tolak H_1	$\beta(\theta_0) = (1 - \alpha_0)$	Kesalahan Tipe II (α_1)

Ada dua uji hipotesa :

1) Uji eka arah jika bentuknya

$H_0 : \theta = \theta_0$ atau $H_0 : \theta = \theta_0$

$H_1 : \theta > \theta_1$ $\quad$ $H_1 : \theta < \theta_1$

2) Uji dua arah jika bentuknya

$H_0 : \theta = \theta_0$

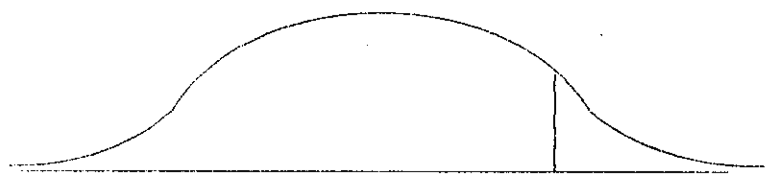
$H_1 : \theta \neq \theta_1$

Apakah akan digunakan uji hipotesis eka arah atau dua arah tergantung dari kesimpulan yang akan diambil. Sebagai contoh :dalam pengujian obat baru , hipotesis nolnya bahwa obat baru sama saja yang beredar dimasyarakat dan hal ini diuji lawan hipotesisnya, bahwa obat baru tersebut lebih unggul.

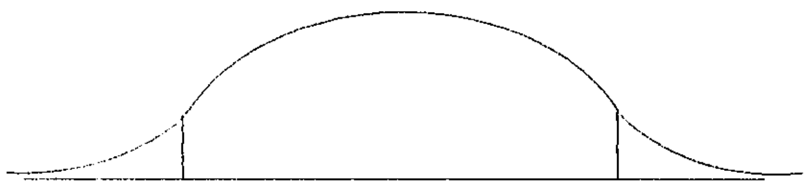
Hal ini berarti hipotesis yang digunakan adalah hipotesis eka arah dengan daerah kritis sebelah kanan. Bila ingin menguji dua metode mengajar . Apakah dua metode mengajar sama baiknya. ? untuk hal kedua ini uji hipotesa yang digunakan adalah uji dwi arah dengan daerah kritis sebelah kiri dan kanan.

Langkah-langkah dalam pengujian hipotesis mengenai parameter θ melawan hipotesis tandingan, dapat dilihat sebagai berikut :

1. $H_0 : \theta = \theta_0$
2. H_1 : tandingan H_0 yaitu $\theta < \theta_0 , \theta > \theta_0$
3. Pilih taraf nyata α_0.
4. Pilih uji statistik yang sesuai dan dicari daerah kritisnya.
5. Hitung nilai statistik dari sampel ukurann.
6. Kesimpulan : terima H_1 mempunyai nilai dalam daerah kritis, jika tidak terima H_0



gambar 1. Uji Hipotesis Satu Arah



gambar 2.Uji Hipotesis Dua Arah

Definisi 2.5.1

Uji statistik rasio likelihood untuk uji :

$H_0 : \theta \in \Omega_0$

$H_1 : \theta \in \Omega_1$

menyatakan $\lambda(\underset{\sim}{x}) = \dfrac{\sup_{\Omega_0} L(\theta / \underset{\sim}{x})}{\sup_{\Omega} L(\theta / \underset{\sim}{x})}$ fungsi likelihood kalau dianggap H_0 benar.

Likelihood ratio uji untuk uji elemen daerah penolakan mempunyai bentuk :

$\{ \underset{\sim}{x} ; \lambda(\underset{\sim}{x}) \le k \}$ dengan $0 \le k \le 1$

Kuasa Uji

$H_0 : \theta = \theta_0$

$H_1 : \theta \neq \theta_1$

$\pi(\theta)$ kuasa uji daalah probabilitas menolak H_0 bila harga parameter sesungguhnya adalah θ.

$\pi(\theta_0) = P(\text{menolak } H_0/\theta = \theta_0) = \alpha_0$

$\pi(\theta_1) = P(\text{menerima } H_0/\theta = \theta_1) = \alpha_1$

Definisi 2.5.2

Pandang $H_0 : \theta = \theta_0$ melawan $H_1 : \theta = \theta_1$ dengan daerah penolakan c* dikatakan uji yang kuat dengan ukuran-ukuran α jika :

1. $\pi_{c^*}(\theta_0) = \alpha_0$
2. $\pi_{c^*}(\theta_0) \ge \pi_c(\theta_1)$ untuk sebarang daerah ukuran kritis α_0.

Lemma 2.5.1

Andaikan $x_1, x_2 \ldots x_n$ mempunyai densitas bersama $f(\underset{\sim}{x}/\theta)$. Ambil

$$\lambda(\underset{\sim}{x}, \theta_0, \theta_1) = \frac{f(\underset{\sim}{x}/\theta_0)}{f(\underset{\sim}{x}/\theta_1)} \tag{2.5.1}$$

$$S_0 = \{(x_1, x_2, \ldots x_n)\ \lambda(\underset{\sim}{x}, \theta_0, \theta_1) \le k\} \tag{2.5.2}$$

dengan k konstan sedemikian sehingga :

$$P(x_1\ x_2\ \ldots\ x_n) \in S_0\backslash\theta_0) = \alpha_0 \qquad (2.5.3)$$

Maka S_0 daerah penolakan uji paling kuat ukuran α_0.

Untuk

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_0 : \theta \neq \theta_1$$

Bukti :

Untuk kemudahan, notasi vektor akan diganti $\mathbf{X} = (X_1\ X_2, \ldots X_n)$. Jika A merupakan peristiwa dimensi-n.

$$P(X \in A/\theta) = \iint_A \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots x_n, \theta)dx_1 dx_2 \ldots dx_n \qquad (2.5.4)$$

untuk kasus kontinu. Kasus diskrit :

$$P(X \in A/\theta) = \sum\sum_A \ldots \sum p(x_1, x_2, \ldots x_n, \theta) \qquad (2.5.5)$$

Dalam permasalahaan ini hanya memandang kasus kontinu. Kita akan menyatakan komplemen pada himpunan S_1 dengan S_1^c .

Perhatiakan jika Asubset pada S_0, maka :

$$P[X \in A/\theta_0] \leq kP[X \in A/\theta_1] \qquad (2.5.6)$$

Sebab $\int_A f(x,\theta_0) = \int_A kf(x,\theta_1)$, dengan cara serupa, jika A subset pada S_0^c maka:

$$P[X \in A/\theta_0] \geq k\ P[X \in A/\theta_1] \qquad (2.5.7)$$

Perhatikan untuk daerah kritis S_1 kita punyai :

$$S_0 = (S_0 \cap S_1) \cup (S_0 \cap S_0^c) \text{ dan } S_1 = (S_0 \cap S_1) \cup (S_1 \cap S_0^c)$$

kemudian

$$\pi_{S0}(\theta) = P(X \in S_0 \cap S_1/\theta) + P(X \in S_0 \cap S_0^c/\theta)$$

dan

$$\pi_{S1}(\theta) = P(X \in S_0 \cap S_1/\theta) + P(X \in S_1 \cap S_0^c/\theta)$$

dan selisihnya adalah :

$$\pi_{S0}(\theta) - \pi_{S1}(\theta) = P(X \in S_0 \cap S_1^c/\theta) - P(X \in S_0 \cap S_0^c/\theta) \qquad (2.5.8)$$

Pengkombinasian persamaan (2.5.8) dengan $\theta = \theta_1$ dan pertidaksamaan (2.5.6) dan (2.5.7), kita punyai

$$\pi_{S0}(\theta_1) - \pi_{S1}(\theta_1) \geq (1/k)\{P(X \in S_0 \cap S_1^c/\theta_0) - P(X \in S_0 \cap S_0^c/\theta)$$

lagi, menggunakan (2.5.8) dengan $\theta = \theta_0$ didalam sisi kanan pada pertidaksamaan ini kita peroleh

$$\pi_{S0}(\theta_1) - \pi_{S1}(\theta_1) \geq (1/k)\{\pi_{S0}(\theta_0) - \pi_{S1}(\theta_0)\}$$

Jika S_1 daerah kritis dengan ukuran α_0, maka $\pi_{S0}(\theta_1) - \pi_{S1}(\theta_1) = \alpha_0 - \alpha_0$ dan sisi kanan akhirnya pertidaksamaan = 0 dan kemudian $\pi_{S0}(\theta_1) \geq \pi_{S1}(\theta_1)$)

2.6 Prosedur Keputusan Sekuensial.

Prosedur keputusan sekuensial ketdak randoman dinyatakan $d = (\tau, \delta)$ dengan τ merupakan aturan penghentian yang terdiri dari fungsi -fungsi $\tau_0(x^0)$, $\tau_1(x^1)$, $\tau_2(x^2)$ ....

$\tau_i(x^i)$ menghentian sampling dan membuat keputusan setelah x^i diobservasi . Karena $\tau_i(x^i)$ mengharuskan berhenti dan membuat keputusan maka terdapat ukuran sampel N yang dikenal dengan waktu penghentian. Secara formal waktu penghentian adalah fungsi random dari x yang diberikan oleh :

$$N(X) = \min \{ n \geq 0, \tau_n(x^n) = 1 \}$$

Aturan penghentian kurang lebih satu obsrervasi yang diambil ($n \geq 1$), misalkan $\{N = n\}$ menyatakan himpunan semua $x^n \in S^n$ yang mana :

$$\tau_j(x^j) = \begin{cases} 1 & jika\ j = n \\ 0 & jika\ j < n \end{cases}$$

Dengan jelas $\{N = n\}$ merupakan himpunan observasi yang mana prosedur keputusan sekuensial menghentikan pada waktu n.

Misalkan $\{N \leq n\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{N = n\}$ maka $\lim_{n \to \infty} \{N \leq n\} = \{N \leq \infty\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \{N = n\}$

sedemikian sehingga :

$$P_\theta\{N \le n\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} P_\theta\{N = n\}$$

$$= P_\theta(N = n) + \sum_{n=1}^{\infty} P_\theta(N = n)$$

Misalkan $F_n(x^n/\theta\}$ menyatakan marginal bersama fungsi densitas pada $x_1, x_2, \ldots x_n$ Karena itu untuk peristiwa $\{N = n\} \subseteq S^n$.

$$P_\theta((x_1, x_2, \ldots x_n) \in \{N = n\}) = \sum_{\{N=n\}} f_n(x^n / \theta)$$

$$= F_n(x^n / \theta) \text{ (pada diskrit)}$$

Jadi $P_\theta(N \le n) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x^n / \theta)$ atau

$$P_\theta\{N \le \infty\} = P_\theta(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x^n / \theta)$$

Bentuk lain :

$$P_\theta\{N \le \infty\} = P_\theta(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\{N=n\}} f_n(x^n / \theta)$$

2.7 Resiko Bayes Pada Prosedur Keputusan Sekuensial

Definisi 2.7.1

Aturan keputusan $\delta_n(x^n)$ adalah fungsi yang didefinisikan pada R^n ke R.Harga $\delta_n(x^n)$ dinamakan suatu keputusan (n = 1, 2, ...).

Misalkan uji hipotesa $H_0: \theta \in \Omega_0$ melawan $H_1: \theta \in \Omega_1$

$$\delta_n(x^n) = \begin{cases} 1 & \text{Jika } x^n \in S_0 \text{ (daerah penolakan uji } H_0) \\ 0 & \text{Jika } x^n \in S_0^c \text{ (daerah penerimaan uji } H_0) \end{cases}$$

dimana $S_0 = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) / f_n(x^n / \theta_0) \le f_n(x^n / \theta_1)\}$

Definisi 2.7.2

Untuk mengestimasi θ berdasarkan $x_1, x_2, \ldots x_n$ dan dengan menggunakan aturan keputusan $\delta_n(x^n)$ suatu kerugian keputusan adalah fungsi tidak negatif dalam argumen θ yang menyatakan kerugian jika θ diestimasi dengan $\delta_n(x^n)$ (n = 1, 2, ...).

Misalkan kerugian keputusan yang berkaitan dengan $\delta_n(x^n)$ berbentuk :

$$L(\theta,a)=\begin{cases} K_i & Jika\ \theta=\theta_{1-i} \quad a=a_i \quad i=0,1 \\ 0 & Jika\ yang\ lain \end{cases}$$

Definisi 2.7.3

Kerugian $L(\theta,a,n)=L(\theta,a)+\sum_{i}^{n} c_i$, dimana a merupakan harga observasi ke-i.

Misalkan $c_i = c$ maka akan didapatkan $L(\theta,a,n)=L(\theta,a)+nc$

Definisi 2.7.4

Dentitas marginal $m_n(x^n)>0$ untuk n = 1, 2, ... adalah

$$m_n(x^n)=E^{\pi}[f_n(x^n \quad \theta)]=\sum_{\theta} f_n(x^n \quad \theta)\pi(\theta)$$

Definisi 2.7.5

Densitas Posterior adalah

$$\pi^n(\theta)=\pi(\theta/x^n)=\frac{\pi(\theta)f_n(x^n \quad \theta)}{m_n(x^n)}$$

Definisi 2.7.6

Fungsi resiko pada prosedur keputusan sekuensial d merupakan ekspektasi kerugian yaitu :

$$R(\theta,d)=E_\theta[L(\theta,\delta_N(x^N),N)]$$

Bila diambil kerugian $L(\theta,a,n)=L(\theta,a)+nc$

$$R(\theta,d)=E_\theta[L(\theta,\delta_N(x^N),N)]$$

$$=P(N=0)L(\theta,\delta_0,0)+\sum_{n=1}^{\infty}L(\theta,\delta_n(x^n),n)P_\theta(N=n)$$

$$= P(N=0)L(\theta,\delta_0,0) + \sum_{n=1}^{\infty} L(\theta,\delta_n(x^n),n)F_n(x^n/\theta)$$

$$= P(N=0)L(\theta,\delta_0,0) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\{N=n\}} L(\theta,\delta_n(x^n),n)f_n(x^n/\theta)$$

$$= P(N=0)L(\theta,\delta_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\{N=n\}} L(\theta,\delta_n(x^n))f_n(x^n/\theta) + c\sum_{n=1}^{\infty} nP_0(N=n)$$

Definisi 2.7.7

Resiko Bayes pada prosedur sekuensial d didefinisikan sebagai

$$r(\pi,d) = E^{\pi}\left[R(\theta,d)\right]$$

Suatu prosedur sekuensial yang meminimalkan r(π,d) dinamakan prosedur sekuensial Bayes yang dinyatakan

$$d^{\pi} = \left(\tau^{\pi},\delta^{\pi}\right)$$

Resiko Bayes pada permasalahan didefinisikan sebagai

$$r(\pi) = \inf_{d} r(\pi,d)$$

Bentuk lain dari resiko bayes pada prosedur keputusan sekuensial :

$$r(\pi,d) = E^{\pi}\left[R(\theta,d)\right]$$

$$= E^{\pi}[P(N=0)L(\theta,\delta_0,0)] + \sum_{n=1}^{\infty} E^{\pi}[P_0(N=n)L(\theta,\delta_n(x^n),n)]$$

$$= P(N=0)E^{\pi}[L(\theta,\delta_0,0)] + \sum_{n=1}^{\infty} E^{\pi}[L(\theta,\delta_n(x^n),n)F_n(x^n/\theta)]$$

$$= P(N=0)\sum_{0} L(\theta,\delta_0,0)\pi(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{0}[L(\theta,\delta_n(x^n),n)F_n(x^n/\theta)]\pi(\theta)$$

$$= P(N=0)\sum_{0} L(\theta,\delta_0,0)\pi(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{0}[\sum_{(N=n)} L(\theta,\delta_n(x^n),n)f_n(x^n/\theta)]\pi(\theta)$$

$$= P(N=0)\sum_{0} L(\theta,\delta_0,0)\pi(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{0}\sum_{(N=n)} L(\theta,\delta_n(x^n),n)f_n(x^n/\theta)\pi(\theta)$$

$$= P(N=0)\sum_{0} L(\theta,\delta_0,0)\pi(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{0}\sum_{(N=n)} L(\theta,\delta_n(x^n),n)\pi(\theta/x^n)m_n(x^n)$$

$$= P(N=0)\sum_{0} L(\theta,\delta_0,0)\pi(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{(N=n)}\sum_{0} L(\theta,\delta_n(x^n),n)\pi(\theta/x^n)m_n(x^n)$$

Misalkan $r_0(\pi^n,\delta_n(x^n),n) = \sum_{\theta} L(\theta,\delta_n(x^n),n)\pi(\theta / x^n)$

$$r(\pi,d) = P(N=0)r_0(\pi^n,\delta_0,0) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{(N=n)} r_0(\pi^n,\delta_n(x^n),n)m_n(x^n)$$

$r(\pi,d)$ akan diminimumkan jika δ_0 dan δ_n .dipilih untuk meminimumkan kerugian posterior yang diharapkan $r_0(\pi^n,\delta_n(x^n),n)$. Hal ini dilakukan pada ukuran sampel yang ditetapkan.

Hasil 1 : Bagi n = 0, 1, 2,... asumsikan bahwa $\delta_n^{\pi}(x^n)$ adalah merupakan aturan keputusan Bayes untuk permasalahan keputusan ukuran sampel yang ditetapkan dengan observasi-observasi $X_1, X_2,\ldots X_n$ dan kerugian $L(\theta, a, n)$. Maka $\delta^n = (\delta_0^{\pi}, \delta_1^{\pi},\ldots)$..adalah aturan keputusan sekuensial Bayes

Kerugian ekspektasi posterior yang diminimumkan disebut resiko bayes posterior yang dinyatakan sebagai berikut :

$$r_0(\pi^n,n) = \inf_{a\in A} r_0(\pi^n,a,n)$$

$$= \rho_0(\pi^n) + nc$$

dimana $\rho_0(\pi^n) + nc = E^{\pi^n}[L(\theta,\delta_n(x^n),n)]$

Definisi 2.7.8

Ekspektasi resiko bayes posterior pada variabel random X adalah

$$E^*[\rho_o(\pi(\theta/x))] = \sum_{x}\rho_o(\pi(\theta/x).m(x)$$

2.8 Analisa Prosedur Keputusan Sekuensial Bayesian.

2.8.1 Eksperimen Sekuensial Baru

Setelah setiap observasi baru diambil sangat berguna untuk mempertimbangkan masalah sekuensial baru yang dimulai pada saat itu.. Asumsikan x^n telah diobservasi dan pertimbangkan eksperimen sekuensial baru, yang dinyatakan ξ_n (x^n),yang mana kemungkinan observasi-observasinya adalah X_{n+1}, X_{n+2}, .., kerugiannya adalah $L(\theta, a, j)$ dan priornya adalah $\pi(\theta)$. Distribusi – distribusi pada X_i memang seharus dipertimbangkan sebagai distribusi-distribusi kondisional relevan yang diberikan X^n dan θ.

Definisi 2.8.1.1

Misalkan D^n.untuk menyatakan kelas dari semua prosedur-prosedur sekuensial didalam permasalahan ξ_n (x^n) yang mempunyai kerugian $L(\theta,a,j)$, prior $\pi(\theta)$ dan observasi-observasi sekuensial X_{n+1}, X_{n+2},.....Nyatakan resiko Bayes dari suatu prosedur $d \in D^n$ dengan $r(\pi^n, d, n)$

dan misalkan :

$$r(\pi^n, d) = \inf_{d \in D^n} r(\pi^n, d, n)$$

$r(\pi^n, n)$ merupakan resiko bayes dari pemrosesan didalam bentuk optimal dimana nilainya dapat bergantung pada X^n melalui π^n dan distribusi-distribusi X_{n+1}, X_{n+2} ....

2.8.2 Prosedur Penyingkatan Bayes

Pada prosedur sekuensial bayes kemungkinannya aturan penghentian sekuensial bayes kedepan tak terbatas. Cara yang mudah untuk menyelesaikan ini adalah dengan mempertimbangkan pembatasan prosedur yang mana waktu penghentian dibatasi dengan mempertimbangkan permasalahan sekuensial yang dimulai pada waktu n+1.

Definisi 2.8.2.1

Pada eksperimen sekuensial ξ_n (x^n) dengan prosedur D^n , misalkan D^n_m menyatakan himpunan bagian pada prosedur dalam D^n yang mengambil observasi sebanyak m.

Prosedur ini akan disebut prosedur penyingkatan m, didefinisikan sebagai berikut

$$r_m(\pi^n, d) = \inf_{d \in D^n_m} r(\pi^n, d, n)$$

Yang akan disebut resiko bayes penyingkatan m untuk eksperimen sekuensial yang dimulai pada tingkat n.

$r_m(\pi^n, n)$ menyatakan bentuk resiko bayes pada model sekuensial optimal, dimana n telah dijangkau dan diasumsikan bahwa penambahan observasi sebanyak m dapat diambilPerhatikan bahwa $D_m^n \subset D_{m+1}^n$ fungsi $r_m(\pi^n, n)$ jelasnya tidak mengalami kenaikan didalam m.

Teorema 2.8.2.1

Diantara semua aturan keputusan sekuensial bayes, δ^π dimana tidak lebih dari observasi yang diambil, τ^m sehingga prosedur penyingkatan m bayes $d^m = (\tau^m, \delta^\pi)$, maka τ^m menghentikan sampling dan membuat keputusan untuk ke-n observasi (n = 0, 1, 2 ....m) jika $r_0(\pi^n, n) \leq r_{m-n}(\pi^n, n)$

Bukti:

Pada tingkatan 0 akan didapat $r_0(\pi, 0)$ dan $r_m(\pi, 0)$ yang kemudian akan dibandingkan bila $r_0(\pi, 0) \leq r_m(\pi, 0)$ maka sampling akan dihentikan. Sebaliknya akan melanjutkan sampling pada tingkatan 1 sehingga didapatkan $r_0(\pi^1, 1)$ dan $r_{m-1}(\pi^1, 1)$ juga akan dibandingakan bila $r_0(\pi^1, 1) \leq r_{m-1}(\pi^1, 1)$ maka sampling akan dihentikan , sebaliknya akan melanjutkan sampling. Sehingga akan mencapai tingkatan m yang mana menghasilkan model aturan penghentian τ^m

Akibat 2.8.2.1

Mengasumsikan bahwa aturan keputusan bayes ada untuk semua n,.Jika banyaknya fungsi-fungsi $r_j(\pi^n, n)$ terbatas yang mana $j \leq m$ dan $n \leq m-j$ maka

$$r_j(\pi^n, n) = \min\{r_0(\pi^n, n). E^*[r_{j-1}(\pi^n(\theta / X_{n+1}), n+1)]\}$$

Bukti

Dimisalkan sebanyak satu penambahan obsevasi yang diambil j = 1. Hal ini menimbulkan dua kemungkinan tindakan tertentu yaitu

1. Membuat keputusan segera dengan resiko bayes posterior $(r_0(\pi^n, n))$ atau

2. Mengobsrvasi X_{n+1} dan kemudian membuat keputusan segera

Karena X_{n+1} acak maka ekspektasi resiko bayes posteriornya adalah:

$$E^*[r_0(\pi^n(\theta / X_{n+1}), n+1)]$$

Jelasnya $r_1(\pi^n, n)$ resiko bayes pada cara tindakan yang optimal ketika sebanyak satu observasi yang disediakan semestinya lebih kecil dari $r_0(\pi^n, n)$ dan $E^*[r_0(\pi^n(\theta / X_{n+1}), n+1)]$.

Secara eksak alasan yang sama berlaku bagi semua j. Salah satunya keputusan segera dibuat menyebabkan resiko bayes posrerior $r_0(\pi^n, n)$ atau X_{n+1} diobservasi, dimana kasusnya sebanyak j -1 lebih observasi yang dapat diambil. Ekspektasi resiko bayes posterior pada tindakan ini adalah $E^*[r_0(\pi^n(\theta / X_{n+1}), n+1)]$.Dimana $r_j(\pi^n, n)$ resiko bayes pada cara tindakan yang optimal ketika sebanyak j - 1 observasi yang disediakan semestinya lebih kecil dari $r_0(\pi^n, n)$ dan $E^*[r_{j-1}(\pi^n(\theta / X_{n+1}), n+1)]$.

Karena hal ini dilakukan secara induktif kebelakang dari tingkatan akhir observasi sampai ke tingkatan awal observasi maka akan didapatkan hubungan :

$$r_j(\pi^n, n) = \min\{r_0(\pi^n, n), E^*[r_{j-1}(\pi^n(\theta / X_{n+1}), n+1)]\}$$

2.8.3 Prosedur Penyingkatan Kedalam.

Pembatasan prosedur yang tidak lebih dari bilangan observasi maksimum tertentu :

Definisi 2.8.3.1

Kerugian penyingkatan kedalam m, dinyatakan :

$$L^m = \begin{cases} L(\theta, a, n) & jika\ n < m \\ inf_a L(\theta, a, m) & jika\ n \geq m \end{cases}$$

Permasalanhan sekuensial didalam kerugian L diganti dengan L^m disebut *permasalahan penyingkatan kedalam m.* Bentuk penting pada $L^m(\theta, a, n)$ yaitu ketika n = m. yang diasumsikan tindakan optimal akan diambil.

Pada situasi ini, penyingkatan kedalam mempunyai arti penting bahwa kerugian keputusan akan bebas jika observasi ke-m diambil.

Didalam prosedur Bayes penyingkatan ke dalam m, d_j^m dan resiko bayes pada permasalahan, $r_j^m(\pi, d_j^m)$ bahwa $L^m(\theta, a, n)$ konstan (kemungkinan tergantung pada θ) untuk $n \geq m$. Karena itu, tidak ada yang dapat diperoleh didalam pengambilan observasi lebih dari m dan pemeriksaan dapat dibatasi pada pertimbangan penyingkatan kedalam m.

Penjelasan teorema 2.8.2.1 dan teorema 2.8.2.2 sangat membantu untuk mengindikasikan ketergantungan penyingkatan kedalam nilai m.pada fungsi-fungsi $r_j(\pi^n, n)$.(Untuk permasalahan penyingkatan kedalam m, $r_0(\pi^n, n)$ dan $r_j(\pi^n, n)$ seharusnya tertentu, dihitung dari pengaruh kerugian $L^m(\theta, a, n)$).
Kemudian misalkan $r_j(\pi^n, n)$ menyatakan hubungan kuantitas untuuk kerugian $L^m(\theta, a, n)$. Simbol-simbol $r_j(\pi^n, n)$ akan menyatakan untuk resiko bayes pada kerugian sesungguhnya, $L^m(\theta, a, n)$. Perhatiakan bahwa

$$r_j^m(\pi^n, n) = r_j(\pi^n, n) \qquad \text{jika } n + j < m$$

Hal ini menyebabakan tingkat ke-m tidak dapat dijangkau jika $n + j < m$ ($r_j^m(\pi^n, n)$ dan $r_j(\pi^n, n)$ resiko bayes sebelum optimal dimana sebanyak j langkah sesudah n).

$r_m^m(\pi^n, n)$ menyatakan resiko bayes optimal diantara semua prosedur penyingkatan pada m untuk kerugian $L^m(\theta, a, n)$. Ketika d_j^m ada sedemikian sehingga $r_j^m(\pi^n, n) = r_m^m(\pi^n, n)$. Jadi

$$L^m(\theta, a, n) \leq L(\theta, a, n)$$

Sedemikian sehingga :

$$r_m^m(\pi, 0) \leq r(\pi)$$

$r_m^m(\pi, 0) \leq r(\pi)$ yang konstan merupakan batas bawah untuk $r(\pi)$.

2.9 Teori Prosedur Bayes.

Prosedur Bayes mempunyai resiko bayes terkecil diantara prosedur yang mana mengambil kurang lebih satu observasi. Karena itu resiko bayes pada permasalahain lebih kecil dari resiko bayes posterior pada keputusan segera ($r_0(\pi^n,n)$) dan resiko bayes terkecil diantara prosedur yang mana mengambil kurang lebih satu observasi ($r^*(\pi^n,n)$)

2.9.1 Keberadaan Prosedur Bayes

Dipertimbangkan permasalahan keputusan dimana statiskawan memilih beberapa prosedur keputusan sekuensial dari kelas D pada semua prosedur yang akhirnya akan berakhir.

Definisi 2.9.1.1

Misalkan $L^m(\theta,a,n)$ dan $r^m(\pi^n,n)$ tidak turun dalam m, dimana n < m :

$$\lim_{m\to\infty} L^m(\theta,a,n) = L(\theta,a,n)$$

sedemikian sehingga :

$$\lim_{m\to\infty} r^m(\pi^n,n) = r^\infty(\pi^n,n)$$

Permasalahan sekuensial dengan prior π^n, kerugian $L^m(\theta,a,j)$ dan kemungkinan observasi X_{n+1}, X_{n+2} .....Misalkan $r^m(\pi^n, d, n)$ menyatakan resiko bayes pada prosedur d didalam permasalahan ini dan misalkan $r^m(\pi^n, n)$ menyatakan resiko bayes untuk permasalahan. *Pengamatan jika n · m*, maka :

$$r^m(\pi^n,n) = \min\{r_0(\pi^n,n), E^*[r^m(\pi^n(\theta / X_{n+1})]\}$$

Menurut aplikasi dari teorema 2.8.2.2 pada kerugian L^m mempunyai arti penting bahwa $r^m(\pi^n,n) = r_{m-n}(\pi^n,n)$.

Definisi 2.9.1.2

Untuk n < m, misalkan :

$$r^{m}(\pi^{n},n) = \min\{r_0(\pi^{n},n), E^*[r^{m}(\pi^{n}(\theta / X_{n+1}),n+1]\}$$

sedemikian sehingga :

$$r^{\infty}(\pi^{n},n) = \min\{r_0(\pi^{n},n), E^*[r^{\infty}(\pi^{n}(\theta / X_{n+1}),n+1]\}$$

Menurut teorema konvergen monoton dimana :

$$\lim_{m \to \infty} E^*[r^{m}(\pi^{n}(\theta / X_{n+1},n+1)] = E^*[r^{\infty}(\pi^{n}(\theta / X_{n+1}),n+1]$$

Pertimbangkan sekarang aturan penghentian untuk permasalahan sekuensial asli yang dinyatakan τ^* yang menghentikan sampling untuik n pertama. yang mana $r_0(\pi^n,n) < \infty$ dan $r_0(\pi^n,n) = r^{\infty}(\pi^n,n)$.Prosedur semu $d^*(\tau^*,\delta^{\pi})$ akan menunjukkan prosedur pada permasalahan yang sesungguhnya. Disebut prosedur semu karena belum menunjukkan menghentikan sampling dengan probabilitas satu.

Didalam permasalahan ini $L^{m}(\theta,a,n) = \inf_{a} L(\theta,a,m)$ untuk n ≥ m tidak akan diperdulikan yang terjadi sehingga dalam hal ini akan dilakukan prosedur semu d, yang mana $r^m(\pi^n, d, n)$.akan didefinikan dengan baik dengan $\inf_a L(\theta, a, n)$ tidak menghentikan sampling.

2.9.2 Pendekatan Prosedur Bayes

Pendekatan prosedur bayes ini berdasarkan pada prosedur penyingkatan prosedur bayes.

Teorema 2.9.2.1

Diantara semua aturan keputusan sekuensial bayes,δ^n dimana kurang lebih satu observasi diambil yang dimulai pada tingkat n ,τ^n sehingga prosedur bayes $d^n = (\tau^n, \delta^n)$, jika n ≤ m maka $r^{m}(\pi^{n},d^{n},n) \le r^{\infty}(\pi^{n},n)$

Bukti

n ≤ m bila hanya bila n = m atau n < m

i) Untuk n = m atau m - n = 0 maka

$$L^m(\theta,a,n) = \lim_a L(\theta,a,n)$$

Karena itu

$$E^{\pi^m}[L^m(\theta,a,n)] = r^m(\pi^n,d^n,n) = E^{\pi^m}[\lim_a L(\theta,a,n)] = r^m(\pi^m,m) \le r^\infty(\pi^m,m)$$

Bila m = n sedemikian sehingga

$$r^m(\pi^n,d^n,n) \le r^\infty(\pi^n,n)$$

ii) untuk n < m.

Asumsikan bahwa m - n = j. Hal ini juga berlaku untuk m - n = j + 1.sehingga n < m.

Dari definisi τ* bahwa :

$$r_0(\pi^n,n) = r^\infty(\pi^n,n) < \infty$$

maka d^n, akan membuat keputusan segera, dengan resiko bayes posterior $r_0(\pi^n,n)$

Andaikan $r_0(\pi^n,n) > r^\infty(\pi^n,n)$ maka observasi lain akan diambil sehingga menunjukkan bahwa :

$$r^m(\pi^n,d^n,n) = E^*[r^m(\pi^n(\theta / X_{n+1}),d^{n+1},n+1)]$$

Tetapi

$$r^m(\pi^{n+1},d^{n+1},n+1) = r^m(\pi^n(\theta / X_{n+1}),d^{n+1},n+1)$$

dan m - (n + 1) = j. Karena itu dengan induksi hipotesis bahwa :

$$r^m(\pi^n(\theta / X_{n+1}),d^{n+1},n+1) \le r^\infty(\pi^n(\theta / X_{n+1}),n+1)$$

Mengkombinasikan ini dengan :

$(r^m(\pi^n,d^n,n) = E^*[r^m(\pi^n(\theta / X_{n+1}),d^{n+1},n+1)])$, menunjukkan bahwa :

$$r^m(\pi^n,d^n,n) \le E^*[r^m(\pi^\infty(\theta / X_{n+1}),n+1)]$$

Karena kita mempertimbangkan kasus dimana $r_0(\pi^n,n)$ tidak terbatas atau $r_0(\pi^n,n) > r^\infty(\pi^n,n)$, $(r^\infty(\pi^n,n) = \min\{r_0(\pi^n,n), E^*[r^\infty(\pi^n(\theta / X_{n+1}),n+1\})$

dan $(r^{m}(\pi^{n},d^{n},n) \le E^{*}[r^{m}(\pi^{\infty}(\theta / X_{n+1}),n+1)])$ sedemikian sehingga $r^{m}(\pi^{n},d^{n},n) \le r^{\infty}(\pi^{n},n)$.

Teorema 2.9.2.2

Asumsikan bahwa

a) Ada prosedur sekuensial, d, dengan resiko bayes terbatas dan

b) Dengan probabilitas satu (di bawah π), $\inf_a L(\theta, a, n) \to \infty$ sebagaimana $m \to \infty$ (misalkan harga sampling menuju tak terbatas sebagaimana $m \to \infty$)

maka

$$\lim_{m\to\infty} r_m^{m}(\pi,0) = r(\pi)$$

Bukti

a) Pemgambilan limit untuk n = 0 dan mengunakan untuk menunjukkan bahwa

$$\lim_{m\to\infty} r^{m}(\pi^{n},d^{n},n) \le r^{\infty}(\pi^{n},n) \le r(\pi)$$

karena $r(\pi) < \infty$ maka

$$\lim_{m\to\infty} r^{m}(\pi^{n},d^{*},0) < \infty$$

Hal ini menunjukkan kondisi a) pada teorema.

b) Untuk $\lim_a L(\theta,a,m)$ menyatakan kerugian jika d* tidak menghentikan sampling, jelaslah bahwa

$$r^{m}(\pi^{n},d^{*},0) \ge E^{\pi}[\{\inf_a L(\theta,a,n)\}\lambda(\theta)]$$

dimana $\lambda(\theta)$ merupakan probabilitas yang mana d* tidak menghentikan sampling, karena itu mengimplikasikan bahwa :

$$\lim_{m\to\infty} E^{\pi}[\{\inf_a L(\theta,a,n)\}\lambda(\theta)] < \infty$$

Argumen analisis standard menunjukkan bahwa ini konsisten dengan kondisi b pada teorema hanya jika $\lambda(\theta) = 0$ dengan probabilitas satu(dengan pengaruh π) karena itu benar-benar prosedur yang penuh

Akhirnya dan aplikasi lain pada teorema konvergen monoton menunjukkan bahwa

$$\lim_{m \to \infty} r^{m}(\pi^{n}, d^*, 0) = r(\pi, d^*)$$

Bersamaan dengan ini mengimplikasikan bahwa

$$r(\pi, d^*) = r(\pi)$$

dan karena itu d* merupakan prosedur bayes, menurut persamaan bahwa $r^{\pi}(\pi, d^*) = r(\pi)$ sedemikian sehingga

$$r_{m}^{m}(\pi^{n}, 0) = r^{m}(\pi, 0) \Rightarrow r(\pi)$$

maka

$$\lim_{m \to \infty} r_{m}^{m}(\pi^{n}, 0) = r(\pi)$$

Akibat 2.9.2.1

Misalkan bahwa

a) X_1, X_1 ... sekuensial sampel

b) $L(\theta, a, n) = L(\theta, a) + nc$, dimana $c > 0$ dan

c) ada prosedur sekuensial,d, dengan resiko bayes tebatas

Maka prosedur bayes, d^{π},ada dan d^{π} menghentiakn sampling, untuk n pertama dimana $\rho_0(\pi^{n})$terbatas dan dimana $\rho^{\infty}(\pi^{n})$ memberikan persaman :

$$\rho^{\infty}(\pi^{n}) = min\{\rho_0(\pi^{n}), E^* [\rho^{\infty}(\pi^{n}(0 \quad X_{n+1}))] + 1\}$$

Bukti

Menyatakan kembali bahwa $\rho_0(\pi^{n}) = \inf_a E^{\pi^{n}}[L(\theta, a)]$, dengan mudah dicek bahwa

$$r_0(\pi^{n}, n) = \rho_0(\pi^{n}) + nc$$

dan bahwa r^{∞} dapat ditulis sebagai $r^{\infty}(\pi^{n}, n) = \rho^{\infty}(\pi^{n}) + nc$.Hasil ini berasal dari teorema 2.9.2.2.,karena itu selalu kita asumsikan bahwa $L(\theta, a) \geq -\infty$