

BAB II

MATERI PENUNJANG

Dalam pembahasan generalized invers (G-Invers) dalam regresi linier berganda, sebagai materi penunjangnya adalah sebagai berikut :

2.1 Matrik

2.1.1 Vektor Kolom dan Vektor Baris

Suatu matrik \mathbf{a} dikatakan sebuah vektor kolom jika matrik tersebut terdiri dari satu kolom.

Notasi :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} \text{ adalah vektor yang berukuran } m \times 1.$$

Transpose dari vektor \mathbf{a} (dinotasikan \mathbf{a}') adalah berbentuk matrik berukuran $1 \times m$ yang dinamakan vektor baris.

Notasi :

$$\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}' = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m]$$

Vektor \mathbf{a}' dapat ditulis dalam bentuk (a_1, a_2, \dots, a_m) .

2.1.2 Matrik Transpose

Suatu matrik $\mathbf{A} = (a_{ij})$, dengan $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$ berukuran $(m \times n)$. Transpose dari \mathbf{A} bernotasi \mathbf{A}' adalah matrik berukuran

$(n \times m)$ yang didapat dari matrik A dengan menuliskan baris ke- i dari matrik A sebagai kolom ke- i dari A' , atau dapat ditulis $A'=(a_{ji})$.

Beberapa sifat dari matrik transpose :

$$1. (A + B)' = A' + B' \quad (2.1.2.1)$$

$$2. (A')' = A \quad (2.1.2.2)$$

$$3. \lambda(A') = (\lambda A)', \lambda \text{ adalah skalar sebarang} \quad (2.1.2.3)$$

$$4. (AB)' = B'A' \quad (2.1.2.4)$$

2.1.3 Kedefinitipan dan semidefinit

Misalkan A matrik simetris berukuran $(n \times n)$ dan x adalah matrik berukuran $(n \times p)$. Matrik A dikatakan definit positif jika $x'Ax > 0$ untuk semua $x \neq 0$. Sedangkan matrik A dikatakan semi definit positif jika $x'Ax \geq 0$ untuk semua $x \neq 0$.

2.1.4 Matrik Singular dan Non Singular

Suatu matrik bujur sangkar A disebut singular apabila $\det(A) = 0$. Kalau $\det(A) \neq 0$ maka disebut matrik non singular. Matrik yang non singular mempunyai invers, sedangkan matrik singular tidak mempunyai invers.

Sifat-sifat determinan dari suatu matrik A berukuran $(n \times n)$ adalah :

1. Untuk matrik definit positif A

$$|A| > 0 \quad (2.1.4.1)$$

2. Untuk matrik bujur sangkar A dan B berukuran $(n \times n)$

$$|AB| = |A| |B| \quad (2.1.4.2)$$

3. Untuk matrik non singular

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad (2.1.4.3)$$

4. Untuk c skalar sebarang

$$|cA| = c |A| \quad (2.1.4.4)$$

2.1.5 Invers Matrik

Sebuah matrik bujur sangkar A berukuran $(n \times n)$ disebut mempunyai invers bila ada suatu matrik B , sehingga $AB = BA = I_n$.

Matrik B disebut invers matrik A , ditulis A^{-1} , merupakan matrik bujur sangkar berukuran $(n \times n)$. Syarat matrik A mempunyai invers jika matrik tersebut adalah matrik bujur sangkar dengan $\det(A) \neq 0$.

Invers matrik A ditulis $A^{-1} = B$, dapat dilakukan dengan cara partisi sebagai berikut :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} (A_{11})_{p \times p} & (A_{12})_{p \times q} \\ \hline (A_{21})_{q \times p} & (A_{22})_{q \times q} \end{array} \right] \quad B = \left[\begin{array}{c|c} (B_{11})_{p \times p} & (B_{12})_{p \times q} \\ \hline (B_{21})_{q \times p} & (B_{22})_{q \times q} \end{array} \right]$$

dimana $p + q = n$

Karena $AB = BA = I_n$ maka diperoleh :

$$(i) \quad A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_p$$

$$(ii) \quad A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0$$

$$(iii) \quad B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0$$

$$(iv) \quad B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I_q$$

Misalkan $B_{22} = L^{-1}$, dari (ii) $B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})L^{-1}$

$$\text{dari (iii) } B_{21} = -L^{-1}(A_{21}A_{11})^{-1}$$

$$\text{dari (i) } B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21}$$

$$= A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})L^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})$$

dan bila disubsitusikan ke(iv) :

$$\begin{aligned} -L^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})A_{12} + L^{-1}A_{22} &= I_q \rightarrow L = A_{22} - (A_{21}A_{11}^{-1})A_{12} \\ &= A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}) \end{aligned}$$

dari pembahasan diatas, maka $A^{-1} = B$, adalah

$$B = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})L^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) & -(A_{11}^{-1}A_{12})L^{-1} \\ -L^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) & L^{-1} \end{bmatrix}$$

2.1.6 Rank Matrik

Rank dari matrik **A** adalah banyaknya baris atau kolom yang bebas linier (banyaknya jumlah maksimum baris atau kolom yang semua elemennya tidak nol).

Sifat-sifat rank :

1. Rank baris = rank kolom = rank .
2. Dicari dengan operasi baris atau kolom.
3. Bila terdapat kesamaan baris atau kolom setelah dilakukan operasi baris atau kolom, maka salah satu baris/kolom harus dioperasikan kembali sampai semua elemen dalam baris/kolom tersebut adalah nol.
4. Apabila baris /kolom merupakan kelipatan antara satu dengan yang lain setelah operasi tadi, maka salah satu harus dinolkan.
5. Dalam sistem persamaan linier jika $r(A) < n$, maka sistem persamaan tersebut akan mempunyai banyak penyelesaian (tidak tunggal).
6. Dan jika dalam sistem persamaan linier tersebut $r(A) = n$, maka akan mempunyai penyelesaian tunggal.

2.2 Regresi Linier Berganda

Pendugaan parameter untuk model regresi berganda pada hakekatnya hanyalah perluasan konsep regresi sederhana. Prosedur regresi linier berganda digunakan untuk menguji hubungan antara variabel dependen (respon) dengan satu atau lebih variabel independen (variabel bebas). Jika variabel dependen dihubungkan dengan sebuah variabel independen saja, maka persamaan regresi yang dihasilkan adalah regresi linier sederhana, dan jika variabel independennya lebih dari satu maka yang dihasilkan adalah persamaan regresi linier berganda.

Pada umumnya regresi linier berganda, variabel tak bebas atau respon Y dapat dihubungkan dengan $(p-1)$ variabel bebas, yaitu X_1, X_2, \dots, X_{p-1} , sehingga diperoleh model sebagai berikut :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \dots + \beta_{p-1} X_{p-1} + \varepsilon \quad (2.2.1)$$

Dimana X_j : variabel bebas, $j = 1, 2, \dots, p-1$.

β_j : koefisien regresi, $j = 0, 1, 2, \dots, p-1$.

ε : suku error.

Y : variabel tak bebas.

Persamaan (2.2.1) dapat ditulis dalam bentuk matrik

$$Y = \beta X + \varepsilon$$

dimana

X = matrik yang berukuran $n \times p$

$$\begin{aligned}
 Y &= \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} & \beta &= \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{p-1} \end{bmatrix} & \varepsilon &= \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \\
 X &= \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1p-1} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2p-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{np-1} \end{bmatrix} \\
 & & & & & (n \times p)
 \end{aligned}$$

Y merupakan vektor $n \times 1$, β merupakan vektor $p \times 1$, ε merupakan vektor $n \times 1$ dan X merupakan matrik $n \times p$.

Untuk mendapatkan kesimpulan yang valid dari data sampel, yaitu model data sampel dapat dianggap mewakili populasi maka ada beberapa asumsi yang harus dipenuhi oleh data sampel tersebut, yaitu :

2.2.1 Asumsi bahwa ε dalam model regresi linier berganda berdistribusi normal yang bebas dengan rata-rata 0 dan varian σ^2 ($\varepsilon_i \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$).

2.2.2 *Uji Asumsi Multikolinearitas.*

Menguji apakah pada model regresi ditemukan adanya korelasi antar variabel independent. Jika terjadi korelasi maka dinamakan terjadi problem Multikolinearitas (sering disebut Multiko saja). Model regresi yang baik seharusnya tidak terjadi korelasi di antara variabel independent.

➤ Deteksi Adanya Multikolinearitas :

- Besaran VIF (Variance Inflation Factor) dan Tolerance

Pedoman suatu model regresi yang bebas multiko adalah :

- ❖ Mempunyai nilai VIF di sekitar 1.
- ❖ Mempunyai angka TOLERANCE mendekati 1.
- ❖ Catatan : Tolerance = $1/\text{VIF}$ atau

$$\text{VIF} = 1/\text{Tolerance.}$$

- Besaran Korelasi antar Variabel independent.

Pedoman suatu model regresi yang bebas multiko adalah :

- ❖ Koefisien korelasi antar variabel independent harus lemah (antara $-0,5$ dan $0,5$). Jika korelasi kuat maka terjadi problem multiko.

2.2.3 Uji Asumsi Heteroskedastisitas.

Menguji apakah dalam sebuah model regresi terjadi ketidaksamaan varians di antara residual-residualnya dari satu pengamatan yang lain. Jika variansnya tetap disebut Homoskedastisitas dan jika varian berbeda disebut Heteroskedastisitas. Model regresi yang baik adalah yang tidak terjadi heteroskedastisitas.

➤ Deteksi Adanya Heteroskedastisitas.

Pendeteksian dilakukan dengan melihat ada tidaknya pola tertentu pada plot (grafik), dimana sumbu Y adalah Y yang telah diprediksi dan sumbu X adalah Residual Studentized.

Catatan : Residual = Y prediksi – Y sesungguhnya.

- Pengambilan Keputusan :
 - Jika ada pola tertentu, seperti titik-titik (point-point) yang ada membentuk suatu pola tertentu yang teratur (bergelombang, melebar kemudian menyempit) maka telah terjadi Heteroskedastisitas.
 - Jika tidak ada pola yang jelas, serta titik-titik menyebar di atas dan di bawah angka 0 pada sumbu Y maka tidak terjadi Heteroskedastisitas.

2.2.4 Uji Asumsi Normalitas.

Menguji apakah dalam suatu model regresi, variabel dependent, variabel independent atau keduanya mempunyai distribusi normal ataukah tidak. Model regresi yang baik adalah distribusi data normal atau paling tidak mendekati normal.

- Deteksi Normalitas
 - Deteksi Normal Probability Plot dengan melihat penyebaran data (titik) pada sumbu diagonal dari grafik.

Dasar pengambilan keputusan :

- ❖ Jika data menyebar di sekitar garis normal dan mengikuti arah garis diagonal maka model regresi memenuhi asumsi Normalitas.
- ❖ Jika data menyebar jauh dari garis diagonal dan / tidak mengikuti arah garis diagonal maka model regresi tidak memenuhi asumsi Normalitas.

- Deteksi Histogram Plot dengan membandingkan plot residual data dengan plot normal.
 - ❖ Jika plot residual sama atau mendekati sama dengan plot normal maka model regresi memenuhi asumsi Normal.
 - ❖ Jika plot residual tidak sama atau tidak mendekati sama dengan plot normal maka model regresi tidak memenuhi asumsi Normal. Jika terjadi demikian maka dapat dilakukan transformasi data (logaritmik, eksponensial dan sebagainya) untuk memenuhi asumsi Normalitas.

2.2.5 Koefisien Determinasi (R^2)

Untuk mengukur kecocokan sebuah model regresi berganda dapat digunakan Analisis pada Koefisien Determinasi Berganda .

Koefisien determinasi Berganda R^2 didefinisikan sebagai :

$$R^2 = \frac{JKR}{JKT} = \frac{JKT - JKS}{JKT} = 1 - \frac{JKS}{JKT}$$

R^2 adalah sebuah pengukuran sebuah reduksi dalam variabilitas Y yang diperoleh dengan menggunakan variabel bebas X_1, X_2, \dots, X_{p-1} .

Dalam analisis regresi dikenal suatu ukuran yang digunakan untuk mengetahui seberapa jauh ketepatan atau kecocokan garis regresi yang terbentuk, yaitu Koefisien Determinasi (R^2). Nilai Koefisien Determinasi merupakan suatu ukuran yang menunjukkan besar sumbangan dari peubah penjelas (X) terhadap peubah respon (Y). Semakin besar nilai R^2 (≈ 1), semakin baik garis regresi yang terbentuk.

2.3 Metode Kuadrat Terkecil

Metode kuadrat terkecil dapat digunakan untuk mengestimasi koefisien regresi pada persamaan (2.2.1). Jika rank $X'X = p$ maka koefisien regresi dapat dicari dengan menggunakan metode kuadrat terkecil. Misalkan banyaknya observasi n dan X_{ij} menyatakan observasi ke- i dari variabel bebas X_j , maka data untuk regresi linier berganda dapat disusun seperti pada tabel 2-3.

Tabel 2-3 . Data Untuk Regresi Linier Berganda

Pengamatan Y	Nilai Pengamatan			
	X_1	X_2	X_{p-1}
Y_1	X_{11}	X_{12}	X_{1p-1}
Y_2	X_{21}	X_{22}	X_{2p-1}
...
Y_n	X_{n1}	X_{n2}	X_{np-1}

Variabel respon Y diasumsikan berdistribusi normal yang saling bebas.

Dan asumsi bahwa ε dalam model regresi linier berganda berdistribusi normal yang bebas dengan rata-rata 0 dan varian σ^2 ($\varepsilon_i \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$).

Maka model pada persamaan (2.2.1) dapat ditulis menjadi :

$$Y = \beta X + \varepsilon \quad (2.2.2)$$

dengan

$$\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1})$$

kolom ke- j dari β yaitu β_j adalah vektor regresi pada variabel bebas ke- j ,

$j = 0, 1, 2, \dots, p-1$.

Untuk mendapatkan estimasi kuadrat terkecil $\hat{\beta}_j$ dapat dilakukan dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat galatnya yaitu :

$$L = SSE = \varepsilon' \varepsilon \\ = (Y - X\beta)' (Y - X\beta)$$

dengan metode kuadrat terkecil, yaitu dengan meminimalkan L diperoleh penaksir untuk $\hat{\beta}$ dalam persamaan.

$$X'X \hat{\beta} = X'Y \quad (2.2.3)$$

Dari persamaan (2.2.3), maka diperoleh

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y \quad (2.2.4)$$

dimana

$(X'X)$ adalah non singular

Sehingga estimasi model regresinya adalah :

$$\hat{Y} = X \hat{\beta}.$$

Dan jumlah kuadrat residual dan standart error adalah sebagai berikut :

$$JKR = \hat{\beta}'(X'Y) - n \bar{Y}^2; \quad JKS = (Y'Y) - \hat{\beta}'(X'Y); \quad JKT = (Y'Y) - n \bar{Y}^2$$

dimana : JKR = Jumlah Kuadrat Regresi

JKS = Jumlah Kuadrat Sisaan

JKT = Jumlah Kuadrat Total

Dari Jumlah Kuadrat di atas dapat disusun dalam tabel anava :

Sumber	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Rata-Rata Jumlah Kuadrat
Regresi	1	JKR	JKR
Sisaan	n-2	JKS	JKS/(n-2)
Total	n-1	JKT	

2.4 Metode Simplek.

Untuk suatu matrik X , dengan rank $X'X = p$ maka menghasilkan $\det(X'X) \neq 0$. Selanjutnya akan dibahas untuk matrik X , dengan rank $X'X < p$, yang menghasilkan $\det(X'X) = 0$. Sehingga untuk menyelesaikan kasus tersebut dapat digunakan metode simplek.

2.4.1 Beberapa Pengertian.

Ada beberapa pengertian yang perlu diperhatikan dalam pemecahan problem metode linier dengan metode simplek, yaitu :

a. Penetapan atau penyusunan tabel dasar (basic table);

yaitu tabel awal yang berisikan informasi tentang besaran parameter dalam metode linier; misalnya besaran koefisien fungsi tujuan (cost-coefficients, C_{ij}); besaran koefisien input-output (a_{ij}) pada faktor pembatas dan besaran sumber daya yang tersedia (b_{ij}).

b. Penetapan problem metode linier yang maksimum atau minimum.

Bila salah satu problem ini telah ditetapkan, maka konsekwensinya adalah terhadap tanda \leq atau \geq . Seperti dijelaskan sebelumnya tanda \leq

mengisyaratkan problem maksimasi dan sebaliknya \geq mengisyaratkan problem minimasi.

c. Penetapan equality.

artinya semua tanda \leq atau \geq diganti dengan tanda sama dengan ($=$).

d. Penetapan elemen pivot;

artinya bilangan yang dipakai sebagai dasar melakukan iterasi.

e. Perhitungan iterasi yaitu mengubah nilai atau bilangan disesuaikan dengan maksud analisis.

f. Penetapan penyelesaian solusi fisibel;

artinya hasil akhir penyelesaian problem metode linier yang memungkinkan (feasible) untuk ditarik suatu kesimpulan.

g. Penetapan hal-hal yang dikategorikan sebagai nonfeasible-solution yaitu hasil akhir penyelesaian metode linier yang tidak fisibel.

h. Variabel Slack dan Variabel Surplus

Perubahan tanda \leq atau \geq ini dilakukan dengan menambahkan variabel slack pada model linier “ memaksimumkan ” dan menambahkan variabel surplus pada model linier “ meminimumkan “.

2.4.2 Cara Operasional

Metode Simplek adalah suatu metode yang memerlukan perhitungan yang berulang-ulang sehingga disebut prosedur iteratif. Langkah-langkah yang diperlukan untuk melakukan perhitungan dengan metode simplek sebagai berikut :

2.4.3 Cara menggunakan tabel untuk perhitungan simplek

			C_1	C_2	..	C_j	..	C_n
C_B	VEKTOR BASIS	X_B	A_1	A_2	..	A_j	..	A_n
C_{B1}	B_1	$X_{B1}=Y_{10}$	Y_{11}	Y_{12}	..	Y_{1j}	..	Y_{1n}
C_{B2}	B_2	$X_{B2}=Y_{20}$	Y_{21}	Y_{22}	..	Y_{2j}	..	Y_{2n}
...
C_{Bi}	B_i	$X_{Bi}=Y_{i0}$	Y_{i1}	Y_{i2}	..	Y_{ij}	..	Y_{in}
...
C_{Bm}	B_m	$X_{Bm}=Y_{m0}$	Y_{m1}	Y_{m2}	..	Y_{mj}	..	Y_{mn}
		Z	$Z_1 - C_1$	$Z_2 - C_2$..	$Z_j - C_j$..	$Z_n - C_n$

1. Kolom pertama dari tabel memberikan C_B yaitu harga dari vektor-vektor dalam basis.
2. Kolom kedua memberikan vektor-vektor yang ada dalam basis (sebanyak m).
3. Kolom ketiga dari tabel dengan huruf X_B , memberikan harga adalah harga dari X_B .
4. Kolom-kolom yang lainnya yaitu merupakan nilai dari Y_j untuk semua vektor A

Misalnya dari suatu pemecahan dasar fisibel, dibuatkan tabel yang bentuknya serupa dengan tabel di atas, maka perhatikan hal-hal berikut :

1. Lihat baris yang terakhir, kalau $Z_j - C_j \geq 0$, pemecahan dasar adalah optimal (tak ada yang negatif lagi).
2. Apabila ada yang negatif, pilih kolom yang mempunyai nilai $(Z_j - C_j)$ terkecil. Katakan kolom ini k jadi A_k dimasukan ke dalam basis. Vektor yang akan dikeluarkan dari matrik basis dipilih berdasarkan :

$$\frac{X_{Br}}{Y_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{X_{Bi}}{Y_{ik}}, Y_{ik} > 0 \right\} \quad (2.3.4.1)$$

kolom ke-r dari basis kemudian diganti A_k dengan perkataan lain vektor pada baris ke-r dari kolom “vektor dalam basis” diganti dengan A_k

3. Selanjutnya dibuat tabel baru untuk setiap pemecahan. Isi dari tabel dengan sendirinya berbeda satu sama lain

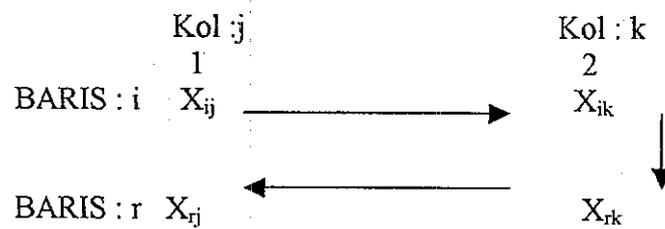
Untuk setiap penghitungan buat pengisian tabel, sebaiknya hitung baris ke-r dahulu. Ingat, bahwa untuk menghitung baris ke-r yang baru hanya memerlukan elemen-elemen dari baris ke-r yang lama.

Caranya ialah, bahwa setiap elemen dari baris ke- r untuk $i = r$ yang baru diperoleh dengan jalan membagi elemen yang bersangkutan dari baris ke-r yang lama dengan X_{rk} yaitu $X'_{ij} = X_{ij} / X_{rk}$ dimana X_{rk} merupakan elemen dari baris ke-r (baris yang akan diganti) dan kolom ke-k (kolom dari vektor X_k yang akan dimasukkan dalam basis). Perhatikan tanda anak panah, dari setiap tabel, yaitu kolom k (vektor yang akan masuk ke basis) dan baris ke-r (vektor yang akan meninggalkan basis). Elemen X_{rk} disebut “elemen pivot”, terletak pada perpotongan antara baris r dan kolom k. Diberi tanda (), pada setiap tabel. Untuk baris-baris yang lainnya dipergunakan rumus :

$$X'_{ij} = X_{ij} - X_{rj} \frac{X_{ik}}{X_{rk}} \quad (2.4.8)$$

Dengan $j = 0, \dots, n$ dan $i = 1, \dots, m = 1$; $i \neq r$, untuk $j = 0$ adalah untuk kolom X_B . Jika sudah tidak ada lagi variabel buatan yang dapat pindahkan lagi, perhitungan dihentikan dan didapatkan G-Invers .

Untuk lebih jelasnya ditunjukkan dalam diagram berikut ini :



1. Untuk menghitung X_{ij} yang baru (X'_{ij}) dari suatu tabel, mulai dari baris ke-i dan kolom ke-j yaitu dimulai dari elemen X
2. Kemudian bergerak ke kolom k masih dalam baris i, diperoleh elemen X_{ik}
3. Di dalam k , bergerak ke baris r hitung $\frac{X_{ik}}{X_{rk}}$ dan kemudian

$$X_{ij} - \frac{X_{ik}}{X_{rk}}$$

4. Akhirnya dari kolom k baris ke-r bergerak ke kolom j dan hitung

$$X'_{ij} = X_{ij} - X_{ij} \frac{X_{ik}}{X_{rk}}$$

Untuk lebih jelasnya lihat alur simplek dibawah ini :

