BAB II

KONSEP DASAR

2.1 Variabel Random

Definisi 2.1.1

Jika ξ sebuah percobaan yang memiliki ruang sampel ζ, dan X sebuah fungsi yang dinotasikan sebuah bilangan riil X(e) untuk setiap hasil e ∈ ζ, , maka X disebut variabel random.

(William, Montgomery : 45)

Definisi 2.1.2

Jika X adalah sebuah variabel random, dan Y= H(X) adalah sebuah fungsi dari X, maka nilai harapan H (X) didefinisikan sebagai berikut :

E(H (X)) = $\sum_{\forall i} H(x_i).p(x_i)$, untuk X yang diskrit

E(H(X)) = $\int_{-\infty}^{\infty} H(x_i).f(x_i)dx$, untuk X yang kontinu

(William, Montgomery : 79)

Definisi 2.1.3

Misalkan X variabel random dengan expektasi μ, maka

variansi X = Var. X = $\sigma_x^2 = E(X-\mu)^2$ (Surjadi : 54)

Definisi 2.1.4

Kovariansi X dan Y, dengan mean masing-masing $\mu_x dan \mu_y$, ialah

Cov(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY) = E(X- μ_x)$(Y - \mu_y)$

2.2 Matriks

Definisi 2.2.1

Matriks merupakan himpunan skalar yang disusun secara empat persegi panjang menurut baris-baris dan kolom-kolom.

(Suryadi : 65)

Definisi 2.2.2

Suatu matriks **A** = [aij] berukuran mxn. Tranpose dari **A** bernotasi $\mathbf{A}^T$ adalah matriks berukuran nxm yang didapatkan dari matriks **A** dengan menuliskan baris ke-i dari matriks **A** sebagai kolom ke-i dari $\mathbf{A}^T$ atau dapat ditulis $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]$, dengan i = 1,2,…,p dan j = 1,2,…,p.

Beberapa sifat matriks tranpose :

1. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
2. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
3. $\lambda(\mathbf{A}^T) = (\lambda\mathbf{A})^T$
4. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

Definisi 2.2.3

Matriks diagonal ialah matriks bujur sangkar yang semua elemen di luar diagonal utama adalah nol. Dengan perkataan lain : (α_{ij}) adalah matriks diagonal bila $\alpha_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$

Contoh : $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ adalah matriks diagonal dengan orde 3x3 dengan elemen pada digonal utama $\alpha_{11} = 2, \alpha_{22} = 1, \alpha_{33} = 3$

(Suryadi : 75)

Definisi 2.2.4

Matriks Identitas (satuan) ialah matriks diagonal yang semua elemen – elemen diagonal utamanya semua = 1, dengan perkataan lain (U_{ij}) adalah matriks identitas bila $U_{ij} = 1$ untuk $i = j$ dan nol untuk $i \neq j$.

Contoh : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks identitas dengan orde 3x3 dengan elemen pada diagonal utama adalah 1.

(Suryanto : 76)

Definisi 2.2.5

Matriks Orthogonal

Matriks bujur sangkar **M** disebut matriks yang orthogonal jika hasil kali $\mathbf{MM}^T$ merupakan matriks Identitas.

$\mathbf{MM}^T = \mathbf{I}$

Contoh : $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ adalah matriks orthogonal, karena

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Suryanto : 37)

Definisi 2.2.6

Matriks Simetris adalah matriks yang tranposenya sama dengan dirinya sendiri, dengan perkataan lain bila $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ atau $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua i dan j.

Contoh : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, maka $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Matriks **A** berorde 3x3 dengan elemen –elemen $a_{11}=1$, $a_{12}=2$, $a_{13}=0$, $a_{21}=2$, $a_{22}=3$, $a_{23}=1$, $a_{31}=0$, $a_{32}=1$, $a_{33}=1$

(Suryadi : 77)

Definisi 2.2.7

Matriks Definit Positif

Jika **A** adalah matriks simetris berorde nxn, yang bersifat bahwa $\mathbf{X}^T\mathbf{AX} > 0$ untuk setiap vektor **X** berorde nx1 yang bukan vektor nol, maka **A** disebut matriks definit positif.

Contoh :

$$(X_1, X_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 2X_1^2 + 2X_1X_2 + 3X_2^2$$

$$= 2\,(X_1 + \tfrac{1}{2}X_2)^2 + \tfrac{5}{2}X_2^2 > 0$$

untuk semua $X_1 \neq 0$, $X_2 \neq 0$ maka matriks $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ adalah definit positif.

Definisi 2.2.8

$\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ matriks bujur sangkar bertipe kxk. Trace dari matriks A ditulis tr($\mathbf{A}$) adalah jumlah elemen-elemen pada diagonal utama.

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{k} a_{ii}$$

(Kartiko : 1-21)

Definisi 2.2.9

Vektor random adalah vektor yang elemen-elemennya variabel random.

Matriks random adalah matriks yang elemen-elemennya variabel random.

Harga harapan matriks random adalah harga harapan dari setiap elemen-elemennya.

Misal $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}$ adalah matriks pxn . Harga harapan dari $\mathbf{X}$ ditulis E($\mathbf{X}$) adalah matriks pxn.

$$E(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} E(x_{11}) & E(x_{12}) \ldots E(x_{1n}) \\ E(x_{21}) & E(x_{22}) \ldots E(x_{2n}) \\ \\ E(x_{p1}) & E(x_{p2}) \ldots . E(x_{pn}) \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.10

Harga harapan dan kovarian dari vektor random **X** dapat ditulis sebagai matriks, yaitu :

$$E(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} E(x_1) \\ E(x_2) \\ \\ E(x_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \\ \mu_p \end{bmatrix} = \mu$$

$$\Sigma = E[x - \mu][x - \mu]'$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} E(x_1 - \mu_1) & E(x_2 - \mu_2)(x_2 - \mu_2) \ldots\ldots E(x_1 - \mu_1)(x_p - \mu_p) \\ E(x_2 - \mu_2)(x_1 - \mu_1) & E(x_2 - \mu_2)^2 \ldots\ldots E(x_2 - \mu_2)(x_p - \mu_p) \\ & \\ E(x_p - \mu_p)(x_1 - \mu_1) & \ldots\ldots\ldots\ldots E(x_p - \mu_p)^2 \end{bmatrix}.$$

$$\Sigma = \mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \ldots\sigma_{1p}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \ldots\sigma_{2p}^2 \\ . & & \\ . & & \\ \sigma_{p1}^2 & \sigma_{p2}^2 & \ldots\sigma_{pp}^2 \end{bmatrix}$$

dengan $\sigma_{ij}^2 = E(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) = \sigma_{ji}^2 \ \sigma_{ji}^2$

$i.j = 1,2, \ldots, p.$

2.3 Eigenvalue dan Eigenvektor

Jika **A** adalah sebuah matriks nxn, maka sebuah vektor yang tidak nol **V** di dalam R^n dinamakan sebuah eigenvektor dari **A** jika **AV** adalah kelipatan skalar dari **V**, yaitu

$$\mathbf{AV} = \lambda\mathbf{V}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan eigenvalue dari **A** dan **V** dikatakan sebuah eigenvektor yang bersesuaian dengan λ.

Untuk mencari nilai karakteristik dan vektor karakteristik dari matriks kovariansi caranya adalah membawa ke dalam bentuk persamaaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk matriks $\mathbf{AV} = \lambda\mathbf{V}$. .... (1)

Dengan A matriks kovariansi , **V** vektor besaran dan λ besaran skalar. Persamaan (1) dapat ditulis sebagai suatu persamaan homogen :

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{V} = 0 \qquad \text{............} \quad (2)$$

dengan **I** matriks identitas yang berorde sama dengan matriks **A**. Jika persamaan (2) ini ditulis dalam bentuk lengkap , maka persamaan itu akan menjadi :

$$(\sigma_{11}^2 - \lambda)\, e_1 + \sigma_{12}^2\, e_2 + \ldots + \sigma_{1p}^2\, e_p = 0$$

$$\sigma_{21}^2\, e_1 + (\sigma_{22}^2 - \lambda)\, e_2 + \ldots + \sigma_{2p}^2\, e_p = 0$$

$$\vdots$$

$$\sigma_{p1}^2\, e_1 + \sigma_{p2}^2 + \ldots\ldots + (\sigma_{pp}^2 - \lambda)\, e_p = 0 \qquad \text{......} \quad (3)$$

Karena persamaan (3) homogen, maka persamaan ini konsisten dan selalu mempunyai penyelesaian trivial (**V** = 0), tetapi yang digunakan adalah penyelesaian non-trivialnya, penyelesaian non-trivial ini hanya ada jika determinan dari persamaan homogen tersebut adalah nol. Jadi didapat persamaan di bawah ini :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \sigma_{11}^2 - \lambda & \sigma_{12}^2 & \ldots\sigma_{1p}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 - \lambda & \ldots\sigma_{2p}^2 \\ . & & \\ . & & \\ \sigma_{p1}^2 & \sigma_{p2}^2 & \ldots\sigma_{pp}^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots..(4)$$

Contoh :

Hitung akar karakteristik dan vektor karakteristik dari matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Jawab :

Misalkan λ skalar dan $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ vektor yang memenuhi $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$

Merupakan persamaan karakteristik :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga determinan dari $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix}$ adalah

$(1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$

$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$

Vektor karakteristik dicari dengan memasukkan harga λ ke dalam persamaan, yaitu

Untuk $\lambda_1 = 4$

$$\begin{bmatrix} 1-4 & 2 \\ 3 & 2-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau :

$$-3V_1 + 2V_2 = 0$$

$$3V_1 - 2V_2 = 0$$

jika $V_1 = 2\mu$ dan $V_2 = 3\mu$, jadi $\mathbf{V} = \mu \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ merupakan vektor-vektor karakteristik yang bersangkutan untuk λ_1.

Untuk $\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 1+1 & 2 \\ 3 & 2+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau : $2V_1 + 2V_2 = 0$

$$3V_1 + 3V_2 = 0$$

ambil persamaan $2V_1 + 2V_2 = 0$

jika $V_1 = \mu$ maka $V_2 = -\mu$, jadi $\mathbf{V} = \mu \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ merupakan vektor-vektor karakteristik yang bersesuaian untuk λ_2.

2.4 Vektor yang Bebas Linier dan Bergantung Linier

Definisi 2 5.1

Himpunan m buah vektor (u_1 ......u_m) disebut bergantung linier, bila terdapat skalar-skalar $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ yang tidak semua nol, sedemikian sehingga $\lambda_1 u_1 +_2 u_2 + ... + \lambda_m u_m = 0$

Himpunan (u_1.... u_m) disebut bebas linier, bila $\lambda_1 u_1 +_2 u_2 + ... + \lambda_m u_m = 0$ hanya terpenuhi oleh : $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$

(Suryadi : 38)