# BAB II

# LANDASAN TEORI

## 2.1 Vektor

**Definisi 2.1**

Misalkan $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$ adalah sembarang bilangan riil dan $\boldsymbol{P}$ adalah himpunan terurut dari bilangan-bilangan tersebut, yaitu

$$\boldsymbol{P} = [p_1, p_2, ..., p_n]$$

Maka $\boldsymbol{P}$ disebut suatu n-vektor (atau singkatnya vektor).

**Contoh 2.1.1**

$\boldsymbol{P} = [1, 2, 3]$ adalah vektor baris dan $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ adalah vektor kolom.

**Definisi 2.1.2**

Suatu himpunan vektor $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, ..., $\boldsymbol{P}_n$ disebut **bebas linier** jika dan hanya jika untuk semua $\theta_j$ riil, $\sum_{j=1}^{n} \theta_j \boldsymbol{P}_j = 0$ hanya dipenuhi untuk semua $\theta_j = 0$. Jika $\sum_{j=1}^{n} \theta_j \boldsymbol{P}_j = 0$ dipenuhi sedikitnya satu $\theta_j \neq 0$, maka disebut **bergantung linier atau tidak bebas linier.**

**Contoh 2.1.2**

Vektor $\boldsymbol{P}_1 = [1, 2]$ dan $\boldsymbol{P}_2 = [2, 4]$ adalah bergantung linier karena ada $\theta_1 = 2$ dan $\theta_2 = -1$ yang membuat $\theta_1\boldsymbol{P}_1 + \theta_2\boldsymbol{P}_2 = 0$.

## 2.2. Matriks

**Definisi 2.2.1**

Matriks adalah susunan berbentuk segiempat dari elemen-elemen yang tersusun dalam m baris dan n kolom.

Secara umum matriks dengan m baris dan n kolom disebut matriks order m x n dan dinyatakan dalam bentuk :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

**Contoh 2.2.1 :**

Misalkan matriks $A$ dengan order 3 x 2 adalah $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

**Definisi 2.2.2**

Transpose dari matriks $A$ (dinotasikan dengan $A^T$) didapat dengan cara menukarkan tiap vektor baris menjadi vektor kolomnya dan sebaliknya.

Jika $A$ adalah matriks order m x n maka $A^T$ adalah matriks order n x m yaitu

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jika $A$ matriks order m x n vektor baris ke- i dari $A$ dinotasikan dengan $A_{i.} = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ dan vektor kolom ke - j dinotasikan dengan $A_{.j} = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T$.

**Contoh 2.2.2 :**

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ maka transpose dari $A$ adalah

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Definisi 2.2.3**

Misalkan $\{i_1, ..., i_r\} \subset \{1, ..., m\}$ dan $\{j_1,..., j_s\} \subset \{1, ..., n\}$ maka matriks

$$\begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_s} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_s} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \cdots & a_{i_r j_s} \end{bmatrix}$$

disebut submatriks dari $A$ yang dibangun oleh subset baris $\{i_1, ..., i_r\}$ dan subset kolom $\{j_1,..., j_s\}$.

$\{i_1, ..., i_r\}$ adalah himpunan baris-baris yang menjadi baris ke 1 sampai dengan ke r dan $\{1, ..., m\}$ adalah himpunan baris ke 1 sampai dengan ke m. Sedangkan $\{j_1, ..., j_s\}$ adalah himpunan kolom-kolom yang menjadi kolom ke 1 sampai dengan kolom ke s dan $\{1, ..., n\}$ adalah himpunan kolom-kolom ke 1 sampai dengan ke n.

**Contoh 2.2.3**

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matriks $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ adalah submatriks dari $A$

yang dibangun oleh subset baris $\{1, 3, 5\}$ dan subset kolom $\{1, 3, 4\}$.

**Definisi 2.2.4**

Jika suatu matriks memiliki jumlah baris dan kolom yang sama maka matriks tersebut disebut matriks bujur sangkar .

**Contoh 2.2.4**

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ adalah matriks bujur sangkar.

**Definisi 2.2.5**

Matriks bujur sangkar dengan elemen-elemennya yang dinyatakan dengan $a_{ij}$ untuk $i = j$ adalah sembarang bilangan riil dan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ disebut matriks diagonal.

**Contoh 2.2.5**

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ adalah matriks diagonal.

**Definisi 2.2.6**

Matriks diagonal dengan elemen-elemen pada diagonalnya adalah satu disebut matriks identitas dan dinotasikan dengan *I*.

**Contoh 2.2.6**

Matriks identitas untuk matriks order 3 x 3 adalah $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**Definisi 2.2.7**

Jika $A$ dan $B$ adalah matriks bujur sangkar n x n sedemikian hingga $AB = BA = I$ maka $B$ disebut invers dari $A$ditulis $B = A^{-1}$ dan $A$ disebut invers dari $B$ ditulis $A = B^{-1}$.

**Contoh 2.2.7**

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{bmatrix}$ dan

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

maka $A$ adalah invers dari $B$ dan $B$ adalah invers dari $A$.

Invers dari suatu matriks bujur sangkar $A$ dapat dicari dengan menggunakan operasi baris (kolom) elementer . Caranya dengan mentransformasikan matriks $A$ menjadi matriks identitas $I$ melalui operasi baris (kolom) elementer. Lalu dengan urutan operasi baris (kolom) elementer yang sama , matriks **I** diubah menjadi $A^{-1}$.

Untuk memudahkan, matriks $A$ dan $I$ dibuat dalam satu matriks (disebut matriks augmented) yaitu $[A \mid I]$ atau $\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Sedangkan matriks hasil transformasinya adalah $[\ I \mid A^{-1}]$ atau $\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2n} \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \bar{a}_{m1} & \bar{a}_{m2} & \dots & \bar{a}_{mn} \end{array}\right]$ di mana $\bar{a}_{ij}$ elemen matriks setelah dilakukan operasi - operasi yang didefinisikan sebagai berikut :

**Definisi 2.2.8**

Operasi-operasi berikut disebut transformasi elementer pada suatu matriks :

1. Pertukaran baris ke-i dengan baris ke-r atau

   Pertukaran kolom ke - j dengan kolom ke- s.

2. Perkalian setiap elemen baris ke- i dengan skalar k tidak nol atau

   Perkalian setiap elemen kolom ke -j dengan skalar k tidak nol.

3. Penambahan pada elemen-elemen baris ke- i dengan k kali elemen-elemen padanannya dari baris ke- r atau

   Penambahan pada elemen-elemen kolom ke- j dengan k kali elemen-elemen padanannya dari kolom ke- s.

Transformasi pada pernyataan pertama masing-masing operasi disebut operasi baris elementer sedangkan pada pernyataan kedua dari masing-masing operasi disebut operasi kolom elementer.

**Contoh 2.2.8**

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ dan matriks identitasnya $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, akan dicari invers dari $A$. Misalkan matriks yang diperbesar untuk $A$ dan $I$ adalah $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Dengan mengalikan baris pertama dengan -4 dan menjumlahkannnya dengan baris ke dua didapat matriks baru $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 1 \end{array}\right]$. Dengan mengalikan baris pertama matriks baru ini dengan 5 dan baris ke dua dengan 2 di dapat matriks baru $\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & -8 & 2 \end{array}\right]$. Dengan menjumlahkan baris ke dua dari matriks baru ini dengan baris pertama didapat matriks baru $\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -10 & -8 & 2 \end{array}\right]$. Dengan mengalikan baris pertama dengan 1/5 dan baris ke dua dengan -1/10 didapat $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 4/5 & -1/5 \end{array}\right]$. Jadi invers dari $A$ yaitu $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{bmatrix}$.

## 2.3 Program Linier

Program linier adalah suatu permasalahan optimasi di mana dilakukan usaha untuk memaksimalkan atau meminimalkan suatu fungsi linier dari variabel-variabel keputusan, dengan syarat bahwa variabel-variabel keputusan tersebut harus memenuhi kendala yang juga linier dan berharga nonnegatif atau tak terbatas tanda (unrestricted) artinya variabel tersebut boleh berharga positif atau boleh juga negatif.

Untuk menyelesaikan permasalahan program linier dengan menggunakan metode simpleks nantinya, model permasalahan tersebut dibawa terlebih dahulu ke dalam bentuk standar. Suatu permasalahan program linier dalam bentuk standar jika memiliki sifat-sifat sebagai berikut :

1. Seluruh kendala harus berbentuk persamaan dengan ruas kanan nonnegatif.
2. Seluruh variabel harus merupakan variabel nonnegatif.
3. Fungsi tujuan di maksimalkan atau diminimalkan.

Agar model suatu permasalahan program linier dalam bentuk standar perlu dilakukan perubahan-perubahan pada masing-masing karakteristiknya sebagai berikut :

**1. Variabel**

Variabel keputusan adalah variabel yang menguraikan secara lengkap keputusan-keputusan yang akan dibuat dan diasumsikan bernilai nonnegatif atau tak terbatas tanda. Batasan variabel yang bernilai nonnegatif atau tak terbatas tanda ini disebut **pembatas tanda**. Untuk variabel $x_i$ yang tak terbatas tanda dilakukan perubahan dengan menggantikannya menjadi dua variabel nonnegatif dengan mensubstitusi $x_i = x_i' - x_i''$ dengan $x_i', x_i'' \geq 0$

2. **Fungsi Tujuan**

Fungsi tujuan merupakan fungsi dari variabel keputusan yang akan dimaksimalkan atau diminimalkan. Pada permasalahan program linier dengan fungsi tujuan dimaksimalkan kadang-kadang diperlukan perubahan ke bentuk diminimalkan atau sebaliknya. Dalam hal ini minimal dari suatu fungsi adalah sama dengan maksimal dari negatif fungsi yang sama.

3. **Kendala (konstrain)**

Kendala dinyatakan dalam persamaan atau ketidaksamaan linier di mana bilangan pada ruas paling kanan tiap kendala disebut ruas kanan. Perubahan yang dilakukan terhadap kendala yang berbentuk ketidaksamaan adalah sebagai berikut :

a. Kendala yang bertanda ≤ atau ≥ dapat dijadikan suatu persamaan dengan menambahkan atau mengurangkan dengan suatu **variabel slack** pada ruas kiri pembatas itu. Jika suatu kendala menyatakan batas penggunaan suatu sumber maka variabel slack pada kendala tersebut menyatakan banyaknya sumber yang tidak terpakai.

b. Ruas kanan dijadikan bilangan nonnegatif dengan mengalikan ke dua sisi dengan -1 jika ruas kanan tersebut negatif dan arah ketidak samaannya berubah.

**Contoh 2.3.1**

Misalkan diberikan model permasalahan program linier sebagai berikut :

Minimalkan : $Z(x) = -14x_1 - 18\,x_2 - 16x_3 - 80x_4$

Kendala :
$$4.5x_1 + 8.5x_2 + 6x_3 + 20x_4 \leq 6000$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 40x_4 \geq 4000$$
$$-3.5x_1 - 7.5x_2 - 2x_3 + 20x_4 \geq -2000$$
$x_1$ unrestricted $x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

bentuk standar bagi model permasalahan di atas adalah :

Minimalkan : $Z(x) = -14x_1' + 14x_1'' - 18x_2 - 16x_3 - 80x_4$

Kendala :
$$4.5x_1' - 4.5x_1'' + 8.5\,x_2 + 6x_3 + 20x_4 + x_5 = 6000$$
$$x_1' - x_1'' + x_2 + 4x_3 + 40x_4 - x_6 = 4000$$
$$3.5x_1' - 3.5x_1'' + 7.5\,x_2 + 2x_3 - 20x_4 + x_7 = 2000$$
$x_1', x_1'' x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$.

## 2.4 Metode Simpleks

Metode simpleks merupakan prosedur yang bersifat iteratif, artinya bergerak selangkah demi selangkah dimulai dari suatu nilai pada ruang solusi menuju nilai yang optimum. Ruang solusi adalah himpunan semua solusi fisibel yaitu semua nilai yang memenuhi kendala dan pembatas tanda. Jadi metode simpleks akan mencari atau menentukan nilai-nilai variabel yang akan mengoptimalkan fungsi tujuan di antara nilai-nilai yang terdapat di dalam ruang solusi. Misalkan model bagi program linier adalah sebagai berikut :

Minimalkan : $Z = \boldsymbol{cx}$

Kendala : $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geq 0$

dengan $A$, $b$, $c$ dan $x$ masing-masing adalah :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \text{ dan } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

Karena model permasalahan program linier di atas dapat dinyatakan dalam sistem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ dengan m persamaan dan nvariabel dengan n > m maka berlaku definisi-definisi berikut :

**Definisi 2.4.1**

Solusi basis untuk $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ adalah solusi dimana terdapat sebanyak-banyaknya m variabel bernilai tidak nol.

Untuk mendapatkan solusi basis dari $Ax = b$ maka sebanyak (n – m) variabel harus dinolkan. Variabel yang dinolkan ini disebut **variabel non basis.** Selanjutnya dicari nilai dari n – (n – m) = m variabel yang memenuhi $Ax = b$ yang disebut **variabel basis.**

**Contoh 2.4.1**

Misalkan diberikan sistem di bawah ini :

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \qquad = 20 \qquad (1)$$

$$3x_1 + 4x_2 + 7x_3 \qquad + x_5 = 27 \qquad (2)$$

Untuk mendapatkan solusi dari sistem persamaan di atas maka sebanyak 5 – 2 = 3 variabel harus dinolkan, artinya hanya ada 2 variabel yang tidak nol. Misalkan $x_1$ dan $x_2$ sebagai variabel basis. Dengan mengeliminasikan variabel $x_2$ yang didapat dari (2) dikurangkan dengan (1) diperoleh :

$x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 7$ atau $x_1 = 7 - (2x_3 - x_4 + x_5)$. Dengan memberikan nilai nol untuk $x_3$,$x_4$ dan $x_5$ didapat nilai $x_1 = 7$. Nilai $x_2$ didapat dengan mensubstitusikan nilai $x_1 = 7$ dan nol untuk $x_3$,$x_4$, dan $x_5$ pada salah satu sistem persamaan di atas. Misal dipilih persamaan (1) maka diperoleh $4x_2 = 20 - (2x_1 + 5x_3 + x_4)$ dan diperoleh $x_2 = ¾$. Jadi salah satu solusi basis untuk sistem persamaan di atas adalah $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)^T = (7,3/4)^T$ dengan $x_1$,$x_2$ adalah variabel basis dan $x_3$,$x_4$,$x_5$ adalah variabel non basis.

**Definisi 2.4.2**

Jika seluruh variabel pada suatu solusi basis bernilai nonnegatif maka solusi tersebut disebut solusi fisibel.

**Contoh 2.4.2**

Pada contoh 2.4.1 solusi basis $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)^T = (7,3/4)^T$ adalah solusi fisibel.

**Definisi 2.4.3**

Suatu solusi fisibel disebut solusi basis fisibel jika dan hanya jika himpunan vector kolom $\boldsymbol{A}$ yang berkorespondensi dengan variabel basis yaitu $\{\boldsymbol{A}_{.j} : j$ sedemikian hingga $\overline{x}_j > 0\}$ adalah himpunan yang bebas linier.

**Contoh 2.4.3**

Pada contoh 2.4.2 solusi $\overline{\boldsymbol{x}} = (x_1,x_2)^T = (7,3/4)^T$. Vektor kolom yang bersesuaian dengan variabel basis $x_1$ dan $x_2$ adalah $\boldsymbol{A}_{.1} = (2,3)^T$ dan $\boldsymbol{A}_{.2} = (4,4)^T$. Karena $\boldsymbol{A}_1\theta_1 + \boldsymbol{A}_2\theta_2 = (2,3)^T\theta_1 + (4,4)^T\theta_2 = 0$ jika dan hanya jika $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Jadi himpunan $\{\boldsymbol{A}_{.1},\boldsymbol{A}_{.2}\}$ adalah bebas linier, maka $\overline{\boldsymbol{x}} = (x_1,x_2)^T = (7,3/4)^T$ adalah solusi basis fisibel.

Karena ada banyak kemungkinan nilai -nilai yang terdapat dalam ruang solusi, maka pada algoritma simpleks dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

1 Mengubah model permasalahan ke bentuk standar.

2. Mencari solusi basis fisibel.

3. Uji optimalitas.

   Jika seluruh variabel non basis mempunyai koefisien nonnegatif ($\overline{c}_j \geq 0$ untuk j dimana $\overline{x}_j$ adalah variabel non basis) dan seluruh variabel basis mempunyai koefisien nol ($\overline{c}_j = 0$ untuk j dimana $\overline{x}_j$ adalah variabel basis) pada baris fungsi tujuan, maka solusi basis fisibel optimal. Untuk permasalahan maksimal caranya adalah dengan mengubah fungsi tujuan semula kemudian menyelesaikannya sebagai permasalah manimal.

4. Memperbaiki solusi basis fisibel Nonoptimal.

   Jika pada baris tersebut masih ada variabel dengan koefisien negatif ($\overline{c}_j < 0$ untuk j di mana $\overline{x}_j$ adalah variabel non basis), pilih salah satu variabel yang paling negatif pada baris itu, yakni $\overline{c}_s = \min.\{\overline{c}_j : j = 1,...,n\}$. Dan jika ada lebih dari satu variabel dengan koefisien paling negatif pilih salah satu. Variabel yang bersesuaian dengan $\overline{c}_s$ yakni $\overline{x}_s$ akan memasuki status variabel basis dan disebut variabel yang masuk basis (entering variabel). Hitung rasio (ruas kanan )/ (koefisien entering variabel) pada tiap baris pembatas di mana variabelnya mempunyai koefisien positif, yakni minimal$\{\overline{b}_i / \overline{a}_{is},\ \overline{a}_{is} > 0\}$. Variabel basis pada baris pembatas dengan rasio positif terkecil yakni $x_r$ akan menjadi variabel non basis dan disebut variabel yang meninggalkan basis (leaving variabel).

5. Operasi Pivot

Lakukan operasi baris elementer untuk membuat koefisien entering variabel pada baris dengan rasio positif terkecil ini menjadi berharga 1 dan berharga nol untuk baris lainnya.

Biasanya penggunaan algoritma simpleks untuk menyelesaikan program linier ini ditulis dalam bentuk tabel simpleks, dimulai dengan tabel awal bagi permasalahan :

| $x_1$ | ... | $x_n$ | B |
|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | ... | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| . | ... | . | . |
| . | ... | . | . |
| . | ... | . | . |
| $a_{m1}$ | ... | $a_{mn}$ | $b_m$ |
| $c_1$ | ... | $c_n$ | 0 |

Tabel simpleks yang dipakai adalah tabel kanonik yaitu tabel awal yang telah ditambah dengan matriks identitas order mxm sebagai matriks koefisien bagi variabel slack seperti pada tabel berikut :

| BV | $x_1$ | ... | $x_n$ | $x_{n+1}$ | ... | $x_{n+m}$ | b | Rasio ($b_i/a_{ij}$, $a_{ij} > 0$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{n+1}$ | $a_{11}$ | ... | $a_{1n}$ | $a_{1,n+1}$ | ... | $a_{1,n+m}$ | $b_1$ | |
| . | . | ... | . | . | ... | . | . | |
| . | . | ... | . | . | ... | . | . | |
| . | . | ... | . | . | ... | . | . | |
| $x_{n+m}$ | $a_{m1}$ | ... | $a_{mn}$ | $a_{m,n+1}$ | ... | $a_{m,m+n}$ | $b_m$ | |
| -Z | $c_1$ | ... | $c_n$ | $c_{n+1}$ | ... | $c_{n+m}$ | 0 | |

Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa $x_{n+1},\ldots,x_{n+m}$ adalah variabel basis dan menjadi solusi basis awal dengan nilai $b_1,\ldots,b_m$ artinya variabel slack dibutuhkan untuk memulai iterasi, sedangkan $x_1,\ldots,x_n$ adalah variabel non basis dengan nilai nol dan $c_1,\ldots, c_n$ adalah koefisien fungsi tujuan dengan Z = 0 pada awal solusi ini. Setelah dilakukan langkah-langkah algoritma simpleks sampai dengan itersi ke-k tabel simpleksnya menjadi :

| BV | Variabel non basis | $x_{i1} \ldots x_{im}$ | $\overline{b}$ (solusi) | Rasio |
|---|---|---|---|---|
| $x_{i1}$ | ... | 1 ... 0 | $\overline{b}_1$ | $\overline{b}_i / \overline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} > 0$ |
| . | . | . ... . | . | |
| . | . | . ... . | . | |
| . | . | . ... . | . | |
| $x_{im}$ | ... | 0 ... 1 | $\overline{b}_m$ | |
| -Z | Koefisien fungsi tujuan untuk variabel non basis | 0 ... 0 | $-\overline{Z}$ | |

Pada tabel di atas koefisien di bawah variabel non basis adalah koefisien yang telah mengalami operasi algoritma simpleks. Submatriks di bawah $x_{i1} \ldots x_{im}$ adalah matriks identitas, baris paling bawah adalah koefisien fungsi tujuan yang telah mengalami operasi algoritma simpleks, $\overline{b}_1,\ldots,\ \overline{b}_m$ adalah ruas kanan yang telah mengalami operasi algoritma simpleks. $-\overline{Z}$ adalah nilai fungsi tujuan sampai dengan iterasi ke-k.

## 2.5 Variabel Artifisial

Dalam metode simpleks telah digunakan variabel slack sebagai solusi basis awal, sedemikian hingga masing-masing sama dengan ruas kanan yang berharga positif. Untuk kasus yang pembatasnya bertanda " = " dan " ≥" tidak ada solusi basis awal karena tidak ada variabel slack yang dapat digunakan sebagai variabel basis awal.

Untuk menyelesaikan ke dua jenis kasus tersebut diperlukan adanya variabel artfisial sebagai pengganti variabel slack, sehingga variabel basis awal tetap ada. Iterasi - iterasi metode simpleks akan secara otomatis menjadikan variabel artifisial ini tidak muncul lagi (bernilai nol). Dengan kata lain penggunaan variabel artifisial ini hanya untuk memulai solusi dan harus menghilangkannya (menjadi bernilai nol) pada akhir solusi.

Dengan adanya variabel artifisial ini metode simpleks menjadikan dua fase dalam operasinya yaitu :

**Fase I**

Fase ini digunakan untuk menguji apakah permasalahan memiliki solusi fisibel atau tidak, yaitu dengan meminimalkan jumlah variabel artifisial sebagai fungsi tujuan. Jika fungsi tujuan ini bernilai nol (artinya seluruh variabel artifisial bernilai nol), maka permasalahan memiliki solusi fisibel dan dilanjutkan ke fase II. Pada langkah 2 dan 3 algoritma simpleks yang diperhatikan adalah koefisien fungsi tujuan fase I yaitu $d_j$ dengan prosedur pemilihan basis yang sama. Tabel simpleks awalnya menjadi sebagai berikut :

| BV | $x_1$ | ... | $x_n$ | $x_{n+1}$ | ... | $x_{n+m}$ | b | Rasio ($b_i/a_{ij}$, $a_{ij} > 0$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{n+1}$ | $a_{11}$ | ... | $a_{1n}$ | $a_{1,n+1}$ | ... | $a_{1,n+m}$ | $b_1$ | |
| . | . | ... | . | . | ... | . | . | |
| . | . | ... | . | . | ... | . | . | |
| . | . | ... | . | . | ... | . | . | |
| $x_{n+m}$ | $a_{m1}$ | ... | $a_{mn}$ | $a_{m,n+1}$ | ... | $a_{m,m+n}$ | $b_m$ | |
| -Z | $c_1$ | ... | $c_n$ | $c_{n+1}$ | ... | $c_{n+m}$ | 0 | |
| -Y | $d_1$ | ... | $d_n$ | $d_{n+1}$ | ... | $d_{n+m}$ | $-\overline{Y}$ | |

Tetapi jika fungsi tujuan bernilai positif, maka permasalahan tidak memiliki solusi fisibel.

**Fase II**

Fase II ini dilakukan jika fungsi tujuan Fase I adalah nol dan pada fase ini algoritma simpleks melanjutkan iterasi terakhir dari Fase I untuk mendapatkan solusi optimal bagi permasalahan semula. Pada fase ini koefisien fungsi tujuan $d_j$ sudah tidak ada.

**Contoh 2.5.4**

Maksimalkan $Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

Kendala $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

Agar dapat diselesaikan dengan metode simpleks bentuk ini dibawa kebentuk standar sebagai berikut :

Maksimalkan $Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

Kendala $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5 = 8$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$

$x_4$ variabel slack

$x_5$ variabel artifisial

Karena dalam bentuk standar terdapat variabel artifisial maka pada algoritma simpleks dilakukan di dua fase yaitu terhadap fase I dan Fase II.

**Fase I**

Misalkan fungsi tujuan fase I adalah Y di mana Y adalah jumlah variabel artifisial dan fungsi tujuan Y akan diminimalkan. Jika minimal Y adalah nol maka permasalahan semula memiliki solusi fisibel. Fungsi tujuan $Y = x_5$ karena $x_5$ adalah satu-satunya variabel artifisial pada kendala dalam bentuk standar. Dari kendala ke dua bentuk standar : $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5$ atau $x_5 = 8 - 2x_1 + x_2 - 3x_3$. Dengan mengganti $x_5$ pada fungsi tujuan Y, maka fungsi tujuan Fase I adalah meminimalkan $Y = 8 - 2x_1 + x_2 - 3x_3$. Untuk kendalanya tetap menggunakan kendala yang masih dalam bentuk standar. Jika harga Y tidak sama dengan nol metode simpleks dihentikan dan jika sama dengan nol dilanjutkan ke fase II.

**Fase II**

Jika minimal Y adalah nol maka iterasi terakhir pada fase I dilanjutkan sampai mendapatkan solusi optimal bagi permasalahan dual.

Untuk pengoperasian algoritma simpleks pada fase I dan II dibuat dalam satu tabel dengan fase I dikerjakan terlebih dahulu dan tabel simpleksnya adalah sebagai berikut :

**Tabel 1. Tabel Awal**

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | solusi | rasio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 10 | 10 |
| $x_5$ | 2 | -1 | 3 | 0 | 1 | 8 | 8/3 minimal |
| -Z | -5 | -12 | -4 | 0 | 0 | 0 | |
| -Y | -2 | 1 | -3 | 0 | 0 | -8 | |

Pada baris Y tabel 1 masih ada variabel non basis yang memiliki koefisien negatif pada fungsi tujan Fase I sehingga pada iterasi ini solusi bsis fisibel belum optimal. Karena variabel $x_3$ memiliki koefisien yang paling negatif yaitu -3, maka $x_3$ terpilih sebagai variabel yang akan menjadi entering variabel. Rasio minimal adalah 8/3 yang menunjukkan bahwa $x_3$ akan menjadi basis yang akan menggantikan $x_5$ yang akan menjadi variabel non basis. Dengan kata lain sebagai akibat terpilihnya $x_3$ menjadi entering variabel, maka $x_5$ menjadi variabel yang meninggalkan basis. Selanjutnya dilakukan operasi pivot pada kolom $x_3$ di mana 3 adalah elemen pivotnya.

**Tabel 2. Iterasi 1**

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | solusi | Rasio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 1/3 | 7/3 | 0 | 1 | -1/3 | 22/3 | 22/7 |
| $x_3$ | 2/3 | -1/3 | 1 | 0 | 1/3 | 8/3 | |
| -Z | -7/3 | -40/3 | 0 | 0 | 4/3 | 32/3 | |
| -Y | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | |

Fungsi tujuan Fase I sudah sama dengan nol, berarti permasalahan semula memiliki solusi fisibel. Dengan menggunakan tabel 2, iterasi dilanjutkan sampai optimalitas fungsi tujuan fase II pada iterasi ini dipenuhi. Baris untuk fungsi tujuan Y dapat dihilangkan dari tabel sedangkan kolom untuk $x_5$ tetap dipertahankan tetapi tidak dipertimbangkan lagi pada pemilihan entering variabel selanjutnya.

**Tabel 3. Iterasi 2**

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Solusi | Rasio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 1/7 | 1 | 0 | 3/7 | -1/7 | 22/7 | 22 |
| $x_3$ | 5/7 | 0 | 1 | 1/7 | 2/7 | 26/7 | 26/5 minimal |
| -Z | -3/7 | 0 | 0 | 40/7 | -4/7 | 368/7 | |

**Tabel 4. Iterasi 3**

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Solusi |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | -1/5 | 2/5 | -1/5 | 12/5 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 7/5 | 1/5 | 2/5 | 26/5 |
| -Z | 0 | 0 | 3/5 | 29/5 | -2/5 | 274/5 |

Karena koefisien dari seluruh variabel pada baris fungsi tujuan pada baris Z sudah berharga positif kecuali untuk $x_5$, maka solusi basis fisibel optimal. Jadi solusi optimalnya adalah Z = 274/5 dengan $\bar{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T = (26/5,12/5,0,0,0)^T$.

## 2.6 Teori Dualitas

Setiap permasalahan program linier mempunyai suatu program linier lain yang saling berkaitan yang disebut dual, sedemikian hingga permasalahan semula yang disebut primal solusinya dapat diperoleh dengan menyelesaikan permasalahan dualnya.

Bentuk umum masalah primal dual adalah :

**Primal** : Minimalkan : $Z = cx$

Kendala $Ax \geq b$

$x \geq 0$

**Dual** : Maksimalkan : $W = wb$

Kendala $wA \leq c$

$w \geq 0$.

Perubahan tanda ketidaksamaan tergantung pada fungsi tujuannya, yaitu untuk kasus maksimal semua pembatas bertanda ≤ sedangkan untuk kasus minimal semua pembatas bertanda ≥ dan semua variabel non negatif. Permasalahan maksimal/minimal semacam ini disebut permasalahan maksimal/minimal normal. Sedangkan untuk permasalahan maksimal/minimal yang tidak normal perubahannya adalah :

- Untuk persoalan maksimal jika kendala primal $x_i$ bertanda $\geq$ maka variabel dual yang berkorespondensi dengan kendala itu akan memenuhi $w_i \leq 0$. Sebaliknya, untuk permasalahan minimal jika kendala primal $x_i$ bertanda $\leq$, maka variabel dual yang berkorespondensi dengan variabel tersebut akan memenuhi $w_i \leq 0$.
- Jika kendala primal $x_i$ bertanda =, maka variabel dual $w_i$ yang berkorespondensi dengan kendala tersebut tidak terbatas dalam tanda.
- Jika variabel primal $x_i$ tidak terbatas dalam tanda, maka kendala dual $y_i$ akan bertanda =.

**Contoh 2.6.1**

Misalkan bentuk primal dari suatu permasalahan adalah sebagai berikut :

Maksimalkan $Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$

Kendala $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 25$

$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 15$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

maka bentuk dualnya adalah

Minimalkan $W = 25w_1 + 15w_2$

Kendala $w_1 \quad + 2w_2 \geq 1$

$2w_1 + w_2 \geq 2$

$2w_1 - 3w_2 \geq -3$

$-3w_1 + 2w_3 \geq 4$

$w_1 \geq 0$, $w_2$ unrestricted

Jika solusi optimal didapat maka Minimal Z = Maksimal W atau dengan notasi matriksnya adalah $c\bar{x} = \bar{w}b$ , di mana $\bar{x}$ dan $\bar{w}$ adalah variabel yang mengoptimalkan fungsi tujuan Z dan W. Untuk $\bar{x}$ dan $\bar{w}$ ini akan berlaku :

(1) $A\bar{x} \geq b,\ \bar{x} \geq 0$

(2) $\bar{w}A \leq c,\ \bar{w} \geq 0$

Jika (1) dikalikan dengan $\bar{w}$ maka didapat $\bar{w}A\bar{x} \geq \bar{y}b$, dan jika (2) dikalikan dengan $\bar{x}$ kemudian dengan membalikkan tanda ketidaksamaannya maka akan didapat $c\bar{x} \geq \bar{w}A\bar{x}$ Dengan mengurutkan tanda ketidaksamaan hasil kali $\bar{x}$ dengan (1) dan hasil kali $\bar{w}$ dengan (2) didapat $c\bar{x} \geq \bar{w}A\bar{x} \geq \bar{w}b$. Karena untuk $\bar{x}$ dan $\bar{w}$ berlaku $c\bar{x} = \bar{w}b$, maka $\bar{w}A\bar{x} - \bar{w}b = 0$ dan $c\bar{x} - \bar{w}A\bar{x} = 0$ atau $\bar{w}\ (A\bar{x} - b) = 0$ dan $(c - \bar{w}A)\bar{x} = 0$. Untuk i = 1,...,m dan $a_i$ adalah elemen matriks pada baris ke-i maka berlaku $\bar{w}_i(a_i\bar{x} - b_i) = 0$ dan untuk j = 1,...,n berlaku $(c_j - \bar{w}a_j)\ \bar{x}_j = 0$. Jadi untuk $\bar{x}$ dan $\bar{w}$ solusi basis fisibel adalah optimal pada primal dan dual jika dan hanya jika :

$(c_j - \bar{w}a_j)\ \bar{x}_j = 0$ untuk j = 1,...,n

dan

$\bar{w}_i\ (a_i\bar{x} - b_i) = 0$ untuk i = 1,...,m

Kondisi di atas disebut dengan *Complementary Slackness Condition.*

Misalkan $\overline{x}_{n+i} = a_i x - b_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,m$ adalah variabel slack pada primal dan $\overline{w}_{m+j} = c_j - ya_j \geq 0$ , $j = 1,\ldots,n$ adalah variabel slack pada dual. Maka kondisi complementary slackness dapat ditulis :

$$\overline{x}_j \, \overline{w}_{m+j} = 0 \, , \, j = 1,\ldots,n$$

$$\overline{w}_i \, \overline{x}_{n+i} = 0 \, , \, i = 1,\ldots,m$$

$\overline{x}_j$ dan $\overline{w}_{m+j}$ serta $\overline{x}_{n+i}$ dan $\overline{w}_i$ disebut pasangan variabel komplementer. Hubungan pasangan variabel komplementer ini disebut hubungan variabel primal dual dan dapat dilihat pada tabel simpleks. Hubungan tersebut adalah nilai optimal variabel-variabel pada primal sama dengan nilai optimal variabel-variabel dual yang berkorespondensi dengan persamaan kendala pada primal. Dengan kata lain variabel dual yang berkorespondensi dengan variabel slack/artifisial pada primal nilai optimalnya sama dengan koefisien variabel slack/artifisial pada persamaan W yang optimal.

**Contoh 2.6.2 :**

Misalkan diberikan permasalahan berikut :

Minimalkan $Z = 10\,x_1 + 8\,x_2$

Kendala $x_1 + 2\,x_2 \geq 5$

$2\,x_1 - x_2 \geq 12$

$x_1 + 3\,x_2 \geq 4$

$x_1 \geq 0$, $x_2$ tidak terbatas tanda

dengan bentuk standarnya adalah sebagai berikut :

Minimalkan $Z = 10\,x_1 + 8\,x_2$

Kendala $x_1 + 2\,x_2 - x_3 = 5$

$2\,x_1 - x_2 - x_4 = 12$

$x_1 + 3\,x_2 - x_5 = 4$

$x_1, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

$x_2$ unresricted

$x_3, x_4, x_5$ variabel slack

Bentuk dual dari permasalahan semula adalah :

Maksimalkan $W = 5w_1 + 12w_2 + 4w_3$

Pembatas $w_1 + 2w_2 + w_3 \leq 10$

$2w_1 - w_2 + 3w_3 = 8$

$w_1, w_2, w_3 \geq 0.$

Agar dapat diselesaikan dengan metode simpleks bentuk dual ini dibawa kebentuk standar sebagai berikut :

Maksimalkan $W = 5w_1 + 12w_2 + 4w_3$

Pembatas $w_1 + 2w_2 + w_3 + w_4 = 10$

$2w_1 - w_2 + 3w_3 + w_5 = 8$

$w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \geq 0.$

$w_4$ variabel slack

$w_5$ variabel artifisial

Setelah dilakukan iterasi dengan algoritma simpleks diperoleh tabel optimalnya seperti di bawah ini :

**Tabel 5. Optimal permasalahan Dual**

| BV | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | Solusi |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $w_2$ | 0 | 1 | -1/5 | 2/5 | -1/5 | 12/5 |
| $w_1$ | 1 | 0 | 7/5 | 1/5 | 2/5 | 26/5 |
| -W | 0 | 0 | 3/5 | 29/5 | -2/5 | 274/5 |

Karena koefisien dari seluruh variabel pada baris fungsi tujuan pada baris W sudah berharga positif kecuali untuk $w_5$, maka solusi basis fisibel optimal. Jadi solusi optimalnya adalah W = 274/5 dengan $\bar{w} = (w_1,w_2,w_3,w_4,w_5)^T = (26/5,12/5,0,0,0)^T$.

Dengan menggunakan *complementary slackness condition* diperoleh hubungan variabel primal dan variabel dual sebagai berikut :

$\bar{x}_j\bar{w}_{m+j}$ untuk j = 1, ... ,2 dan

$\bar{w}_i\bar{x}_{n+i}$ untuk i = 1, ...., 3

maka hubungan (korespondensi) masing-masing variabel primal dan dualnya adalah :

$\bar{x}_1\bar{w}_4 = 0$ artinya $\bar{x}_1$ berkorespondensi dengan $\bar{w}_4 = 0$ maka $\bar{x}_1 = 29/5$

$\bar{x}_2\bar{w}_5 = 0$ artinya $\bar{x}_2$ berkorespondensi dengan $\bar{w}_5 = 0$ maka $\bar{x}_2 = -2/5$

$\bar{w}_1\bar{x}_3 = 0$ artinya $\bar{x}_3$ berkorespondensi dengan $\bar{w}_1 = 26/5$ maka $\bar{x}_3 = 0$

$\bar{w}_2\bar{x}_4 = 0$ artinya $\bar{x}_4$ berkorespondensi dengan $\bar{w}_2 = 12/5$ maka $\bar{x}_4 = 0$

$\bar{w}_3\bar{x}_5 = 0$ artinya $\bar{x}_5$ berkorespondensi dengan $\bar{w}_3 = 0$ maka $\bar{x}_5 = 3/5$

Nilai untuk variabel primal yang berkorespondensi dengan variabel dual adalah nilai dari koefisien dari baris W untuk masing-masing variabel dual pada tabel simpleks. Dengan demikian nilai optimal $\bar{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T = (29/5,-2/5,0,0,3/5)^T$ dan fungsi tujuan Z = 274/5.