BAB II

NOTASI ASIMTOTIK

Suatu notasi yang digunakan untuk memperkirakan nilai suatu fungsi, sehingga nilai fungsi yang diperkirakan mendekati nilai yang sesungguhnya. Dimana nilai fungsi yang diperkirakan memiliki nilai yang cukup besar, dikatakan notasi "asimtot".

Berikut ini akan dijelaskan beberapa notasi asimtotik diantaranya adalah notasi O (big – O), notasi Ω (omega) dan notasi Θ (theta).

2.1 Notasi big –O (O)

Definisi 2.1.1

$$O(f(n)) = \{t:N \rightarrow R^{\geq 0} \mid (\exists c \in R^{+}) (\forall n \in N)[t(n) \leq cf(n)]\}$$

Penjelasan

O(f(n)) adalah fungsi pemetaan t dari himpunan bilangan integer kehimpunan bilangan riil positif, sedemikian hingga ada konstanta c yang merupakan anggota bilangan riil positif dan untuk setiap n adalah anggota bilangan integer. Dengan demikian berlaku $t(n) \leq cf(n)$ jika $n \geq n_0$.

Contoh 2.1.1

Apakah fungsi $t(n) = 27n^2 + 10n + 12$ merupakan $O(n^2)$.

Penyelesaian

$t(n) = 27n^2 + 10n + 12$

$$\leq 27n^2 + 10n^2 + 12n^2$$
$$= 49n^2 = 49f(n)$$

Dengan mengambil $c = 49$ dan $n_0 = 1$, maka terbukti bahwa $t(n) = O(f(n)) = O(n^2)$.

Teorema 2.1.1

Diberikan $f_1(n)$ adalah $O(g_1(n))$ dan $f_2(n)$ adalah $O(g_2(n))$ maka $((f_1(n) + f_2(n))(n)$ adalah $(\max(g_1(n), g_2(n))$ selanjutnya disebut dengan **maximum rule.**

Seringkali dipunyai estimasi big-O untuk f_1 dan f_2, dari kedua fungsi tersebut (f_1 dan f_2) memiliki hubungan fungsi yang sama yaitu g. Pada situasi ini **Teorema 2.1.1** dapat digunakan untuk menunjukan bahwa $(f_1 + f_2)(n)$ adalah juga $O(g(n))$, jika $\max(g_1(n), g_2(n)) = g(n)$.

Akibat Teorema 2.1.1

Diberikan $f_1(n)$ dan $f_2(n)$ keduanya adalah $O(g(n))$ maka $(f_1 + f_2)(n)$ adalah $O(g(n))$. Dengan cara yang sama estimasi big-O dapat diperoleh dengan perkalian fungsi f_1 dan f_2, ketika n lebih besar dari pada $\max(n_{0.1}, n_{0.2})$ maka,

$$\begin{aligned} |(f_1 . f_2)(n)| &= |f_1(n)|\,|f_2(n)| \\ &\leq c_1 |g_1(n)|\;\; c_2 |g_2(n)| \\ &\leq c_1\, c_2 |(g_1, g_2)(n)| \\ &\leq c\,|(g_1, g_2)(n)| \end{aligned}$$

dimana $c = c_1 . c_2$. Dari pertidaksamaan tersebut, dengan mengikuti **Definisi 2.1.1,** maka $f_1(n)$ dan $f_2(n)$ adalah $O(g_1, g_2)$. Jika disana terdapat konstanta c dan n_0 yaitu $c = c_1.c_2$ dan $n_0 = \max(n_{0.1}, n_{0.2})$, maka $|(f_1, f_2)(n)| \leq c\,|(g_1, g_2)(n)|$ untuk $n \geq n_0$. Hasil tersebut ditetapkan sebagaimana teorema berikut :

Teorema 2.1.2

Diberikan $f_1(n)$ adalah $O(g_1(n))$ dan $f_2(n)$ adalah $O(g_2(n))$ maka,

$|(f_1, f_2)(n)|$ adalah $O(g_1(n), g_2(n))$.

Definisi 2.1.2

Limit Rule (aturan limit) memiliki 3 jenis yaitu:

1.Jika $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} \in R^+$ maka $f(n) \in O(g(n))$ dan $g(n) \in O(f(n))$.

2.Jika $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0$ maka $f(n) \in O(g(n))$ tetapi $g(n) \notin O(f(n))$.

3.Jika $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ maka $f(n) \notin O(g(n))$ tetapi $g(n) \in O(f(n))$.

Contoh 2.1.2

Jika $f(n) = \log n$ dan $g(n) = \sqrt{n}$, apakah $f(n) \in O(g(n))$ dan $g(n) \in O(f(n))$

Penyelesaian

Dengan menggunakan **aturan limit** diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(2\sqrt{n})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2/\sqrt{n} = 0$$

Dari aturan limit dapat ditunjukan bahwa $\log n \in O(\sqrt{n})$ akan tetapi $\sqrt{n} \notin O(\log n)$.

Teorema 2.1.3

Diberikan $f(n) = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 n + a_0$, dimana $a_0, a_1, \ldots\ldots\ldots a_{p-1}$ adalah bilangan riil., maka $f(n)$ adalah $O(n^p)$

Bukti

Dengan menggunakan pertidaksamaam segitiga untuk n > 1 diperoleh

$$
\begin{aligned}
|f(n)| &= |a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 n + a_0| \\
&\leq |a_p| n^p + |a_{p-1}| n^{p-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + |a_1| n + |a_0| \\
&= n^p (|a_p| n^p + |a_{p-1}| / n + \ldots\ldots\ldots\ldots + |a_1| / n^{p-1} + |a_0| / n^p) \\
&\leq n^p (|a_p| n^p + |a_{p-1}| n + \ldots\ldots\ldots\ldots + |a_1| + |a_0|)
\end{aligned}
$$

terlihat bahwa

$|f(n)| \leq c\, n^p$

dimana $c = |a_n| + |a_{n-1}| + \ldots\ldots\ldots\ldots + |a_1| + |a_0|$ untuk $n > 1$, oleh karena itu f(n) adalah $O(n^p)$.

2.2 Notasi Omega (Ω)

Definisi 2.2.1

$\Omega(f(n)) = \{t : N \to R^{\geq 0} \mid (\exists d \in R^+)(\forall n \in N)[\, t(n) \geq d\, f(n)\,]\}$

Penjelasan

Ω (f(n)) adalah fungsi pemetaan t dari himpunan bilangan integer ke himpunan bilangan riil positif, sedemikian hingga ada konstanta d yang merupakan anggota bilangan riil positif dan untuk setiap n adalah anggota bilangan integer. Dengan demikian berlaku $t(n) \geq df(n)$ jika $n \geq n_o$.

Contoh 2.2.1

Apakah fungsi $t(n) = n^3 + 2n^2$ merupakan $\Omega(n^3)$

Penyelesaian

Dengan mengikuti **Definisi 2.2.1,** misalkan diambil d = 1 dan n = 0,1,2.....maka didapatkan $t(n) \geq dn^3$, sehingga terbukti bahwa $t(n) \in \Omega\ (n^3)$.

2.3 Notasi Theta (Θ)

Definisi 2.3.1

$\Theta\ (f(n)) = \{t : N \rightarrow R^{\geq 0} \mid (\exists c,d \in R^{+})\ (\forall\ n \in N)\ [d\ f(n) \leq t(n)\ \leq c\ f(n)\ ]\}$

Penjelasan

Θ (f(n)) adalah fungsi pemetaan t dari himpunan bilangan integer ke himpunan bilangan riil positif, sedemikian hingga ada konstanta c,d yang merupakan anggota bilangan riil positif dan untuk setiap n adalah anggota bilangan integer. Dengan demikian berlaku $d\ f(n) \leq t(n)\ \leq c\ f(n)$ jika $n\ \geq n_o$.

Dari **Definisi 2.1.1 dan 2.2.1** notasi Θ juga memiliki bentuk persamaan sebagai berikut :

$\Theta\ f(n) = O\ (\ f(n)\ ) \cap \Omega\ (\ f(n)\ )$

Contoh 2.3.1

Apakah untuk $t(n) = 0{,}5\ n^2 - 3n$ berlaku $\Theta\ (n^2)$

Penyelesaian

Dengan mengambil c, d dan n_0 adalah suatu konstanta bilangan yang positif sedemikian sehingga,

$\mathbf{dn^2\ \leq 0{,}5\ n^2 - 3n\ \leq cn^2}$ jika $n \geq n_0$.

Pertidaksamaan tersebut dibagi dengan n^2 menghasilkan $\mathbf{d \le 0{,}5 - 3/n \le c}$.

Untuk pertidaksamaan sebelah kanan dengan mengambil $n \ge 1$ maka $c \ge 0{,}5$. Demikian juga pada pertidaksamaan sebelah kiri dengan mengambil $n \ge 7$ maka $d \le 1/14$. Jadi dengan memilih $c = 1/2$, $d = 1/14$ dan $n_0 = 7$ maka terbukti bahwa $0{,}5\, n^2 - 3n = \Theta\,(n^2)$.