LAMPIRAN A

Atom Hidrogen Yang Dikenakan Gangguan Medan Magnet Luar

Percobaan-percobaan menunjukkan bahwa frekuensi dari emisi radiasi dengan dieksitasi atom-atom hidrogen pada medan magnet adalah berubah sampai ke harga medan nolnya. Sebagai hasilnya, medan magnetik menyebabkan beberapa perpecahan garis spektral. Untuk menjelaskan efek-efek ini dibutuhkan modifikasi persamaan Schrödinger dengan memasukkan efek dari medan magnet eksternal. Caranya yaitu menjumlahkan bagian-bagian Hamiltoniannya, dengan catatan untuk energi tambahan daripada elektron terjadi karena kehadiran medan magnetik. Pada masalah ini dirumuskan mengenai hubungan diantara gangguan Hamiltonian dan kerja yang dilakukan pada elektron oleh gangguan medan magnetik.

Anggaplah sebuah elektron berputar dalam orbit tertutup C. Kerja yang dilakukan pada elektron (bermuatan e) pada skala revolusi medan listrik $\vec{E}$ adalah

$$\frac{\vec{W}}{R_{ev}} = - e \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$= - e \int_s (\nabla \times \vec{E}) . \vec{n} \, ds \qquad (A.1)$$

Pada persamaan terakhir dikerjakan dengan menggunakan teorema Stokes pada kalkulus vektor :

$$\int_s (\nabla \times \vec{A}) . \vec{n} \, ds = \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{r} \qquad (A.2)$$

Dengan hubungan integral-integral Countur (diluar C) pada beberapa perubahan vektor $\vec{A}$ ke permukaan integral adalah

$\nabla \times \vec{A}$. Permukaan S adalah dilingkupi oleh C. $\vec{n}$ adalah unit vektor normal pada S, sementara ds adalah luasan permukaan differensial, dr adalah jarak differensial sepanjang C. Dengan menggunakan persamaan Maxwell

$$\nabla \times \vec{E}(t) = - \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \qquad (A.3)$$

dan kemudian mengambil perumusan dari (A.1), diperoleh

$$\frac{\vec{W}}{R_{ev}} = e \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot \vec{n} \, ds$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left[e \pi r^2 B(t) \right] \qquad (A.4)$$

Anggaplah orbit elektron beradius r dengan sebuah komponen medan magnetik uniform B, normal pada bidang orbit.

Sebuah elektron dengan momentum p dan massa m akan menjalani sebuah revolusi didalam periode :

$$T = \frac{2 \pi r}{p / m}$$

Sehingga kerja yang telah dilakukan elektron didalam waktu dt sama dengan kerja per revolusi (A.4) dikalikan bilangan revulusi didalam dt (yaitu dt/T) :

$$dW = \left(e \pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} \right) \times \frac{p}{2 \pi r m} dt$$

$$= \frac{e r p}{2m} \frac{\partial B}{\partial t} dt$$

$$= \frac{e r p}{2m} dB \qquad (A.5)$$

dengan $dB = (\partial B/\partial t)dt$ adalah perubahan B selama dt.

Untuk memperoleh perubahan energi dari sebuah elektron didalam medan magnetik B, diintegralkan persamaan (A.5) dari 0 sampai B.

$$\Delta W = e\ r\ p\ B\ /\ 2m \qquad (A.6)$$

Karena B adalah komponen medan normal pada orbit dapat dituliskan kembali operator Hamiltonian yang berhubungan dengan ΔW sebagai :

$$\Delta W = \frac{e}{2\ m}\left[\vec{r} \times \vec{p}\right] . \vec{B}$$

$$= \frac{e}{2\ m}\ \vec{L}\ .\ \vec{B} = -\vec{\mu}_l .\ \vec{B} \qquad (A.7)$$

Dengan $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ adalah operator momentum putar orbital. Karena interaksi energi dari sebuah dipol magnetik $\vec{\mu}$ didalam sebuah induksi magnetik $\vec{B}$ adalah $-\vec{\mu}\ .\ \vec{B}$, diidentifikasikan

$$\vec{\mu}_l = -\ \frac{e}{2\ m}\ \vec{L} \qquad (A.8)$$

Sebagai operator momen magnetik yang sering dituliskan sebagai

$$\vec{\mu}_l = -\ \frac{e\ \hbar}{2\ m}\left[\frac{\vec{L}}{\hbar}\right] = -\beta\left[\frac{\vec{L}}{\hbar}\right] \qquad (A.9)$$

dengan $\beta = eh/2m$, magnetik Bohr, adalah bilangan yang sama dengan $9{,}272 \times 10^{-24}$ (Joule m^2)/weber.

Hamiltonian total pada sebuah elektron didalam sebuah medan potensial simetrik bola dan sebuah medan seragam (uniform) $\vec{B}$ dapat diperoleh sebagai penjumlahan dari medan Hamiltonian dan energi interaksi magnetik (A.7) :

$$H = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{L}{2mr^2} + V(r)\right] + \frac{\beta}{\hbar}\vec{L}.\vec{B}$$

atau

$$H = H_o + \frac{\beta}{\hbar}\vec{L}.\vec{B}$$

$$= H + \frac{\beta}{\hbar}\ B\ L_z \qquad (A.10)$$

dengan arah z telah dipilih sebagai arah $\vec{B}$.

Perumusan mekanika kuantum yang lebih sesuai dari Hamiltonian (A.10) dimulai dengan pernyataan Hamiltonian dari sebuah elektron pada sebuah vektor potensial $\vec{A}$ dan sebuah potensial skalar statik V(r)

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 + V(r)$$

$$= H_o + \frac{i\,e\,\hbar}{2\,m}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right) + \frac{e^2}{2\,m}\vec{A}^2$$

dengan :

$$H_o = \frac{p^2}{2\,m} + V(r)$$

$$\vec{p} = -i\,\hbar\,\vec{\nabla}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

dan hubungannya dengan medan E adalah

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V$$

Anggaplah kasusnya medan magnetik seragam $\vec{B} = \hat{a}_z B$. Hubungannya dengan vektor potensial $\vec{A}$ dapat dituliskan sebagai

$$\vec{A} = \hat{a}_x \left(-1/2\ y\ B \right) + \hat{a}_y \left(1/2\ x\ B \right)$$

Dengan pemilihan $\vec{A}$, operator Hamiltonian menjadi

$$H = H_o + \frac{i\,e\,\hbar\,B}{2\,m}\left[x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right] + \frac{e^2B^2}{8\,m}\left(x^2 + y^2\right)$$

Dengan menggunakan definisi operator momentum putar $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -i\,\hbar\,\vec{r} \times \vec{\nabla}$, dapat dituliskan sebagai :

$$H = H_o + \left(\frac{\beta}{\hbar}\right) L_z\ B + \frac{e^2\ A^2}{2\,m}$$

$$= H_o + \left(\frac{\beta}{\hbar}\right)\vec{L}\cdot\vec{B} + \frac{e^2B^2}{8\,m}\left(x^2 + y^2\right) \qquad \text{(A.11)}$$

dengan $\beta = |e|\ \hbar\ /\ 2m$. Hasil ini sesuai dengan (A.10) yang telah dibuktikan dengan menghilangkan faktor-faktornya termasuk (x^2+y^2). Hal ini merupakan referensi pada kontribusi diamagnetik dan faktor ini sering kali diabaikan dalam kasus dengan bilangan momentum anguler kuantum l atau spin s tidak sama dengan nol.

Dalam kasus seperti ini sangatlah mudah untuk menunjukkan bahwa rasio dari faktor diamagnetik $(\beta/\hbar)\ \vec{L}.\vec{B}$ adalah merupakan bagian dari harga $e\ B\ \langle r^2\rangle/6\hbar$ dan dapat diabaikan untuk range harga B yang telah ditemukan dalam percobaan laboratorium yaitu 10^2 weber/m^2.

Operator-operator H_o dan L_z adalah saling kommut satu sama lainnya. Sebagai akibatnya memiliki fungsi eigen bersama $\langle r\theta\phi|nlm\rangle$ (catatan bahwa m adalah bilangan bulat dan bukannya massa elektron). Energi E_{nlm} dari operator Hamiltonian bisa diperoleh dengan penyelesaian

$$H|nlm\rangle = E_{nlm}|nlm\rangle$$

Dengan menggunakan (A.10) dan hubungan $L_z|nlm\rangle = m\ \hbar|nlm\rangle$, $H_o|nlm\rangle = E_{nl}|nlm\rangle$ persamaan nilai eigen menjadi :

$$H_o\ |nlm\rangle + \frac{\beta}{\hbar}\ B\ L_z\ |nlm\rangle = (\ E_{nl} + m\ \beta\ B\ )\ |nlm\rangle$$

sehingga

$$\left[\ H_o + \frac{\beta}{\hbar}\ B\ L_z\ \right]|nlm\rangle = (\ E_{nl} + m\ \beta\ B\ )|nlm\rangle = E_{nlm}|nlm\rangle$$

$$E_{nlm} = E_{nl} + m\ \beta\ B \quad (\ m = -l, -l+1, \ldots, l\ ) \qquad (A.12)$$

Nilai-nilai eigen tenaga atom hidrogen sebelum terganggu hanya bergantung kepada n, maka nilai-nilai tersebut bersifat degenerasi terhadap l dan m. Untuk setiap nilai n, l dapat bernilai dari 0 ke n-1, dan bagi setiap niali l ini, m dapat bernilai dari -1 ke +1. Maka, degenerasi keseluruhan bagi tingkat tenaga E_{nl} ialah :

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = 2 \frac{n (n - 1)}{2} + n = n^2$$

Degenerasi terhadap m adalah merupakan ciri dari sembarang medan gaya terpusat, yaitu fungsi potensial yang hanya bergantung kepada jarak radius r dari suatu titik, kecuali untuk medan coulomb dengan degenerasi l merupakan suatu ciri khusus yang membedakannya dengan fungsi potensial simetri bola lainnya. Apabila suatu medan luar seperti medan magnet dikenakan pada sistem, simetri bola yang pada mulanya ada seluruhnya dimusnahkan. Maka degenerasi orbital (2l + 1) bagi nomor kuantum magnet m akan hilang dan tingkat ke n dipisahkan menjadi n^2 tingkat -tingkat yang berlainan.

LAMPIRAN B

Bahasan Singkat Mengenai Operator Momentum Anguler dan Teori Atom Hidrogen Sebelum Diganggu

B.1. Operator Momentum Anguler

Operator pangkat dua momentum anguler total didalam fungsi θ,ϕ dapat diekspresikan dengan persamaan :

$$\langle\theta,\phi|\ \vec{L} = -\hbar^2\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\ \frac{\partial}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi^2}\right\}\ \langle\theta,\phi| \tag{B.1.1}$$

Komponen sumbu z untuk operator $\vec{L}$ dalam fungsi θ,ϕ ialah

$$\langle\theta,\phi|\ \vec{L}_z = -i\hbar\ \frac{\partial}{\partial\phi}\ \langle\theta,\phi| \tag{B.1.2}$$

Operator $\vec{L}^2$ dan $\vec{L}_z$ kommut, $[\vec{L}^2,\vec{L}_z]=0$, karena fungsi $\partial/\partial\phi$ commut terhadap $\partial/\partial\phi^2$. Jadi fungsi $\langle\theta,\phi|\beta,m\rangle$ dapat diberikan secara simultan sebagai fungsi eigen untuk $\vec{L}^2$ dan $\vec{L}_z$.

Sekarang dibutuhkan pemecahan untuk $\langle\theta,\phi|\beta,m\rangle$ dan l_z didalam persamaan nilai eigen (B.1.2) dengan mengalikan ket $|\beta,m\rangle$ dari kanan.

$$\langle\theta,\phi|\vec{L}_z|\beta,m\rangle = -i\hbar\ \frac{\partial}{\partial\phi}\langle\theta,\phi|\beta,m\rangle$$

$$= l_z\ \langle\theta,\phi|\beta,m\rangle \tag{B.1.3}$$

dengan l_z adalah nilai eigen dari $\vec{L}_z$. Penyelesaian dari persamaan (B.1.3) adalah :

$\langle\theta,\phi|\beta,m\rangle = \exp\{ i (l_z/\hbar)\phi \} \times$ fungsi dalam θ. (B.1.4)

$\langle\theta,\phi|\beta,m\rangle$ membutuhkan sebuah fungsi nilai tunggal dalam ϕ, yang mengharuskan syarat :

$$\langle \theta,\phi + 2\pi \,|\beta,m \rangle = \langle\theta,\phi|\beta,m\rangle \qquad (B.1.5)$$

yang membatasi l_z untuk sebuah set diskrit :

$$l_z = m\hbar \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad (B.1.6)$$

Dengan mengambil nilai dari l_z yang diberikan dalam (B.1.6) fungsi eigen pada (B.1.4) menjadi

$$\langle\theta,\phi|\beta,m\rangle = (2\pi)^{-1/2}\, e^{im\phi} \times P_{\beta m}(\theta) \qquad (B.1.7)$$

dengan konstanta $(2\pi)^{-1/2}$ muncul dari syarat ortonormalitas

$$1 = N_m^2 \int_0^{2\pi} d\phi \;|\; e^{im\phi} \;|^2 = N_m^2 . 2\pi$$

$$N_m = 1/\sqrt{2\pi} \qquad (B.1.8)$$

Pesamaan nilai eigen untuk $\vec{L}^2$ diberikan oleh (B.1.9) sebagai :

$$-\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right] + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial\phi^2} \right\} \langle\theta,\phi|\beta,m\rangle =$$

$$\beta\, \hbar^2 \langle\theta,\phi|\beta,m\rangle \qquad (B.1.9)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (B.1.7) kepada (B.1.9) diperoleh :

$$\left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right] + \frac{-m}{\sin^2\theta} \right\} P_{\beta m}(\theta) = -\beta P_{\beta m}(\theta) \qquad (B.1.10)$$

Dengan mengganti variabel $w = \cos\theta$, maka persamaan (B.1.10) menjadi

$$(1-w^2) \frac{d^2P}{dw^2} - 2w \frac{dP}{dw} + \left(\beta - \frac{m^2}{1-w^2}\right) P = 0 \qquad (B.1.11)$$

yang tak lain daripada persamaan Legendre sekawan, dengan penyelesaian umumnya adalah :

$$P_l^m(\cos\theta) = \frac{(1-\cos^2\theta)^{m/2}}{2^l\, l!} \frac{d^{m+l}}{d(\cos\theta)^{m+l}} (\cos^2\theta - 1)^l \qquad (B.1.12)$$

dengan

$\beta = l(l + 1)$ dan $|m| \leq l$

Penyelesaian lengkap dari persamaan (B.1.19) dengan berpatokkan pada perumusan (B.1.7) adalah :

$$\langle\theta,\phi|l,m\rangle = \frac{N_{lm}}{\sqrt{2\pi}} P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\phi} \qquad (B.1.13)$$

Untuk mencari konstanta normalisasi N_{lm}, maka $\langle\theta,\phi|l,m\rangle$ harus dinormalisasikan berdasarkan kondisi :

$$1 = \langle l,m|l,m\rangle = \sum_{\theta,\phi} \langle l,m|\theta,\phi\rangle\langle\theta,\phi|l,m\rangle$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, |\langle\theta,\phi|l,m\rangle|^2$$

$$= \frac{N_{lm}^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(P_l^m(\cos\theta)\right)^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi \qquad (B.1.14)$$

dengan $\sum_{\theta,\phi} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta$ (B.1.15)

Dengan mengganti $w = \cos\theta$, persamaan (B.1.14) menjadi :

$$N_{lm}^2 \int_{-1}^{1} \left(P_l^m(w)\right)^2 dw = 1$$

konstanta normalisasinya diperoleh :

$$N_{lm} = \left\{ \left[\frac{2l + 1}{2} \right] \frac{(l - |m|)\,!}{(l + |m|)\,!} \right\}^{1/2} \qquad (B.1.16)$$

Penyelesaian lengkap dari (B.1.13) adalah :

$$\langle\theta,\phi|l,m\rangle = (-1)^m \left\{ \left[\frac{2l + 1}{2} \right] \frac{(l - |m|)\,!}{(l + |m|)\,!} \right\}^{1/2} P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi} \qquad (B.1.17)$$

dengan faktor $(-1)^m$ muncul dari kondisi $m>0$

$\langle\theta,\phi|l,m\rangle$ biasa disebut dengan *fungsi harmonik bola* dan dilambangkan sebagai :

$$\langle\theta,\phi|l,m\rangle = Y_{l,m}(\theta,\phi) \qquad (B.1.18)$$

Beberapa bentuk dari $Y_{l,m}$ adalah :

$$\langle\theta,\phi|l=0,m=0\rangle = Y_{0,0}(\theta,\phi) = 1/\sqrt{4\pi}$$

$$\langle\theta,\phi|1,0\rangle = Y_{1,0}(\theta,\phi) = -\sqrt{3/4\pi}\ \cos\theta$$

$$\langle\theta,\phi|1,\pm1\rangle = Y_{1,\pm1}(\theta,\phi) = \sqrt{3/8\pi}\ \sin\theta\ \exp(\pm i\phi)$$

$$\langle\theta,\phi|2,0\rangle = Y_{2,0}(\theta,\phi) = \sqrt{5/16\pi}\ (3\cos^2\theta - 1)$$

$$\langle\theta,\phi|2,\pm1\rangle = Y_{2,\pm1}(\theta,\phi) = -\sqrt{15/8\pi}\ \cos\theta\ \sin\theta\ \exp(\pm i\phi)$$

$$\langle\theta,\phi|2,\pm2\rangle = Y_{2,\pm2}(\theta,\phi) = \sqrt{15/32\pi}\ \sin^2\theta\ \exp(\pm 2i\phi)$$

B.2. Atom Hidrogen Sebelum Diganggu

Dalam kasus atom hidrogen, harga energi potensial radial listrik statiknya adalah :

$$V(r) = - \frac{Z\ e^2}{r} \qquad (B.2.1)$$

dengan e adalah besarnya muatan elektron dalam satuan esu

$$e^2 = \frac{e^2\ (\text{coulomb})}{4\pi\ \varepsilon_o} = 13{,}6\ \text{eV-A}^o \qquad (B.2.2)$$

Bentuk dari energi potansialnya didalam notasi bra $\langle r\theta\phi|$, adalah :

$$\langle r,\theta,\phi|\ V(\vec{r}) = V(\vec{r})\ \langle r,\theta,\phi| \qquad (B.2.3)$$

Didefinisikan operator momentum p_r sebagai :

$$\langle r,\theta,\phi|\ p_r = -\ i\hbar\ \frac{\partial}{\partial r}\ \langle r,\theta,\phi| \qquad (B.2.4)$$

Hubungan antara operator p_r dan perkalian titik (dot product) operator vektor $\vec{r}.\vec{p}$ adalah :

$$\vec{r}.\vec{p} = r\ p_r \qquad (B.2.5)$$

Harga operator pangkat dua momentum sudut total L^2, didefinisikan sebagai perkalian skalar dari dua perkalian silang (cross product) vektor $\vec{r}$ dan $\vec{p}$:

$$L^2 = (\vec{r} \times \vec{p}).(\vec{r} \times \vec{p}) = r^2 p^2 - (\vec{r}\ .\ \vec{p})^2 + i\hbar\ \vec{r}.\vec{p}$$

$$= r^2 p^2 - p_r r^2 p_r \qquad (B.2.6)$$

atau

$$p^2 = \frac{1}{r^2} L^2 + \frac{1}{r^2}\ p_r r^2 p_r \qquad (B.2.7)$$

Dengan melihat pada persamaan (B.2.4), dapat didefinisikan operator momentum $\vec{p}$ didalam notasi bra $\langle r,\theta,\phi|$ adalah :

$$\langle r,\theta,\phi|\ \vec{p}^2 = -\hbar^2\ \vec{\nabla}^2\ \langle r,\theta,\phi|$$
$$= \frac{1}{r^2}\ \langle r,\theta,\phi|\ \vec{L}^2 - \frac{\hbar^2}{r^2}\ \frac{\partial}{\partial r}\left[\ r^2\ \frac{\partial}{\partial r}\ \right]\ \langle r,\theta,\phi| \qquad \text{(B.2.8)}$$

Operator hamiltonian untuk sistem dua partikel pada kasus atom hidrogen didalam notasi bra, adalah :

$$\langle r,\theta,\phi|\ \vec{H}_m = \frac{1}{2m}\ \langle r,\theta,\phi|\ \vec{p}^2 + \langle r,\theta,\phi|\ V(\vec{r}) \qquad \text{(B.2.9)}$$

dengan

$$m = \left[\ \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\ \right]^{-1} \quad ; \quad \begin{array}{l} m_1 = \text{massa proton} \\ m_2 = \text{massa elektron} \end{array} \qquad \text{(B.2.10)}$$

Bila persamaan (B.2.8) disubstitusikan ke persamaan (B.2.9), kemudian dikalikan dengan ket $|n,l,m\rangle$ dari kanan, diperoleh persamaan :

$$\langle r\theta\phi|\ \vec{H}_m\ |nlm\rangle =$$

$$\frac{1}{2mr^2}\ \langle r\theta\phi|\ \vec{L}^2\ |nlm\rangle + \left[-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\ \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\ \frac{\partial}{\partial r}\right]+V(\vec{r})\right]\langle r\theta\phi|nlm\rangle$$
$$= E(m)\ \langle r\theta\phi|nlm\rangle \qquad \text{(B.2.11)}$$

Karena operator $\vec{H}_m$ dan $\vec{L}^2$ saling kommut

$$[\ \vec{L}^2,\vec{H}_m\ ] = 0 \qquad \text{(B.2.12)}$$

maka fungsi eigen $\langle r,\theta,\phi|n,l,m\rangle$ dapat digunakan secara simultan untuk $\vec{L}^2$ dan $\vec{H}_m$.

Operator $\vec{L}^2$ bukan merupakan suatu fungsi radial sehingga berlaku :

$$\langle r\theta\phi|\ \vec{L}^2\ |nlm\rangle = \langle r|n(l)\rangle\langle\theta\phi|\ \vec{L}^2\ |lm\rangle$$

$$= l(l+1)\hbar^2\ \langle r|n(l)\rangle\langle\theta\phi|lm\rangle$$

$$= l(l+1)\hbar^2\ \langle r\theta\phi|nlm\rangle \qquad \text{(B.2.13)}$$

dengan fungsi eigen :

$$\langle r\theta\phi|nlm\rangle = \langle r|n(l)\rangle\langle\theta\phi|lm\rangle$$

$$= R_{nl}(r).Y_{l,m}(\theta,\phi) \qquad \text{(B.2.14)}$$

Bila persamaan (B.2.13) disubstitusikan pada persamaan (B.2.11) akan diperoleh :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r)\right]\langle r\theta\phi|nlm\rangle$$

$$= E(m)\ \langle r\theta\phi|nlm\rangle \qquad \text{(B.2.15)}$$

Kemudian dengan memasukkan harga V(r) dari (B.2.1) dan mensubstitusikan persamaan (B.2.14) pada (B.2.15) didapatkan suatu persamaan nilai eigen sebagai fungsi radial :

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{r}R - E(m)\ R = 0$$

$$\text{(B.2.16)}$$

dengan solusi persamaan diatas adalah :

$$R_{nl}(\rho) = \langle r|n(l)\rangle = \rho^l\ \exp(-\rho/2)\ L_{n+l}^{2l+1}(\rho) \qquad \text{(B.2.17)}$$

dengan substitusi :

$$r^2 = \rho^2\ \frac{\hbar^2}{[-8m\ E(m)]} \qquad \text{(B.2.18)}$$

dan fungsi $L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$ dinamakan polinomial Laguerre sekawan. Nilai eigen (tingkat tenaganya) adalah :

$$E(m) = -\frac{Z^2 e^4 m}{2\hbar^2 n^2} = E_n(m) \qquad (B.2.19)$$

$n \geq l + 1$

Normalisasi integralnya diperoleh :

$$\int_0^\infty e^{-\rho} \rho^{2l} \left[L_{n+l}^{2l+1}(\rho) \right]^2 \rho^2 \, d\rho = \frac{2n\,[(n+l)!]^3}{(n-l-1)!} \qquad (B.2.20)$$

Fungsi eigen dari atom hidrogen adalah :

$\langle r,\theta,\phi | n,l,m \rangle$

$= \langle r | n(l) \rangle \langle \theta\phi | lm \rangle = R_{nl}(r) . Y_{l,m}(\theta,\phi)$

$$= \left\{ \left(\frac{2\,Z}{na_o} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\,[(n+l)!]^3} \right\}^{1/2} \rho^l \exp(-\rho/2)\, L_{n+l}^{2l+1}(\rho)\, Y_{l,m}(\theta,\phi)$$

(B.2.21)

Sebuah daftar dari beberapa fungsi eigen atom hidrogen keadaan rendah.

$$\langle r\theta\phi | 100 \rangle = \left(\pi\, a_o^3 \right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{r}{a_o} \right)$$

$$\langle r\theta\phi | 200 \rangle = \left(32\pi\, a_o^3 \right)^{-1/2} \left(2 - \frac{r}{a_o} \right) \exp\left(-\frac{r}{2a_o} \right)$$

$$\langle r\theta\phi | 210 \rangle = \left(32\pi\, a_o^3 \right)^{-1/2} \frac{r}{a_o} \exp\left(-\frac{r}{2a_o} \right) \cos\theta$$

$$\langle r\theta\phi | 21\pm1 \rangle = \left(64\pi\, a_o^3 \right)^{-1/2} \frac{r}{a_o} \exp\left(-\frac{r}{2a_o} \right) \sin\theta \; e^{\pm i\phi}$$

$$\langle r\theta\phi | 300 \rangle = \frac{1}{81} \left(3\pi\, a_o^3 \right)^{-1/2} \left(27 - 18\frac{r}{a_o} + 2\frac{r^2}{a_o^2} \right) \exp\left(-\frac{r}{3a_o} \right)$$

$$\langle r\theta\phi | 310 \rangle = \frac{2^{1/2}}{81} \left(\pi\, a_o^3 \right)^{-1/2} \left(6 - \frac{r}{a_o} \right) \frac{r}{a_o} \exp\left(-\frac{r}{3a_o} \right) \cos\theta$$

$$\langle r\theta\phi|31\pm1\rangle = \frac{1}{81}\left(\pi\ a_o^3\right)^{-1/2}\left(6-\frac{r}{a_o}\right)\frac{r}{a_o}\ \exp\left(-\frac{r}{3a_o}\right)\ \sin\theta\ e^{\pm i\phi}$$

$$\langle r\theta\phi|320\rangle = \frac{1}{81}\left(6\pi\ a_o^3\right)^{-1/2}\frac{r^2}{a_o^2}\ \exp\left(-\frac{r}{3a_o}\right)\ (3\cos^2\theta - 1)$$

$$\langle r\theta\phi|32\pm1\rangle = \frac{1}{81}\left(\pi\ a_o^3\right)^{-1/2}\frac{r^2}{a_o^2}\ \exp\left(-\frac{r}{3a_o}\right)\ \sin\theta\cos\theta\ e^{\pm i\phi}$$

$$\langle r\theta\phi|32\pm2\rangle = \frac{1}{162}\left(\pi\ a_o^3\right)^{-1/2}\frac{r^2}{a_o^2}\ \exp\left(-\frac{r}{3a_o}\right)\ \sin^2\theta\ e^{\pm 2i\phi}$$

LAMPIRAN C

Penentuan Hamiltonian Gangguan H^1 dan Operator-Operator Yang Terlibat Didalam Teori Gangguan.

C.1. Penentuan Hamiltonian Gangguan H^1 Dalam bentuk Komutator.

Hamiltonian gangguan H^1 untuk gangguan pada keadaan state dasar adalah

$$H^1 = e\,\mathcal{E}\,z = e\,\mathcal{E}\,r\cos\theta \qquad \text{(C.1.1)}$$

dengan θ adalah sudut diantara r dan z.

Hamiltonian tak terganggu H_o pada atom hidrogen didefinisikan sebagai :

$$H_o = -\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\} + V(r) \qquad \text{(C.1.2)}$$

dan operator Ω didefinisakan sebagai

$$\Omega = \frac{m\,a_o\,e\,\mathcal{E}}{\hbar^2}\left(\frac{r^2\cos\theta}{2} + a_o\,r\cos\theta\right) \qquad \text{(C.1.3)}$$

Sedemikian rupa sehingga berlaku

$$H^1|\,100\rangle = [H_o,\Omega\,]\,|\,100\rangle$$

dengan $|\,100\rangle = (\pi\,a_o\,)^{-1/2}\exp(-r/a_o)$ (C.1.4)

$$[H_o,\Omega]|100\rangle = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) +\right.\right.$$

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Bigg\} + V(r),\Omega\Bigg]\ |100\rangle$$

$$=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\right\},\Omega\right]\ |100\rangle$$

(C.1.5)

Karena variabel-variabel H_o yang tidak tertulis pada persamaan (C.1.5) adalah komut terhadap Ω.

Persamaan (C.1.5) bisa ditulis sebagai

$$[H_o,\Omega]|100\rangle = -\frac{a_o e\mathcal{E}}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta} + \operatorname{ctn}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{r^2\cos\theta}{2} + a_o\, r\cos\theta\right)\right]\ |100\rangle$$

$$= -\frac{a_o e\mathcal{E}}{2}\left\{\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\left(a_o - \frac{r^2}{2a_o}\right) - \frac{2}{r^2}\left(\frac{r^2}{2} + a_o r\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{r^2}{2} + a_o r\right)\left(\frac{1}{a_o^2} - \frac{2}{a_o r}\right)\right\}\cos\theta\ |100\rangle$$

$$= e\,\mathcal{E}\, r\cos\theta\ |100\rangle$$

$$= H^1\ |100\rangle \qquad \text{(C.1.6)}$$

C.2. Perhitungan Operator-Operator Dalam Notasi Bra dan Ket Yang terlibat Dalam Teori Gangguan.

Perhitungan notasi matriks $\langle 100| H^1\Omega |100\rangle = \langle 100| \Omega H^1 |100\rangle$

$\langle 100| H^1\Omega |100\rangle$

$$= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} | U_{100} |^2 \Omega H^1 r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\pi a_0^3 \right)^{-1} e^{-2r/a_0} \frac{m a_0 e \mathcal{E}}{\hbar^2} \left(\frac{r^2 \cos\theta}{2} + a_0 r \cos\theta \right)$$

$$e \mathcal{E} r \cos\theta \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{m e^2 \mathcal{E}^2}{\pi \hbar^2 a_0^2} \int_0^\infty e^{-2r/a_0} \left(\frac{r^5}{2} + a_0 r^4 \right) dr \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{9}{4} a_0^3 \mathcal{E}^2$$

Perhitungan notasi matriks $\langle 100| \Omega^2 |100\rangle$

$$= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} | U_{100} |^2 \Omega^2 r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\pi a_0^3} \right) e^{-2r/a_0} \left(\frac{r^2}{2} + a_0 r \right)^2 \cos^2\theta \, r^2 \sin\theta$$

$$dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= \left(\frac{1}{\pi a_0^3} \right) \int_0^\infty e^{-2r/a_0} \left(\frac{r^4}{4} + a_0 r^3 + a_0 r^2 \right) r^2 \, dr$$

$$\int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{a_0^4}{3.2^5} \left(180 + 240 + 96 \right)$$

$$= 5{,}375 \, a_0^4$$

Perhitungan notasi matriks $\langle 100|z^2|100\rangle = \langle 100|r^2\cos^2\theta|100\rangle$:

$$\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi \left[\pi a_o^3\right]^{-1/2} \exp\left[-\frac{r}{a_o}\right] r^2\cos^2\theta \left[\pi a_o^3\right]^{-1/2} \exp\left[-\frac{r}{a_o}\right]$$

$$r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= -\left[\pi a_o^3\right]^{-1} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{2r}{a_o}\right] r^4 \, dr \int_0^\pi \cos^2\theta \, d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= -\left[a_o^3\right]^{-1} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{2r}{a_o}\right]\left[-\frac{2r}{a_o}\right]^4 d\left[\frac{2r}{a_o}\right] \frac{a_o^5}{2^4}\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta \Big|_o^\pi\right]$$

$$= -\frac{a_o^2}{2^4}\tau(5)\frac{1}{3}(-1-1) = a_o^2$$

Perhitungan notasi matriks $\langle 210|z|100\rangle = \langle 210|r\cos\theta|100\rangle$:

$$= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[32\pi a_o^3\right]^{-1/2} \frac{r}{a_o} \exp\left[-\frac{r}{2a_o}\right]\cos\theta \, r\cos\theta$$

$$\left[\pi a_o^3\right]^{-1/2} \exp\left[-\frac{r}{a_o}\right] r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= -\frac{2^4 a_o}{3^5\sqrt{2}}\tau(5)\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta \Big|_o^\pi\right]$$

$$\doteq \frac{2^8 a_o}{3^5\sqrt{2}}$$

LAMPIRAN D

Fungsi-fungsi Matematika

D.1 Fungsi Legendre Sekawan

Persamaan differrensial Legendre sekawan adalah :

$$(1 - x^2)\, y'' - 2xy' + \left\{ n\,(n + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right\} y = 0 \qquad \text{(D.1.1)}$$

Penyelesaian dari persamaan diatas dinamakan fungsi Legendre sekawan untuk jenis pertama didefinikan sebagai :

$$P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

$$= \frac{(1 - x^2)^{m/2}}{2^n\, n\,!} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2 - 1)^n \qquad \text{(D.1.2)}$$

dimana $P_n(x)$ adalah polinomial Legendre. Kita mendapatkan :

$$P_n^0(x) = P_n(x) \qquad \text{(D.1.3)}$$

$$P_n^m(x) = 0 \quad \text{jika} \quad m > n \qquad \text{(D.1.4)}$$

Orthogonalitas dari $P_n^m(x)$

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)\, P_l^m(x)\, dx = \delta_{nl} \left[\frac{2}{2n + 1} \right] \frac{(n + m)\,!}{(n - m)\,!} \qquad \text{(D.1.5)}$$

(Spigel, 1968, h. 149)

D.2 Polinomial Laguerre Sekawan

Persamaan differensial Laguerre Sekawan adalah :

$$xy'' + (m + 1 - x)\, y' + (n - m)y = 0 \qquad \text{(D.2.1)}$$

dengan solusi dari (D.2.1) untuk integer n dan m yang tidak negatif diberikan oleh polinomial Laguerre sekawan.

$$L_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x)$$

dengan $L_n(x)$ adalah polinomial Laguerre

$$L_n^o(x) = L_n(x) \qquad \text{(D.2.3)}$$

$$L_n^m(x) = 0 \; ; \quad \text{jika } m > n \qquad \text{(D.2.4)}$$

$$\frac{n-m+1}{n+1} L_{n+1}^m(x) + (x+m-2n-1)\, L_n^m(x) + n^2 L_{n-1}^m(x) \qquad \text{(D.2.5)}$$

(Spigel, 1968, h. 155)

$$x \frac{d}{dx} L_n^m(x) = n\, L_n^m(x) - (n+m)\, L_{n-1}^m(x) \qquad \text{(D.2.6)}$$

(Bateman, 1953, Vol. II, h. 189)

Orhogonalitas

$$\int_0^\infty x^m e^{-x} L_n^m(x)\, L_p^m(x)\, dx = \delta_{np} \frac{(n\,!)}{(n-m)!} \qquad \text{(D.2.7)}$$

(Spigel, 1968, h. 156)

Dari persamaan (D.2.6) dan (D.2.7) bisa diperoleh hasil-hasil khusus :

$$\int_0^\infty x^{m+1} e^{-x} \left\{L_n^m(x)\right\}^2 dx = \frac{(2n-m+1)(n!)^3}{(n-m)!} \qquad \text{(D.2.8)}$$

$$\int_0^\infty x^{m+2} e^{-x} \left\{L_n^m(x)\right\}^2 dx = \frac{\{6n^2 + (m-2-6n)(m-1)\}(n!)^3}{(n-m)!} \qquad \text{(D.2.9)}$$