BAB II

Teori Penunjang

2.1. Teori Antrian

Pada subbab ini akan dibahas mengenai distribusi Poisson dan hubungannya dengan distribusi Eksponensial, Notasi Antrian, Disiplin Antrian, Probabilitas Steady-state dan Formula Little yang selanjutnya akan diuraikan pada subbab – subbab berikut ini.

2.1.1. Proses Poisson

Definisi 2.1.1.

Proses penghitungan $\{ X(t), t \geq 0 \}$ dikatakan sebagai proses Poisson jika

i. $X(0) = 0$

ii. $\{ X(t), t \geq 0 \}$ mempunyai tahapan bebas.

iii. Jumlah kejadian dalam interval t merupakan distribusi Poisson dengan mean β t. Jadi untuk semua s , $t \geq 0$, berlaku ,

$$P\{X(t+s) - X(s)\} = \frac{e^{-\beta t}(\beta t)^n}{n!} \quad , n \geq 0$$

Dari (iii) berarti bahwa $E[X(t)] = \beta t$ dengan β dikatakan sebagai laju proses.

Notasi :

Suatu fungsi f dikatakan sebagai $o(t)$ jika

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = 0$$

Definisi 2.1.2.

$\{X(t), t \geq 0\}$ adalah proses Poisson jika

i. $X(0) = 0$

ii. $\{X(t), t \geq 0\}$ mempunyai tahapan bebas

iii. $P\{X(t) \geq 2\} = o(t)$

iv. $P\{X(t) = 1\} = \beta t + o(t)$

Teorema 2.1.1.

Definisi 2.1.1. dan 2.1.2. adalah ekuivalen

Bukti :

Untuk menunjukkan bahwa definisi 2.1.1. dan 2.1.2. adalah ekuivalen, misalkan

$$p_n(t) = P\{X(t) = n\}$$

Untuk memperoleh persamaan differensial untuk $p_0(t)$ dengan cara sebagai berikut :

$$\begin{aligned} p_0(t+h) &= P\{X(t+h)=0\} \\ &= P\{X(t)=0, X(t+h)-X(t)=0\} \\ &= P\{X(t)=0\}.P\{X(t+h)-X(t)=0\} \\ &= p_0(t).\,p_0(h) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan (iii) dalam definisi 2.1.1 serta (iii) dan (iv) dalam definisi 2.1.2. menghasilkan

$$p_0(t) = 1 - \beta t + o(t)$$

sehingga :

$$\frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = p_0(t)\,\frac{(p_0(h) - 1)}{h}$$

$$p_0{}'(t) = p_0(t)\frac{(1 - \beta h + o(t) - 1)}{h}$$

$$p_0{}'(t) = -\beta\, p_0(t)$$

atau ekuivalen dengan

$$Log\ p_0(t) = -\beta t + c$$

atau

$$p_0(t) = ce^{-\beta t}$$

Karena $p_0\ (t) = 1$, diperoleh

$$p_0(t) = e^{-\beta t} \quad , \quad t \geq 0$$

dimana β adalah konstanta positif.

Dengan cara yang sama, untuk $n > 0$,

$$p_n(t+h) = p_n(t)\,p_0(h) + p_{n-1}(t)\,p_1(h) + o(h)$$
$$= (1 - \beta h)\,p_n(t) + \beta h\, p_{n-1}(t) + o(h)$$

sehingga,

$$\frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h} = -\beta\, p_n(t) + \beta\, p_{n-1}(t) + o(h)$$

$$p_n'(t) \qquad = -\beta\, p_n(t) + \beta\, p_{n-1}(t)$$

atau ekuivalen dengan

$$e^{\beta t}\left[p_n'(t) + \beta\, p_n(t)\right] = \beta\, e^{\beta t}\, p_{n-1}(t)$$

sehingga

$$\frac{d}{dt} e^{\beta t}\, p_n(t) = \beta\, e^{\beta t}\, p_{n-1}(t) \qquad (2.1.1)$$

Akan dibuktikan bahwa

$$p_n(t) = \frac{e^{-\beta t}(\beta t)^n}{n!}$$

Dari persamaan (2.1.1) diperoleh :

$$\frac{d}{dt} e^{\beta t}\, p_n(t) = \frac{\beta^n\, t^{n-1}}{(n-1)!}$$

sehingga

$$p_n(t) = \frac{e^{-\beta t}(\beta t)^n}{n!} \qquad (2.1.2)$$

Persamaan (2.1.2) merupakan fungsi berdistribusi Poisson dengan parameter β.

2.1.2. Hubungan Antara Distribusi Poisson dengan Distribusi Eksponensial dalam Teori Antrian

Diasumsikan sebagai berikut :

$f(t)$ adalah fungsi kepadatan probabilitas (pdf) dari interval waktu antar pemunculan kejadian yang berturut – turut, $t \geq 0$.

$F(t)$ adalah fungsi kepadatan komulatif (cdf) dari $t = \int_0^t f(x)\,dx$

Misalkan T adalah interval waktu sejak pemunculan kejadian terakhir, maka berlaku pernyataan probabilitas berikut ini :

P { waktu antar kejadian melebihi T } = P { tidak ada kejadian sebelum T }

Pernyataan di atas dapat ditulis menjadi :

$$P(t \geq T) = p_0(T)$$

$$\int_T^\infty f(t)\,dt = p_0(T)$$

$$= e^{-\beta T} \quad , t > 0$$

atau

$$\int_0^T f(t)\,dt = 1 - e^{-\beta T} \quad , \quad T > 0$$

Dengan mengambil derivatif dari kedua sisi dalam kaitannya dengan T, diperoleh :

$$f(t) = \beta e^{-\beta T}$$

Persamaan di atas merupakan suatu fungsi yang berdistribusi eksponensial dengan mean $E\{t\} = 1/\beta$. Dengan $f(t)$ fungsi yang berdistribusi eksponensial.

Untuk $h > 0$ dan $h \to 0$, dipunyai untuk $n > 0$:

$$p_n(t+h) = p_n(t)p_n(h) + p_{n-1}(t)p_1(h) \qquad ,n = 1,2,\ldots \qquad (2.1.3)$$
$$p_0(t+h) = p_0(t)p_0(h) \qquad ,n = 0 \qquad (2.1.4)$$

Sehingga,

$$p_0(h) = e^{-\beta h}$$
$$p_1(h) = 1 - p_0(h)$$

Karena $h \to 0$, diperoleh

$$p_0(h) \cong 1 - \beta h$$
$$p_1(h) \cong \beta h$$

Persamaan (2.1.1) dan (2.1.3) dapat ditulis sebagai

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} \cong -\beta\, p_n(t) + \beta\, p_{n-1}(t)$$
$$\frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} \cong -\beta\, p_0(t)$$

Dari Teorema 2.1.3. , persamaan di atas menghasilkan distribusi Poisson dengan parameter βt.

Kesimpulan dari hasil di atas adalah bahwa jika interval waktu antara beberapa kejadian yang berturut – turut adalah berdistribusi eksponensial dengan mean $1/\beta$, maka jumlah kejadian dalam satu periode waktu tertentu pasti berdistribusi Poisson dengan laju pemunculan rata – rata β.

2.1.3. Notasi Antrian

Dalam notasi Kendall, sistem antrian dituliskan sebagai a / b / c dimana simbol – simbol a, b dan c didefinisikan sebagai berikut :

$a \equiv$ distribusi kedatangan

$b \equiv$ distribusi waktu pelayanan

$c \equiv$ jumlah pelayan ($c = 1, 2, \ldots, \infty$)

Sedangkan simbol – simbol a dan b diganti dengan salah satu dari beberapa notasi di bawah ini :

M $\equiv$ distribusi kedatangan atau pelayanan Poisson (atau Markov)

D $\equiv$ waktu antar–kedatangan atau waktu antar–pelayanan konstan (deterministik)

E_k $\equiv$ distribusi Erlangian atau Gamma dari distribusi antar kedatangan atau waktu pelayanan dari parameter k

GI $\equiv$ distribusi Independen Umum dari kedatangan

$G \equiv$ distribusi Umum dari pelayanan

Contoh 2.1.1

Misalkan terdapat notasi M / D / 10. Hal ini berarti sistem tersebut mempunyai kedatangan berdistribusi Poisson, waktu pelayanan konstan (deterministik) dan terdapat 10 pelayan dalam sistem.

2.1.4. Disiplin Antrian

Didefinisikan beberapa disiplin antrian sebagai berikut :

FIFO : First In First Out

Dapat juga dinotasikan dengan FCFS = First Come First Served. Pelanggan dilayani menurut urutan kedatangan. Pelanggan yang datang terlebih dahulu akan dilayani terlebih dahulu.

LIFO : Last In First Out

Dapat juga dinotasikan dengan LCFS = Last Come First Served. Pelanggan yang datang terakhir akan dilayani terlebih dahulu.

SIRO : Service In Random Order

Pelanggan akan dilayani secara random (acak) karena sistem tidak mengingat kedatangan pelanggan.

2.1.5. Probabilitas Steady – State

Pada antrian M/M/1, diasumsikan laju kedatangan tidak bergantung pada jumlah dalam sistem, yaitu $\beta_n = \beta$ untuk semua n dan pelayan tunggal dalam sistem tersebut menyelesaikan pelayanan dengan kecepatan konstan, yaitu $\delta_n = \delta$ untuk semua n. Akibatnya, model ini memiliki laju kedatangan berdistribusi Poisson dengan mean β dan laju pelayanan berdistribusi Eksponensial dengan mean δ. Dengan mendefinisikan $\rho = \beta / \delta$, sehingga :

$$p_n = \rho^n p_0 \qquad , n = 0, 1, 2, \dots$$

Ditentukan p_0 dengan menggunakan fakta bahwa jumlah semua p_n untuk $n = 0, 1, 2,$ ... sama dengan 1, diperoleh :

$$p_0 (1 + \rho + \rho^2 + \ldots) = 1$$

Jika diasumsikan $\rho < 1$, maka

$$p_0\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = 1 \qquad atau \qquad p_0 = 1 - \rho$$

Sehingga diperoleh rumus umum untuk antrian model (M/M/1) adalah :

$$p_n = (1 - \rho) \rho^n \qquad , n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.1.5}$$

Persamaan (2.1.5) merupakan suatu fungsi berdistribusi geometrik.

Agar tercapai kondisi steady – state harus dipenuhi bahwa $\rho < 1$ yang berarti $\beta < \delta$ (laju kedatangan harus lebih kecil daripada laju pelayanan). Jika tidak berlaku demikian, maka ukuran antrian akan meningkat menjadi tak terhingga.

2.1.6. Formula Little

Didefinisikan variabel random :

$X(t)$ = jumlah pelanggan dalam sistem pada waktu t

Dibutuhkan variabel random yang lain :

$A(t)$ = jumlah kedatangan dalam interval $(0,t]$

$D(t)$ = jumlah kepergian dalam interval $(0,t]$

$S(t)$ = waktu total yang digunakan oleh semua pelanggan tinggal dalam sistem selama $(0,t]$

$W(t)$ = waktu rata – rata pelanggan tinggal dalam sistem selama $(0,t]$

Dari definisi di atas diketahui

$$W(t) = S(t) / A(t)$$

Sehingga jumlah pelanggan rata – rata dalam sistem

$$X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,dt$$

Laju kedatangan rata – rata :

$$\beta_a = \lim_{T\to\infty} \frac{A(t)}{T}$$

Waktu rata – rata pelanggan tinggal dalam sistem

$$W = \lim_{T\to\infty} W(T)$$

Jika pelanggan datang pada sistem menurut proses Poisson dengan laju β, maka

$$\beta = \beta_a$$

karena dalam hal ini $E[A(t)] = \beta t$.

Hal utama dalam teori antrian adalah X, β_a dan W yang dapat dihitung dengan Formula Little :

$$X = \beta_a W$$

Perbandingan waktu total pelanggan ($S(t)$) dengan jumlah kedatangan pelanggan ($S(t)$) adalah waktu rata – rata pelanggan sehingga diperoleh :

$$W(T) = \frac{S(T)}{A(T)}$$

$$= \frac{1}{A(T)}\int_0^T X(t)\,dt$$

sehingga waktu rata – rata pelanggan tinggal dalam sistem dapat dihitung dengan rumus :

$$W = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{A(T)} \int_0^T X(t)\, dt$$

Dari definisi rata – rata laju kedatangan, diketahui $(A(T) / T) \to \beta_a$ untuk $T \to \infty$. Sehingga diperoleh

$$W = \frac{1}{\beta_a}\left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\, dt \right\}$$

$$W = \frac{X}{\beta_a} \qquad (2.1.6)$$

Persamaan (2.1.6) adalah Formula Little

2.2. Model Rantai Markov

Dalam model rantai Markov, terdapat dua macam pembagian waktu, yaitu rantai Markov dengan waktu diskret dan rantai Markov dengan waktu kontinu. Berikut ini akan diuraikan mengenai rantai Markov waktu diskret dan rantai Markov waktu kontinu.

Definisi 2.2.1.

Suatu proses stokastik $\{X_t\}$ dikatakan proses Markov jika probabilitas bersyarat dari kejadian yang akan datang dengan diberikan kejadian yang lalu dan keadaan sekarang adalah bebas dari kejadian yang lalu dan hanya tergantung pada keadaan sekarang.

2.2.1. Rantai Markov Waktu Diskret

Pandang suatu proses stokastik waktu diskret $\{ X_n \mid n = 0, 1, 2, \ldots \}$. Proses dikatakan sebagai rantai Markov waktu diskret jika untuk semua keadaan i, terdapat probabilitas tertentu P_{ij} yang selanjutnya akan menjadi keadaan j, tanpa mempedulikan proses yang datang dari i. Yaitu untuk semua $n > 0$, $i_{n-1}, \ldots, i_0, i, j$

$$P_{ij} = P\{ X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0 \}$$

$$P_{ij} = P\{ X_{n+1} = j \mid X_n = i \} \tag{2.2.1}$$

Persamaan (2.2.1) menyatakan probabilitas bersyarat dari kejadian yang akan datang ($X_{n+1} = j$), dengan diberikan beberapa kejadian yang lalu ($X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}$) dan keadaan sekarang ($X_n = i$) adalah bebas dari kejadian yang lalu.

Jika $P\{ X_{n+1} = j \mid X_n = i \}$ adalah bebas dari n, rantai Markov dapat dikatakan mempunyai probabilitas transisi setimbang.

2.2.2. Rantai Markov Waktu Kontinu

Misalkan $\{X(t) \mid t \geq 0 \}$ adalah proses stokastik waktu kontinu dengan ruang keadaan tidak berhingga $S = \{ 0, 1, \ldots \}$. $\{X(t)\}$ dikatakan menjadi rantai markov waktu kontinu jika probabilitas transisi mempunyai sifat sebagai berikut :

Untuk setiap $t, s \geq 0$ dan $j \in S$ berlaku

$$P\{X(s+t) = j \mid X(u); u \leq s\} = P\{X(s+t) = j \mid X(s)\}$$

Seperti dalam rantai markov waktu diskret, rantai markov waktu kontinu mempunyai sifat bahwa distribusi bersyarat dari keadaan yang akan datang dengan diberikan kejadian yang lalu dan keadaan sekarang, hanya tergantung dari keadaan sekarang.

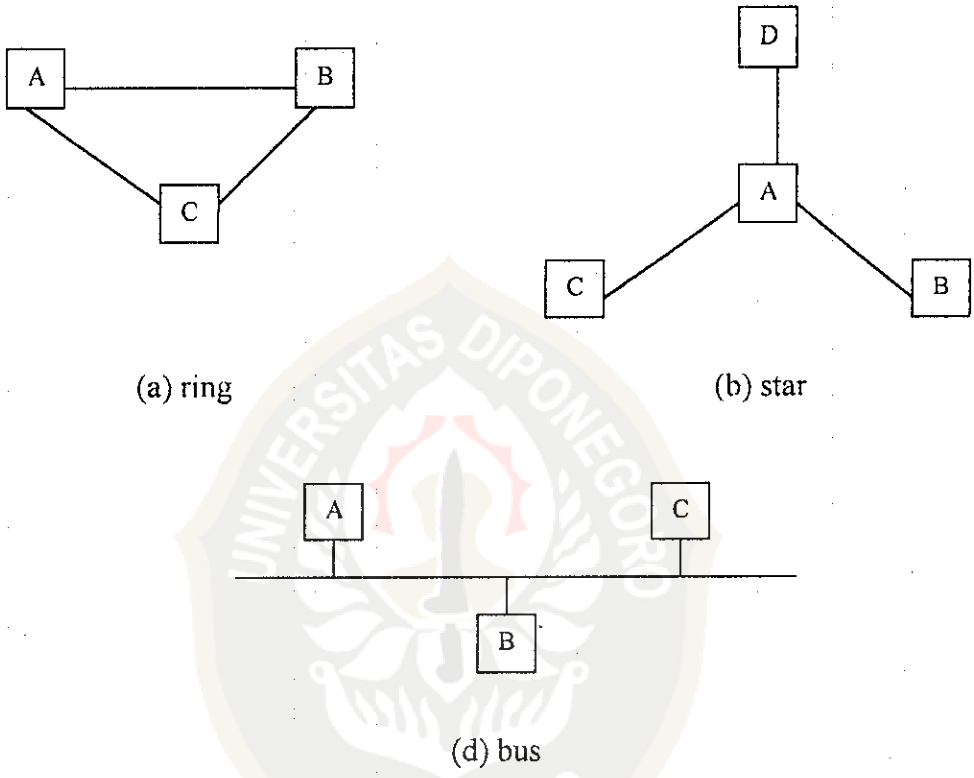
2.3. Gambaran Mengenai Local Area Network

Komunikasi data merupakan pengiriman data secara elektronik dari satu tempat ke tempat lain melalui suatu media komunikasi. Data dapat berupa hasil atau masih akan diproses oleh suatu komputer. Network atau jaringan merupakan hubungan antara dua atau lebih sistem komputer melalui media komunikasi untuk melakukan komunikasi data satu dengan yang lain.

Local Area Network (LAN) merupakan network atau jaringan sejumlah sistem komputer yang lokasinya terbatas di dalam sebuah gedung atau kampus dengan ukuran luas kurang dari 10 km. LAN sering digunakan untuk menghubungkan mainframe dan workstation dalam kantor atau pabrik untuk pemakaian resource bersama (misalnya printer) dan saling bertukar informasi. Untuk mengirim pesan melalui jaringan, selalu dinyatakan dengan suatu string dari simbol binari, yaitu satu dan nol. Simbol binari ini disebut bit. Pesan – pesan tersebut dipecah menjadi grup – grup kecil yang disebut paket atau frame.

Gambar 2.1 menunjukkan beberapa macam topologi yang dapat digunakan pada LAN. Pada jaringan bus, pada suatu saat sebuah mesin bertindak sebagai master dan diijinkan untuk mengirim paket. Mesin – mesin lainnya perlu menahan diri untuk tidak mengirim apapun. Pada Ethernet, komputer – komputer dapat mengirim data kapan saja. Bila dua buah paket atau lebih bertabrakan, maka masing – masing komputer cukup menunggu beberapa waktu secara random dan mengulangi lagi pengiriman.

Dalam topologi star semua node dihubungkan pada titik tunggal disebut titik pusat atau hub. Media transmisi dapat berupa kabel koaksial, kabel twisted – pair atau kabel serat optik.



Gambar 2.1. Beberapa topologi untuk LAN

Pada topologi ring, setiap bit dikirim ke daerah sekitarnya tanpa menunggu paket lengkap diterima. Biasanya, setiap bit mengelilingi ring sesuai waktu yang dibutuhkan untuk mengirim beberapa bit, sebelum paket lengkap dikirim seluruhnya.