## BAB II

## DASAR TEORI

Pada bab II ini dijelaskan tentang lemma zorn, ring dan sifat-sifatnya, ideal, homomorphisma ring serta beberapa operasi pada matriks.

### 2.1. Lemma Zorn

Diberikan definisi tentang himpunan terurut parsial sebagai berikut :

**Definisi 2.1.1.**

Suatu relasi $\mathcal{R}$ pada himpunan A dikatakan urutan parsial pada A bila memenuhi :

a. Refleksif, yaitu $\forall$ a $\in$ A, a $\mathcal{R}$ a.

b. Antisimetris, yaitu $\forall$ a, b $\in$ A, a $\mathcal{R}$ b dan b $\mathcal{R}$ a $\Rightarrow$ a = b.

c. Transitif, yaitu $\forall$ a, b, c $\in$ A, a $\mathcal{R}$ b dan b $\mathcal{R}$ c $\Rightarrow$ a $\mathcal{R}$ c.

**Definisi 2.1.2.**

Suatu himpunan A bersama-sama dengan relasi urutan parsial yang tertentu di A disebut himpunan terurut parsial yang dinyatakan sebagai pasangan terurut (A,$\mathcal{R}$).

Berikut ini disinggung pula mengenai himpunan bagian terurut parsial, komparabel, rantai, batas atas dan elemen maksimal.

**Definisi 2.1.3.**

Pandang (A,$\mathcal{R}$) merupakan himpunan terurut parsial. Maka

1. Setiap a, b $\in$ A dikatakan komparabel (berelasi ke $\mathcal{R}$) jika a $\mathcal{R}$ b atau b $\mathcal{R}$ a.
2. Jika B suatu himpunan bagian tak kosong dari A, maka urutan parsial $\mathcal{R}$ di A menginduksi urutan parsial $\mathcal{R}$ di B. Sehingga himpunan terurut (B,$\mathcal{R}$) disebut himpunan bagian (urutan parsial) dari himpunan terurut parsial (A,$\mathcal{R}$).
3. B himpunan bagian dari A disebut suatu rantai jika dua elemen di dalam B adalah komparabel.
4. Suatu elemen z $\in$ A disebut batas atas dari B jika x $\mathcal{R}$ z untuk setiap x $\in$ B.
5. Suatu elemen z $\in$ A disebut suatu elemen maksimal dari (A,$\mathcal{R}$) jika tidak ada elemen $x \in \{y \in A | y \neq z\}$ sedemikianhingga z $\mathcal{R}$ x. Dengan kata lain, z $\in$ A adalah suatu elemen maksimal dari (A,$\mathcal{R}$) jika z $\mathcal{R}$ x (dengan x $\in$ A), selanjutnya z = x.

**Lemma Zorn**

Pandang (A,$\mathcal{R}$) adalah suatu himpunan terurut parsial. Jika setiap rantai dalam A mempunyai batas atas (dalam A), maka A memuat suatu elemen maksimal.

Berikut ini dikemukakan beberapa hal dasar mengenai definisi dan teorema yang berkaitan dengan ring :

## 2.2. Ring

### 2.2.1. Sifat-sifat Ring

Aksioma-aksioma suatu ring diberikan sebagai berikut :

**Definisi 2.2.1.1.**

Suatu ring R adalah suatu himpunan R yang tidak kosong beserta dua hukum komposisi yang disajikan dengan tanda penjumlahan dan tanda pergandaan dan yang memenuhi aksioma-aksioma berikut :

1. Terhadap operasi penjumlahan memenuhi aksioma-aksioma berikut :

   1.1. Untuk semua a, b dalam R dapat ditemukan dengan tunggal elemen c dalam R juga, sedemikianhingga a + b = c.

   $(\forall\ a, b \in R)(\exists!\ c \in R).\ a + b = c.$

   1.2. Untuk semua a, b, c dalam R berlaku (a + b) + c = a + ( b + c ).

   $(\forall\ a, b, c \in R).\ (a + b) + c = a + (b + c).$

   1.3. Di dalam R terdapat elemen 0 sedemikianhingga untuk setiap a dari R berlaku 0 + a = a + 0 = a.

   $(\exists\ 0 \in R)(\forall\ a \in R).\ a + 0 = 0 + a = a.$

   1.4. Untuk setiap a dalam R dapat ditemukan elemen –a sedemikianhingga – a + a = a + (-a) = 0.

   $(\forall\ a \in R)(\exists\ \text{-}a \in R).\ (-a) + a = a + (-a) = 0.$

   1.5. Untuk setiap a, b dalam R berlaku a + b = b + a.

   $(\forall\ a, b \in R).\ a + b = b + a.$

2. Terhadap operasi pergandaan mempunyai sifat-sifat tertutup dan assosiatif, yaitu :

   2.1. Untuk semua a, b dalam R dapat ditemukan dengan tunggal elemen c dalam R sedemikianhingga a b = c.

   $(\forall\ a, b \in R)(\exists!\ c \in R).\ a\,b = c.$

2.2. Untuk semua a, b dalam R berlaku (a b) c = a (b c).

$(\forall a, b, c \in R). (a\,b)\,c = a\,(b\,c)$.

3. Kedua aturan komposisi diatas dihubungkan dengan aksioma distributifitas sebagai berikut :

3.1. Untuk semua a, b, c dalam R berlakulah $a\,(b + c) = a\,b + a\,c$ dan $(b + c)\,a = b\,a + c\,a$.

$(\forall a, b, c \in R). a\,(b + c) = a\,b + a\,c$.

$(\forall a, b, c \in R). (b + c)\,a = b\,a + c\,a$.

Sifat-sifat ring diuraikan dalam definisi-definisi berikut :

**Definisi 2.2.1.2.**

Jika R komutatif terhadap pergandaan yaitu apabila pada aksioma-aksioma suatu ring R ditambahkan aksioma : untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $ab = ba$, maka R disebut ring komutatif.

**Definisi 2.2.1.3.**

Apabila dalam ring R dapat ditemukan elemen $e_1$ dengan sifat bahwa $e_1a = a$ untuk setiap $a \in R$ maka $e_1$ disebut elemen satuan kiri. Apabila ada elemen $e_2$ sedemikianhingga $ae_2 = a$ untuk setiap $a \in R$ maka $e_2$ disebut elemen satuan kanan. Apabila ada elemen e sedemikianhingga $ea = ae = a$ untuk setiap $a \in R$ maka disebut elemen satuan. Selanjutnya apabila pada aksioma-aksioma ring R ditambahkan aksioma tersebut maka R disebut ring dengan elemen satuan.

**Definisi 2.2.1.4.**

Suatu elemen a dalam ring R disebut idempoten bila $a^2 = a$.

**Definisi 2.2.1.5.**

Suatu elemen a dalam ring R disebut nilpoten bila dapat ditemukan bilangan bulat positif n sedemikianhingga $a^n = 0$.

Di dalam suatu ring terdapat subring. Suatu jenis khusus dari subring adalah ideal. Selanjutnya diberikan definisi tentang subring dan ideal serta hal-hal yang terkait dengan ideal sebagai berikut :

## 2.2.2. Ideal

**Definisi 2.2.2.1.**

Misalkan R suatu ring. A adalah himpunan bagian dari R dan A bukan himpunan kosong. Jika A terhadap operasi-operasi yang sama dengan operasi-operasi pada R merupakan ring, maka dikatakan bahwa A adalah subring dari R. Syarat perlu cukup agar A merupakan subring dari R adalah

untuk setiap a, b $\in$ R berlaku

i. a, b $\in$ A $\Rightarrow$ a - b $\in$ A.

ii. a, b $\in$ A $\Rightarrow$ a b $\in$ A.

**Definisi 2.2.2.2.**

Misalkan R suatu ring dan $\mathcal{U} \subset R$ dengan $\mathcal{U} \neq \varnothing$, maka $\mathcal{U}$ disebut ideal kiri dari R bila memenuhi :

i. $(\forall\, a,b \in \mathcal{U})$. $a,b \in \mathcal{U} \Rightarrow (a-b) \in \mathcal{U}$.

ii. $(\forall\, a \in \mathcal{U})(\forall\, r \in R)$. $r.a \in \mathcal{U}$.

Apabila syarat ii diganti dengan ii.a yaitu bahwa ar ($a \in \mathcal{U}$, $r \in R$) harus berada dalam $\mathcal{U}$, maka $\mathcal{U}$ yang memenuhi syarat i dan ii.a disebut ideal kanan. Apabila baik ii maupun ii.a dipenuhi maka idealnya disebut ideal dua sisi.

Pandang ring R komutatif sehingga semua ideal adalah ideal dua sisi atau disebut ideal saja. Berikut ini adalah sifat-sifat ideal dari R :

**Lemma 2.2.2.3.**

Jika $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ ideal dari ring R, maka berlaku :

1. $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ ideal dari ring R.
2. $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ ideal dari ring R.
3. $\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2$ ideal dari ring R.

Bukti :

1. Akan dibuktikan bahwa jika $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ ideal dari R maka $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ ideal dari R.

   Diambil $u_1, u_2 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ maka $u_1, u_2 \in \mathcal{U}_1$ dan $u_1, u_2 \in \mathcal{U}_2$.

   Karena $u_1, u_2 \in \mathcal{U}_1$ maka $u_1 - u_2 \in \mathcal{U}_1$ sebab $\mathcal{U}_1$ ideal dari R,

   begitu juga karena $u_1, u_2 \in \mathcal{U}_2$ maka $u_1 - u_2 \in \mathcal{U}_2$ sebab $\mathcal{U}_2$ ideal dari R.

   Dari $u_1 - u_2 \in \mathcal{U}_1$ dan $u_1 - u_2 \in \mathcal{U}_2$ maka $u_1 - u_2 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ ........... 2.2.2.1.

   Diambil $r \in R$, $u_1 \in \mathcal{U}_1$ maka $ru_1 \in \mathcal{U}_1$ dan $u_1r \in \mathcal{U}_1$ sebab $\mathcal{U}_1$ ideal dari R dan $ru_1 \in \mathcal{U}_2$ dan $u_1r \in \mathcal{U}_2$ sebab $\mathcal{U}_2$ ideal dari R.

Dari $ru_1 \in \mathcal{U}_1$ dan $ru_1 \in \mathcal{U}_2$ maka $ru_1 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ ............................ 2.2.2.2.

Dari $u_1r \in \mathcal{U}_1$ dan $u_1r \in \mathcal{U}_2$ maka $u_1r \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ ........................... 2.2.2.3.

Dari 2.2.2.1., 2.2.2.2. dan 2.2.2.3. terbukti bahwa $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ ideal dari R.

Jadi terbukti bahwa jika $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ ideal dari R maka $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ ideal dari R.

2. Akan ditunjukkan jika $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ ideal dari R maka $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ ideal dari R.

Diambil elemen $x, x' \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$, $r \in R$ dengan $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = \{x \in R | x = u_1 + u_2, u_1 \in \mathcal{U}_1, u_2 \in \mathcal{U}_2\}$ maka $x = u_1 + u_2$, $u_1 \in \mathcal{U}_1$, $u_2 \in \mathcal{U}_2$ dan $x' = u_1' + u_2'$, $u_1' \in \mathcal{U}_1$, $u_2' \in \mathcal{U}_2$.

Karena $u_1 \in \mathcal{U}_1$, $u_1' \in \mathcal{U}_1$ maka $u_1 - u_1' \in \mathcal{U}_1$, $ru_1 = u_1r \in \mathcal{U}_1$ (sebab $\mathcal{U}_1$ ideal dari R).

Karena $u_2 \in \mathcal{U}_2$, $u_2' \in \mathcal{U}_2$ maka $u_2 - u_2' \in \mathcal{U}_2$, $ru_2 = u_2r \in \mathcal{U}_2$ (sebab $\mathcal{U}_2$ ideal dari R).

$$\begin{aligned} x - x' &= (u_1 + u_2) - (u_1' + u_2') \\ &= (u_1 - u_1') + (u_2 - u_2') \end{aligned}$$

$x - x' \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$,

sehingga didapat bahwa jika $x, x' \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \Rightarrow x - x' \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$... 2.2.2.4.

Diambil $x \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$, $r \in R$ dimana jika $x = u_1 + u_2$, $u_1 \in \mathcal{U}_1$, $u_2 \in \mathcal{U}_2$ maka $rx = r(u_1 + u_2) = ru_1 + ru_2 \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ dan $xr = (u_1 + u_2)r = u_1r + u_2r \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$

sehingga didapat jika $r \in R$, $x \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ maka $rx = xr \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$....... 2.2.2.5.

Dari 2.2.2.4. dan 2.2.2.5. terbukti bahwa $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ ideal dari R.

Jadi terbukti bahwa jika $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ ideal dari R maka $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ ideal dari R.

3. Akan dibuktikan bahwa jika $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ ideal dari R maka $\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2$ ideal dari R.

Diambil elemen $a_{ij}$, $b_{ij} \in \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2$ dengan $a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ dan $b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i' y_i'$

dimana $x_i, x_i' \in \mathcal{U}_1$, $y_i, y_i' \in \mathcal{U}_2$ untuk setiap $i \in \{1,2,,\ldots,n\}$, maka

$$a_{ij} - b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i' y_i'$$

$$= x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n - (x_1'y_1'+x_2'y_2'+\ldots+x_n'y_n')$$

$$= x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n+(-x_1')y_1'+(-x_2')y_2'+\ldots+(-x_n')y_n',$$

$a_{ij} - b_{ij} \in \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2$ ........................................................................................ 2.2.2.6.

Diambil $a_{ij} \in \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2$, $r \in R$ dengan $a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ dimana $x_i \in \mathcal{U}_1$, $y_i \in \mathcal{U}_2$ untuk

setiap $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ maka

$$ra_{ij} = r \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$= r(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)$$

$$= r(x_1y_1)+r(x_2y_2)+\ldots+r(x_ny_n)$$

$$= (rx_1)y_1+(rx_2)y_2+\ldots+(rx_n)y_n,$$

sehingga $ra_{ij} \in \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2$ ............................................................................. 2.2.2.7.

dan $a_{ij}r = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\, r$

$= (x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)r$

$= (x_1y_1)r+(x_2y_2)r+\ldots+(x_ny_n)r$

$= x_1(y_1r)+x_2(y_2r)+\ldots+x_n(y_nr)$,

sehingga $a_{ij}r \in \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2$ ........................................................................ 2.2.2.8.

Dari 2.2.2.6., 2.2.2.7. dan 2.2.2.8. terbukti bahwa $\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2$ ideal dari R.

Jadi terbukti bahwa jika $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ ideal dari R maka $\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2$ ideal dari R $\blacksquare$

**Definisi 2.2.2.4.**

Suatu ideal $\mathcal{M}$ di dalam ring R disebut maksimal bila $\mathcal{M}$ tidak termuat dalam suatu ideal lainnya selain $\mathcal{M}$ sendiri dan R.

$\mathcal{M}$ disebut ideal kiri maksimal dari R jika

a. $\mathcal{M} \neq R$.

b. jika $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{L}} \subseteq R$ maka $\mathcal{M} = \mathcal{I}_{\mathcal{L}}$ atau $\mathcal{I}_{\mathcal{L}} = R$ dimana $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}$ ideal kiri dari R.

Demikian pula $\mathcal{M}$ disebut ideal kanan maksimal dari R jika

a. $\mathcal{M} \neq R$.

b. Jika $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{R}} \subseteq R$ maka $\mathcal{M} = \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ atau $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} = R$ dengan $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ ideal kanan dari R.

Sedangkan $\mathcal{M}$ disebut ideal maksimal dari R jika $\mathcal{M}$ ideal kiri maksimal sekaligus ideal kanan maksimal.

**Definisi 2.2.2.5.**

$\mathcal{U}$ suatu ideal kiri, kanan atau dua sisi dalam suatu ring R dikatakan sejati jika $\mathcal{U} \subseteq R$ , $\mathcal{U} \neq R$ dan $\mathcal{U} \neq \{0\}$.

### 2.2.3. Homomorphisma Ring

**Definisi 2.2.3.**

Jika R dan R′ adalah suatu ring dan pemetaan $f : R \to R'$ memenuhi

i. $f(a+b) = f(a) + f(b)$

ii. $f(ab) = f(a).f(b) \quad \forall\, a, b \in R$,

maka pemetaan $f : R \to R'$ dinamakan homomorphisma ring dari R ke R′.

Jika pada definisi 2.2.3., $f : R \to R'$ suatu pemetaan satu-satu dan onto maka f adalah suatu isomorphisma.

## 2.3. Beberapa Operasi Pada Matriks

Pada subbab ini dijelaskan suatu ilmu hitung matriks yang dapat ditambahkan dan dikalikan sesuai dengan penggunaannya.

**Definisi 2.3.1.**

Dua matriks A dan B dikatakan sama yaitu A = B jika kedua matriks mempunyai ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut sama yaitu $[A]_{ij} = [B]_{ij}$, untuk semua nilai i dan j, dimana :

$[A]_{ij}$ : entri matriks A dari baris i dan kolom j.

$[B]_{ij}$ : entri matriks B dari baris i dan kolom j.

Jika A dan B tidak sama, ditulis $A \neq B$, maka $[A]_{ij} \neq [B]_{ij}$ untuk beberapa nilai i,j.

**Definisi 2.3.2.**

Jika A dan B sembarang dua matriks yang ukurannya sama maka penjumlahan A + B adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut yaitu $[A]_{ij} + [B]_{ij}$. Sedangkan pengurangan A – B adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut yaitu $[A]_{ij} - [B]_{ij}$. Matriks-matriks yang ukurannya berbeda tidak dapat ditambahkan atau dikurangkan.

**Definisi 2.3.3.**

Jika A adalah matriks berukuran m x r dan B adalah matriks berukuran r x n maka hasil kali AB adalah matriks berukuran m x n yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut : untuk mencari entri dalam baris ke-i dan kolom ke-j dari AB pilihlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan sehingga didapat $[AB]_{ij} = [A]_{i1} [B]_{1j} + [A]_{i2} [B]_{2j} + \ldots + [A]_{in} [B]_{nj} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[B]_{kj}$ dimana $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ dan $j \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Definisi perkalian matriks mengharuskan banyaknya kolom dari matriks pertama A harus sama seperti banyaknya baris dari matriks kedua B supaya membentuk hasil kali AB. Jika kondisi ini tidak dipenuhi, maka hasil kali tersebut tidak dapat didefinisikan.

Berikut ini adalah aturan-aturan ilmu hitung matriks :

**Teorema 2.3.4.**

Dengan menganggap ukuran-ukuran matriks adalah sedemikianhingga operasi-operasi yang ditunjukkan dapat diketengahkan, maka aturan-aturan ilmu hitung matriks sebagai berikut :

1. $A + B = B + A$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. $A (B C) = (A B) C$.
4. $A (B + C) = A B + A C$.
5. $(B + C) A = B A + C A$.

Bukti :

1. Karena ruas kiri melibatkan $A + B$, maka A dan B harus mempunyai ukuran yang sama katakanlah m x n. Jelaslah bahwa $A + B$ adalah matriks berukuran m x n sehingga matriks tersebut mempunyai ukuran yang sama.

   Anggap $[L]_{ij}$ sembarang entri pada ruas kiri dan $[R]_{ij}$ entri yang bersesuaian pada ruas kanan. Untuk melengkapi bukti tersebut, maka $[L]_{ij} = [R]_{ij}$. Jika $[A]_{ij}$, $[B]_{ij}$ berturut-turut entri dalam baris ke-i dan kolom ke-j dari A, B maka dari definisi-definisi operasi matriks diperoleh $[L]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$ dan $[R]_{ij} = [B]_{ij} + [A]_{ij}$ karena $[A]_{ij} + [B]_{ij} = [B]_{ij} + [A]_{ij}$ maka $[L]_{ij} = [R]_{ij}$.
2. Karena ruas kiri mengoperasikan $A + (B + C)$, maka A, B dan C harus mempunyai ukuran yang sama katakanlah m x n. Jelas bahwa $(A + B) + C$

adalah matriks berukuran m x n sehingga matriks tersebut mempunyai ukuran yang sama. Anggap $[L]_{ij}$ sembarang entri pada ruas kiri dan $[R]_{ij}$ entri yang bersesuaian pada ruas kanan. Untuk melengkapi bukti tersebut, maka $[L]_{ij} = [R]_{ij}$. Jika $[A]_{ij}$, $[B]_{ij}$ dan $[C]_{ij}$ berturut-turut entri dalam baris ke-i dan kolom ke-j dari A, B dan C maka dari definisi operasi matriks diperoleh $[L]_{ij} = [A]_{ij} + ([B]_{ij} + [C]_{ij})$ dan $[R]_{ij} = ([A]_{ij} + [B]_{ij}) + [C]_{ij}$ karena

$[A]_{ij} + ([B]_{ij} + [C]_{ij}) = [A]_{ij} + [B]_{ij} + [C]_{ij}$ , sifat asosiatif penjumlahan

$= ([A]_{ij} + [B]_{ij}) + [C]_{ij}$ ,

maka $[L]_{ij} = [R]_{ij}$.

3. Apabila matriks A berukuran m x n, matriks B berukuran n x p dan matriks C berukuran p x q, maka A (B C) = (A B) C dengan langkah sebagai berikut :

   Ukuran matriks sebelah kiri tanda persamaan yaitu A (B C) sama dengan ukuran matriks sebelah kanan tanda persamaan yaitu (A B) C, masing-masing sebesar m dan q. Selanjutnya entri-entri matriks A dari baris i adalah $[A]_{i1}$, $[A]_{i2}$, ..., $[A]_{in}$ dimana i = 1,2,...,n. Sedangkan entri-entri pada matriks BC untuk kolom j adalah $[B]_{1t}[C]_{tj}$, $[B]_{2t}[C]_{tj}$, ..., $[B]_{nt}[C]_{tj}$ dimana t = 1,2, ...,p. Jadi entri pada baris ke-i dan kolom ke-j dari hasil kali matriks A (B C) = $\sum_{s=1}^{n}[A]_{is}\left(\sum_{t=1}^{p}[B]_{st}[C]_{tj}\right)$, karena berhubungan dengan penjumlahan terbatas, maka urutan penjumlahan tersebut dapat diubah menjadi $\sum_{t=1}^{p}\left(\sum_{s=1}^{n}[A]_{is}[B]_{st}\right)[C]_{tj}$ dimana merupakan entri matriks (A B) C selanjutnya apabila tanda kurung dihilangkan, maka

$\sum_{t=1}^{p}\left(\sum_{s=1}^{n}[A]_{is}[B]_{st}\right)[C]_{tj} = \sum_{t=1}^{p}\sum_{s=1}^{n}[A]_{is}[B]_{st}[C]_{tj}$ adalah entri matriks A B C dari baris ke-i dan kolom ke-j. Ini berarti

$$\sum_{s=1}^{n}[A]\left(\sum_{t=1}^{p}[B]_{is}[C]_{st}\right)=\sum_{t=1}^{p}\left(\sum_{s=1}^{n}[A]_{is}[B]_{st}\right)[C]_{tj}=\sum_{t=1}^{p}\sum_{s=1}^{n}[A]_{is}[B]_{st}[C]_{tj}$$

4. Apabila matriks A berukuran m x n, matriks B berukuran n x p dan matriks C berukuran n x p maka dibuktikan A (B + C) = A B + A C sebagai berikut :

   Matriks sebelah kiri tanda persamaan yaitu A (B + C) berukuran m x p. Sedangkan sebelah kanan tanda persamaan yaitu AB + AC juga berukuran m x p. Jadi ukuran matriks sebelah kiri dan sebelah kanan tanda persamaan harus sama sudah terpenuhi. Entri dari matriks sebelah kiri tanda persamaan sama dengan entri dari matriks sebelah kanan tanda persamaan. Karena entri pada baris i dan kolom j adalah

   $\sum_{t=1}^{n}[A]_{it}\left([B]_{tj}+[C]_{tj}\right) = \sum_{t=1}^{n}[A]_{it}[B]_{tj}+\sum_{t=1}^{n}[A]_{it}[C]_{tj}$, untuk semua nilai i dan j.

   Jadi terbukti A (B + C) = A B + A C .

5. Apabila matriks A berukuran m x n, matriks B berukuran n x p dan matriks C berukuran n x p maka dibuktikan (B + C) A = BA + CA sebagai berikut :

   Matriks sebelah kiri tanda persamaan yaitu (B + C) A berukuran p x n. Sedangkan sebelah kanan tanda persamaan yaitu BA + CA juga berukuran p x n. Jadi ukuran matriks sebelah kiri dan sebelah kanan tanda persamaan harus sama sudah terpenuhi. Entri dari matriks sebelah kiri tanda persamaan sama dengan entri dari matriks sebelah kanan tanda persaman. Karena entri pada baris i dan kolom j adalah

$$\sum_{t=1}^{n}\left([B]_{it}+[C]_{it}\right)[A]_{tj}=\sum_{t=1}^{n}[B]_{it}[A]_{tj}+\sum_{t=1}^{n}[C]_{it}[A]_{tj}$$, untuk semua nilai i dan j.

Jadi terbukti A (B + C) = A B + A C. ■