

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Pandang suatu ring sebagai suatu himpunan yang tak kosong dengan dua hukum komposisi yaitu penjumlahan dan pergandaan dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Karena ring suatu himpunan maka di dalam ring terdapat anggota ring, himpunan bagian dari ring dan lain-lain. Himpunan bagian dari ring yang memenuhi aksioma-aksioma ring disebut subring. Ideal kiri, ideal kanan adalah subring tertentu. Pada umumnya ideal kiri dari suatu ring belum tentu merupakan ideal kanan dari ring tersebut. Khususnya jika R ring komutatif maka setiap ideal kiri dari R juga merupakan ideal kanan dari R . Suatu ideal kiri sekaligus ideal kanan dari ring disebut ideal. Dalam ring dengan elemen satuan, himpunan semua ideal kiri merupakan himpunan terurut parsial terhadap relasi inklusi sehingga menurut lemma zorn ada ideal kiri maksimal di dalamnya. Ideal kiri maksimal dari suatu ring tidak tunggal dan irisan ideal kiri maksimal dari ring R membentuk ideal kiri dalam R yang dinamakan radikal Jacobson dari ring R dan dinotasikan $J(R)$. Dengan kata lain $J(R)$ merupakan ideal kiri (kanan) quasi-regular dari ring R dan memuat setiap ideal kiri (kanan) quasi-regular dari ring R .

Selanjutnya dari suatu ring R dapat dibentuk matriks-matriks dengan entri-entri dari R . Himpunan dari matriks-matriks ini dinamakan matriks atas ring R , dinotasikan dengan $M_{m \times n}(R)$ dengan m menyatakan jumlah baris dan n menyatakan jumlah kolom. Selanjutnya matriks atas ring R yang mempunyai

jumlah baris dan jumlah kolom sama dinotasikan $M_{n \times n}(R)$. Jika R ring komutatif dan mempunyai elemen satuan maka $M_{n \times n}(R)$ merupakan ring yang mempunyai elemen satuan $I_{n \times n}$ tetapi belum tentu komutatif sedangkan $M_{m \times n}(R)$ bukanlah ring. Karena $M_{n \times n}(R)$ ring dengan elemen satuan, maka dapat dibentuk ideal dari $M_{n \times n}(R)$ khususnya radikal Jacobson dari $M_{n \times n}(R)$ dan ditulis $J(M_{n \times n}(R))$.

1.2. Permasalahan

Dalam tugas akhir ini, matriks atas ring yang dibahas adalah $M_{n \times n}(R)$, khususnya mengenai :

1. Sifat-sifat ideal dalam $M_{n \times n}(R)$.
2. Hubungan antara matriks atas ideal dari ring R dengan ideal dari $M_{n \times n}(R)$, khususnya hubungan antara matriks atas radikal Jacobson dari ring R dengan radikal Jacobson dari $M_{n \times n}(R)$.

1.3. Tujuan

Penulisan tugas akhir ini bertujuan untuk mengetahui dan mempelajari beberapa ideal dalam matriks atas ring komutatif berukuran $n \times n$.

1.4. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut : bab I merupakan pendahuluan yang terdiri atas latar belakang, permasalahan, tujuan dan sistematika penulisan. Dasar teori dalam bab II berisi teori tentang lemma zorn, ring yang meliputi sifat-sifat ring, ideal, homomorfisma ring dan beberapa

operasi pada matriks. Pada bab III, pembahasan tentang sifat-sifat ideal dalam matriks atas ring komutatif dan radikal Jacobson. Akhir dari tugas akhir ini diberikan kesimpulan dari pembahasan yang telah diuraikan sebelumnya.

