BAB III

DISTRIBUSI PROBABILITAS GELOMBANG LAUT

Pada bab ini akan dibahas mengenai beberapa jenis distribusi probabilitas gelombang laut yaitu distribusi Weibull 3, Weibull 2, Fisher 1 dan Fisher 3. Penentuan estimasi parameter dilakukan dengan 2 cara, yaitu menggunakan metode teoritik dengan metode estimasi maksimum likelihood pada distribusi Weibull 3, Weibull 2, Fisher 1 dan Fisher 3. Kemudian metode empiris dengan menggunakan pendekatan model regresi linier dengan metode kuadrat terkecil pada distribusi Weibull 3 dan Fisher 1.

3.1. Beberapa Jenis Distribusi Probabilitas Gelombang Laut

3.1.1. Distribusi Weibull 3

Distribusi ini diperkenalkan oleh Waloddi Weibull, seorang Fisikawan Swedia, yang menggunakan pertama kali tahun 1939. Sesuai dengan namanya distribusi ini memiliki 3 parameter, yaitu parameter A sebagai parameter skala, parameter B sebagai parameter lokasi dan parameter C sebagai parameter bentuk.

Fungsi densitas probabilitas variabel random X sebagai fungsi densitas Weibull 3 diberikan dalam bentuk :

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{A}\left(\dfrac{x-B}{A}\right)^{c-1} \exp\left[-\left(\dfrac{x-B}{A}\right)^{c}\right] & ; B < x < \infty \\ 0 & ; \text{lainnya} \end{cases} \qquad (1)$$

dengan : A disebut parameter skala dengan A > 0, B disebut parameter lokasi dengan $-\infty < B < \infty$ dan C disebut parameter bentuk dengan C > 0.

Berdasarkan fungsi densitas probabilitas (1) maka fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Weibull 3 dinyatakan dalam bentuk :

$$F_x(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\left(\dfrac{x-B}{A}\right)^c\right] & , A > 0\ ,\ x > B \text{ dan } C > 0 \\ 0 & , X < B \end{cases} \qquad (2)$$

(Tucker, 1991)

Fungsi pembangkit moment untuk variabel random kontinu X diperoleh dari $E(e^{tX})$ dan dinyatakan dengan $M_X(t)$, jadi:

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(x)\, dx \quad \text{, untuk X kontinu dengan fungsi densitas f(x)}$$

Prinsip fungsi pembangkit moment $M_X(t)$ adalah semua kejadian X dapat diperoleh dengan menurunkan $M_X(t)$ jika diambil t = 0. Jika ingin menentukan moment pertama, maka:

$$M^1(t) = \frac{d}{dt} E(e^{tX})$$

$$= E\left(\frac{d}{dt} e^{tX}\right) = E[X e^{tX}]$$

Jika diambil t = 0, maka $M^1(0) = E[X]$ (3)

Demikian pula untuk moment kedua, dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$M^2(t) = \frac{d}{dt} M^1(t)$$

$$= E\left[\frac{d}{dt}(X e^{tX})\right] = E[X^2 e^{tX}]$$

Jika diambil t = 0 maka $M^2(0) = E(X^2)$ (4)

Berdasarkan fungsi pembangkit moment ini, dapat ditentukan mean dan varian dari distribusi Weibull 3. Untuk mendapatkan mean dan varian ditentukan dahulu moment ke-n dengan substitusi $Z = \left(\frac{x - B}{A}\right)$, didapatkan moment ke-n dari variabel Z yang dinyatakan dalam bentuk :

$M^n(t) = E(Z^n e^{tZ})$, pada saat t = 0 maka :

$$M^n(0) = E(Z^n) \tag{5}$$

$$M^n(0) = \int_0^\infty Z^n f(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty Z^n \frac{C}{A} Z^{C-1} \exp(-Z^C)dx$$

$$= \int_0^\infty Z^n\, C\, Z^{C-1} \exp(-Z^C)dZ$$

Selanjutnya dengan mengambil $y = Z^C$ dan berdasarkan definisi fungsi Gamma, maka diperoleh :

$$M^n(0) = \int_0^\infty y^{n/C} \exp(-y)dy$$

$$= \Gamma\left(1 + \frac{n}{C}\right)$$

Berdasarkan moment tersebut, maka mean dan varian variabel X dengan distribusi Weibull 3 dapat ditentukan. Mean merupakan moment pertama dari persamaan (5) sehingga diperoleh :

$$M^1(0) = E(Z^1)$$

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{C}\right) = E\left(\frac{X - B}{A}\right)$$

$$A\Gamma\left(1+\frac{1}{C}\right)=E(X)-E(B)$$

$$E(X)=A\Gamma\left(1+\frac{1}{C}\right)+B$$

Jadi mean dari distribusi Weibull 3 dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$E(X)=A\Gamma\left(1+\frac{1}{C}\right)+B \qquad (6)$$

Sedangkan moment kedua berdasarkan persamaan (5) diperoleh :

$$M^2(0)=E(Z^2)$$

$$\Gamma\left(1+\frac{2}{C}\right)=E\left[\left(\frac{X-B}{A}\right)^2\right]$$

$$A^2\Gamma\left(1+\frac{2}{C}\right)=E[X^2\text{-}2XB+B^2]$$

$$A^2\Gamma\left(1+\frac{2}{C}\right)=E(X^2)-2B[A\Gamma\left(1+\frac{1}{C}\right)+B]+B^2$$

$$E(X^2)=A^2\Gamma\left(1+\frac{2}{C}\right)+2AB\Gamma\left(1+\frac{1}{C}\right)+B^2$$

Sehingga varian untuk distribusi Weibull 3 dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=A^2\Gamma\left(1+\frac{2}{C}\right)+2AB\Gamma\left(1+\frac{1}{C}\right)+B^2\text{-}\left[A^2\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{C}\right)\right)^2+B^2+2AB\Gamma\left(1+\left(\frac{1}{C}\right)\right)\right]$$

$$Var\ (X)=A^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{C}\right)-\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{C}\right)\right)^2\right] \qquad (7)$$

3.1.2. Distribusi Weibull 2

Distribusi Weibull 2 hampir sama dengan distribusi Webull 3, hanya saja pada distribusi Weibull 2 nilai B sebagai parameter lokasi sama dengan nol. Suatu random variabel X dikatakan mempunyai distribusi Weibull 2, jika terdapat suatu parameter C sebagai parameter bentuk dan A sebagai parameter skala.

Fungsi densitas probabilitas variabel X sebagai fungsi densitas Weibull 2 diberikan dalam bentuk :

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{C}{A}\left(\dfrac{x}{A}\right)^{C-1} \exp\left[-\left(\dfrac{x}{A}\right)^{C}\right] & ;\ -\infty < x < \infty \\ 0 & ;\ \text{lainnya} \end{cases} \qquad (8)$$

dengan : A disebut parameter skala dengan A > 0 dan C disebut parameter bentuk dengan C > 0.

Berdasarkan fungsi densitas probabilitas (8), maka fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Weibull 2 dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$F_x(x) = \begin{cases} 1-\exp\left[-\left(\dfrac{x}{A}\right)^{c}\right] & ,\ A > 0\ ,\ x > 0 \text{ dan } C > 0 \\ 0 & ,\ x < 0 \end{cases} \qquad (9)$$

(Tucker, 1991)

Mean dan varian dapat diketahui dengan menggunakan fungsi pembangkit moment, ditentukan dahulu untuk moment ke-n dengan substitusi $Z = \left(\dfrac{x}{A}\right)$, didapatkan moment ke-n dari variabel Z yang dinyatakan dalam bentuk :

$M^n(t) = E(Z^n e^{tZ})$, pada saat t = 0 maka :

$$M^n(0) = E(Z^n) \tag{10}$$

$$M^n(0) = \int_0^\infty Z^n f(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty Z^n \frac{C}{A} Z^{C-1} \exp(-Z^C)dx$$

$$= \int_0^\infty Z^n\, C\, Z^{C-1} \exp(-Z^C)dZ$$

Selanjutnya dengan mengambil $y = Z^C$ dan berdasarkan definisi fungsi Gamma, maka diperoleh :

$$M^n(0) = \int_0^\infty y^{n/C} \exp(-y)dy$$

$$= \Gamma\left(1 + \frac{n}{C}\right)$$

Berdasarkan moment tersebut, maka mean dan varian variabel X dengan distribusi Weibull 2 dapat ditentukan. Mean merupakan moment pertama dari persamaan (10), sehingga diperoleh :

$$M^1(0) = E(Z^1)$$

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{C}\right) = E\left(\frac{X}{A}\right)$$

$$E(X) = A\Gamma\left(1 + \frac{1}{C}\right)$$

Jadi mean dari distribusi Weibull 2 dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$E(X) = A\Gamma\left(1 + \frac{1}{C}\right) \tag{11}$$

Sedangkan moment kedua dari persamaan (10) diperoleh :

$$M^2(0) = E(Z^2)$$

$$\Gamma\left(1+\frac{2}{C}\right) = E\left[\left(\frac{X}{A}\right)^2\right]$$

$$E(X^2) = A^2\Gamma\left(1+\frac{2}{C}\right)$$

Sehingga varian untuk distribusi Weibull 2 dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= A^2\Gamma\left(1+\frac{2}{C}\right) - \left[A^2\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{C}\right)\right)^2\right]$$

$$\mathrm{Var}\,(X) = A^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{C}\right) - \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{C}\right)\right)^2\right] \qquad (12)$$

3.1.3. Distribusi Fisher 1

Fungsi densitas probabilitas variabel X sebagai fungsi densitas Fisher 1 diberikan dalam bentuk :

$$f_X(x) = \frac{1}{A}\exp\left[-\frac{(x-B)}{A} - \exp\left[-\frac{(x-B)}{A}\right]\right];\ -\infty < x < \infty \qquad (13)$$

dengan : A disebut parameter skala dengan $A > 0$ dan B disebut parameter lokasi dengan $-\infty < B < \infty$

Berdasarkan fungsi densitas (13) maka fungsi distribusi kumulatif dari variabel X dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$F_X(x) = \exp\left[-\exp-\left(\frac{x - B}{A}\right)\right] \qquad ; A > 0, -\infty < B < \infty \qquad (14)$$

Mean dan varian variabel X dengan distribusi Fisher 1, masing-masing dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$E(X) = B + \gamma A \qquad (15)$$

$$\mathrm{Var}(X) = A^2 \pi^2 / 6 \qquad (16)$$

dengan γ adalah konstanta Euler yaitu 0,5772

(Tucker 1991).

3.1.4. Distribusi Fisher 3

Fungsi densitas probabilitas variabel random X sebagai fungsi densitas Fisher 3 diberikan dalam bentuk :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{A}\left(\frac{B - x}{A}\right)^{c-1} \exp\left[-\left(\frac{B - x}{A}\right)^{c}\right] & ; x < B \\ 0 & ; \text{lainnya} \end{cases} \qquad (17)$$

dengan : A disebut parameter skala dengan A > 0, B disebut parameter lokasi dengan $-\infty < B < \infty$ dan C disebut parameter bentuk dengan $C > 0$.

Berdasarkan fungsi densitas (17) maka fungsi distribusi kumulatif variabel X dari distribusi Fisher 3 dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$F_X(x) = \begin{cases} \exp\left[-\left(\frac{B - x}{A}\right)^{c}\right] & ; A > 0 \text{ dan } x < B \\ 1 & ; x > B \end{cases} \qquad (18)$$

(Tucker 1991).

Berdasarkan fungsi pembangkit moment, dapat ditentukan mean dan varian dari distribusi Fisher 3. Untuk mendapatkan mean dan varian ditentukan dahulu moment ke-n dengan substitusi $Z = \left(\frac{B - x}{A}\right)$, didapatkan moment ke-n dari variabel Z yang dinyatakan dalam bentuk :

$M^n(t) = E(Z^n e^{tZ})$, pada saat t = 0 maka :

$$M^n(0) = E(Z^n) \tag{19}$$

$$M^n(0) = \int_0^\infty Z^n f(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty Z^n \frac{C}{A} Z^{C-1} \exp(-Z^C)\,dx$$

$$= \int_0^\infty Z^n\, C\, Z^{C-1} \exp(-Z^C)\,dZ$$

Selanjutnya dengan mengambil $y = Z^C$ dan berdasarkan definisi fungsi Gamma, maka diperoleh :

$$M^n(0) = \int_0^\infty y^{n/C} \exp(-y)\,dy$$

$$= \Gamma\left(1 + \frac{n}{C}\right)$$

Berdasarkan moment tersebut, maka mean dan varian variabel X dengan distribusi Fisher 3 dapat ditentukan. Mean merupakan moment pertama berdasarkan persamaan (19), sehingga diperoleh:

$$M^1(0) = E(Z^1)$$

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{C}\right) = E\left(\frac{B - X}{A}\right)$$

$$A\Gamma\left(1+\frac{1}{C}\right)=E(B)-E(X)$$

$$E(X)=B-A\Gamma\left(1+\frac{1}{C}\right)$$

Jadi mean dari distribusi Fisher 3 dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$E(X)=B-A\Gamma\left(1+\frac{1}{C}\right) \tag{20}$$

Sedangkan moment kedua berdasarkan persamaan (19), diperoleh:

$$M^2(0)=E(Z^2)$$

$$\Gamma\left(1+\frac{2}{C}\right)=E\left[\left(\frac{B-x}{A}\right)^2\right]$$

$$A^2\Gamma\left(1+\frac{2}{C}\right)=E[X^2]-2BE(X)+B^2$$

$$A^2\Gamma\left(1+\frac{2}{C}\right)=E(X^2)-2B[B-A\Gamma\left(1+\frac{1}{C}\right)]+B^2$$

$$E(X^2)=A^2\Gamma\left(1+\frac{2}{C}\right)+2AB\Gamma\left(1+\frac{1}{C}\right)+B^2$$

Sehingga varian untuk distribusi Fisher 3 dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=A^2\Gamma\left(1+\frac{2}{C}\right)+2AB\Gamma\left(1+\frac{1}{C}\right)+B^2-\left[A^2\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{C}\right)\right)^2+B^2+2AB\Gamma\left(1+\left(\frac{1}{C}\right)\right)\right]$$

$$Var(X)=A^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{C}\right)-\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{C}\right)\right)^2\right] \tag{21}$$

3.2. Estimasi Parameter Distribusi Probabilitas Dengan Metode Teoritik

3.2.1. Distribusi Weibull 3

Metode teoritik yang dipakai untuk mengestimasi parameter A, B dan C adalah metode estimasi maksimum likelihood. Estimasi maksimum likelihood dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan turunan pertama fungsi likelihood terhadap A, B dan C untuk distribusi Weibull 3. Fungsi likelihood dari fungsi densitas probabilitas Weibull 3 dinyatakan dalam bentuk:

$$L(A,B,C) = \prod_{i=1}^{N} \frac{C}{A}\left(\frac{X_i - B}{A}\right)^{C-1} \exp\left(-\left(\frac{X_i - B}{A}\right)^{C}\right) \qquad (22)$$

$$= \left(\frac{C}{A}\right)^{N}\left(\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{X_i - B}{A}\right)^{C-1}\right)\exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{X_i - B}{A}\right)^{C}\right)$$

$$= C^N A^{-N} \left(\prod_{i=1}^{N} (X_i-B)\right)^C A^{-NC} \left(\prod_{i=1}^{N}(X_i-B)\right)^{-1} A^N \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{X_i - B}{A}\right)^{C}\right)$$

Dengan menggunakan logaritma natural maka fungsi likelihood dari persamaan (22) adalah :

$$K = \ln L(A,B,C)$$

$$= \ln \left(C^N A^{-N} \left(\prod_{i=1}^{N}(X_i-B)\right)^C A^{-NC}\left(\prod_{i=1}^{N}(X_i-B)\right)^{-1} A^N \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{X_i - B}{A}\right)^{C}\right)\right)$$

$$= \ln C^N + \ln A^{-N} + \ln \left(\prod_{i=1}^{N}(X_i-B)\right)^C + \ln A^{-NC} + \ln \left(\prod_{i=1}^{N}(X_i-B)\right)^{-1} +$$

$$\ln A^N + \left(-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{X_i - B}{A}\right)^{C}\right) \qquad (23)$$

Selanjutnya dibentuk persamaan likelihood dengan menyelesaikan $\frac{\partial K}{\partial A}=0$, $\frac{\partial K}{\partial B}=0$ dan $\frac{\partial K}{\partial C}=0$.

$$\frac{\partial K}{\partial A}=\frac{-N}{A}+\frac{-NC}{A}+\frac{N}{A}-(\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C(-C)(A)^{-C-1})=0$$

$$\frac{-NC}{A}(1-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C\frac{1}{A^C})=0$$

$$NA^C=\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C$$

Jadi, $\hat{A}=(1/N\sum_{i=1}^{N}(X_i-\hat{B})^{\hat{C}})^{1/\hat{C}}$ (24)

$$\frac{\partial K}{\partial B}=C\sum_{i=1}^{N}(X_i\text{-}B)^{-1}(-1)-\sum_{i=1}^{N}(X_i\text{-}B)^{-1}(-1)+CA^{-C}\sum_{i=1}^{N}(X_i\text{-}B)^{C-1}=0$$

$$-C\sum_{i=1}^{N}(X_i\text{-}B)^{-1}+\sum_{i=1}^{N}(X_i\text{-}B)^{-1}+C\,A^{-C}\sum_{i=1}^{N}(X_i\text{-}B)^{C-1}=0$$

$$C\sum_{i=1}^{N}(X_i\text{-}B)^{-1}-\sum_{i=1}^{N}(X_i\text{-}B)^{-1}=C\,A^{-C}\sum_{i=1}^{N}(X_i\text{-}B)^{C-1}$$

Jadi, $(\hat{C}-1)\sum_{i=1}^{N}(X_i\text{-}\hat{B})^{-1}=\hat{C}\;\hat{A}^{-\hat{C}}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\hat{B})^{\hat{C}-1}$ (25)

$$\frac{\partial K}{\partial C}=\frac{N}{C}+\sum_{i=1}^{N}\ln(X_i-B)-N\ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C\right)^{1/C}$$

$$-(\ln A^{-1})(A^{-C})(\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C\ln(X_i-B))=0$$

$$\frac{N}{C}+\sum_{i=1}^{N}\ln(X_i-B)-\frac{N}{C}\ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C\right)$$

$$-\left(\ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C\right)^{-1/C}\right)\left(\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C\right)\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C\ln(X_i-B)\right)=0$$

$$\frac{1}{C}+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln(X_i-B)-\frac{1}{C}\ln\left(\frac{1}{N}\sum(X_i-B)^C\right)$$

$$-\left(\ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C\right)^{-1/C}\right)\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C\ln(X_i-B)\right)=0$$

$$\frac{1}{C}+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln(X_i-B)-\frac{1}{C}\ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C\right)+\frac{1}{C}\left(\ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C\right)\right)$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C\ln(X_i-B)\right)=0$$

$$\frac{1}{C}+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln(X_i-B)-\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C\ln(X_i-B)\right)=0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i-B)^C\ln(X_i-B)\right)-\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln(X_i-B)\right)=\frac{1}{C}$$

Jadi, $$\hat{C}=\left(\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i-\hat{B})^{\hat{C}}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i-\hat{B})^{\hat{C}}\ln(X_i-\hat{B})\right)-\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln(X_i-\hat{B})\right)\right)^{-1} \quad (26)$$

3.2.2. Distribusi Weibull 2

Metode teoritik yang dipakai untuk mengestimasi parameter A dan C adalah metode estimasi maksimum likelihood. Estimasi maksimum likelihood dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan turunan pertama fungsi likelihood terhadap A dan C untuk distribusi Weibull 2. Fungsi likelihood dari fungsi densitas probabilitas Weibull 2 diperoleh :

$$L(A,C) = \prod_{i=1}^{N} \frac{C}{A}\left(\frac{X_i}{A}\right)^{C-1} \exp\left(-\left(\frac{X_i}{A}\right)^{C}\right)$$

$$= C^N A^{-N} (\prod_{i=1}^{N}(X_i))^C A^{-NC} (\prod_{i=1}^{N}(X_i))^{-1} A^N \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{X_i}{A}\right)^{C}\right) \qquad (27)$$

dengan menggunakan logaritma natural maka fungsi likelihood persamaan (27) dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$K = \ln L(A,C)$$

$$= \ln (C^N A^{-N} (\prod_{i=1}^{N}(X_i))^C A^{-NC} (\prod_{i=1}^{N}(X_i))^{-1} A^N \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{X_i}{A}\right)^{C}\right))$$

$$= \ln C^N + \ln A^{-N} + \ln (\prod_{i=1}^{N}(X_i))^C + \ln A^{-NC} + \ln (\prod_{i=1}^{N}(X_i))^{-1} + \ln A^N + \left(-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{X_i}{A}\right)^{C}\right) \qquad (28)$$

Selanjutnya dibentuk persamaan likelihood dengan menyelesaikan $\frac{\partial K}{\partial A} = 0$ dan $\frac{\partial K}{\partial C} = 0$.

$$\frac{\partial K}{\partial A} = \frac{-N}{A} + \frac{-NC}{A} + \frac{N}{A} - (\sum_{i=1}^{N}(X_i)^C(-C)(A)^{-C-1}) = 0$$

$$\frac{-NC}{A}(1 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i)^C \frac{1}{A^C}) = 0$$

$$NA^C = \sum_{i=1}^{N}(X_i)^C$$

$$\hat{A} = (1/N \sum_{i=1}^{N}(X_i)^{\hat{c}})^{1/\hat{C}} \qquad (29)$$

Sedangkan estimasi parameter C didapat dalam persamaan :

$$\frac{\partial K}{\partial C} = \frac{N}{C} + \sum_{i=1}^{N} \ln X_i - N \ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^C\right)^{1/C} - (\ln A^{-1})(A^{-C})(\sum_{i=1}^{N} X_i^C \ln X_i) = 0$$

$$\frac{N}{C} + \sum_{i=1}^{N} \ln X_i - \frac{N}{C} \ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^C\right) - \left(\ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^C\right)^{-1/C}\right)\left(\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^C\right)\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^C \ln X_i\right) = 0$$

$$\frac{1}{C} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ln X_i - \frac{1}{C} \ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^C\right) - \left(\ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^C\right)^{-1/C}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^C\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^C \ln X_i\right) = 0$$

$$\frac{1}{C} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ln X_i - \frac{1}{C} \ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^C\right) + \frac{1}{C}\left(\ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^C\right)\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i^C\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^C \ln X_i\right) = 0$$

$$\frac{1}{C} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ln X_i - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i^C\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^C \ln X_i\right) = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^C\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^C \ln X_i\right) - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ln X_i\right) = \frac{1}{C}$$

Jadi, $$\hat{C} = \left(\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^{\hat{c}}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^{\hat{c}} \ln X_i\right) - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ln X_i\right)\right)^{-1} \tag{30}$$

3.2.3. Distribusi Fisher 1

Metode teoritik yang dipakai untuk mengestimasi parameter A dan B adalah metode estimasi maksimum likelihood. Estimasi maksimum likelihood dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan turunan pertama fungsi likelihood terhadap A dan B untuk distribusi Fisher 1. Fungsi likelihood dari fungsi densitas probabilitas Fisher 1 diperoleh :

$$L(A,B) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{A} \exp\left(-\frac{(X_i - B)}{A} - \exp\left(-\frac{(X_i - B)}{A}\right)\right)$$

$$= A^{-N} \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{(X_i - B)}{A}\right) - \sum_{i=1}^{N}\exp\left(-\frac{(X_i - B)}{A}\right)\right) \qquad (31)$$

dengan menggunakan logaritma natural maka fungsi likelihood persamaan (31) dapat diperoleh dalam bentuk :

$$K = \ln L(A,B)$$

$$= -N \ln A - \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{(X_i - B)}{A}\right) - \sum_{i=1}^{N}\exp\left(\frac{-(X_i - B)}{A}\right) \qquad (32)$$

Selanjutnya dibentuk persamaan likelihood dengan menyelesaikan $\frac{\partial K}{\partial A} = 0$ dan $\frac{\partial K}{\partial B} = 0$.

$$\frac{\partial K}{\partial B} = \frac{N}{A} - \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{A}\exp\left(\frac{-(X_i - B)}{A}\right)\right) = 0$$

$$\left(N - \sum_{i=1}^{N}\left(\exp\left(\frac{-(X_i - B)}{A}\right)\right)\right) = 0$$

$$\ln\sum_{i=1}^{N}\left(\exp\frac{(-X_i)}{A}\right) + \ln\exp\frac{B}{A} = \ln N$$

$$\ln\sum_{i=1}^{N}\left(\exp\frac{(-X_i)}{A}\right) - \ln N = -\frac{B}{A}$$

Jadi, $\hat{B} = -\hat{A}\ \ln\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\exp\frac{(-X_i)}{\hat{A}}\right)\right)$ (33)

Sedangkan parameter A diperoleh dari persamaan :

$$\frac{\partial K}{\partial A} = \frac{-N}{A} + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{(X_i - B)}{A^2}\right) - \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{(X_i - B)}{A^2}\right)\exp\left(\frac{-(X_i - B)}{A}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{(X_i - B)}{A}\right) - \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{(X_i - B)}{A}\right)\exp\left(\frac{-(X_i - B)}{A}\right) = N$$

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i - B)\left(1-\exp\left(\frac{-(X_i - B)}{A}\right)\right) = NA$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i - \sum_{i=1}^{N} X_i \exp\left(\frac{-(X_i - B)}{A}\right) - NB + B\sum_{i=1}^{N}\exp\left(\frac{-(X_i - B)}{A}\right) = NA$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i - \exp\left(\frac{B}{A}\right)\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \exp\left(\frac{-(X_i)}{A}\right) - B\sum_{i=1}^{N}\exp\left(\frac{-(X_i)}{B}\right)\right] - NB = NA$$

substitusi: $\hat{B} = -\hat{A}\ \ln\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\exp\frac{(-X_i)}{\hat{A}}\right)\right)$

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N} X_i - N^{-1}\exp\left(\ln\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\exp\frac{(-X_i)}{A}\right)^{-1}\right)\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \exp\left(\frac{-(X_i)}{A}\right) - B\sum\exp\left(\frac{-(X_i)}{A}\right)\right]$$
$$-B = A$$

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N} X_i - \left(\sum_{i=1}^{N}\exp\frac{(-X_i)}{A}\right)^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \exp\left(\frac{-(X_i)}{A}\right) - B\sum_{i=1}^{N}\exp\left(\frac{-(X_i)}{A}\right)\right] - B = A$$

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N} X_i - \left(\sum_{i1}^{N}\exp\frac{(-X_i)}{A}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \exp\left(\frac{-(X_i)}{A}\right)\right) = A$$

Jadi, $$\hat{A} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N} X_i - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i \exp\left(\frac{-(X_i)}{\hat{A}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\exp\frac{(-X_i)}{\hat{A}}\right)^{-1} \qquad (34)$$

3.2.4. Distribusi Fisher 3

Metode teoritik yang dipakai untuk mengestimasi parameter A, B dan C adalah metode estimasi maksimum likelihood. Estimasi maksimum likelihood dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan turunan pertama fungsi likelihood terhadap A, B dan C untuk distribusi Fisher 3. Fungsi likelihood dari fungsi densitas Fisher 3 diperoleh :

$$L(A,B,C) = \prod_{i=1}^{N} \frac{C}{A}\left(\frac{B - X_i}{A}\right)^{C-1} \exp\left(-\left(\frac{B - X_i}{A}\right)^{C}\right)$$

$$= C^N A^{-N} (\prod_{i=1}^{N} (B\text{-}X_i))^C A^{-NC} (\prod_{i=1}^{N} (B\text{-}X_i))^{-1} A^N \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{B - X_i}{A}\right)^{C}\right) \quad (35)$$

dengan menggunakan logaritma natural maka fungsi likelihood pada persamaan (35) dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$K = \ln L(A,B, C)$$

$$= \ln (C^N A^{-N} (\prod_{i=1}^{N} (B\text{-}X_i))^C A^{-NC} (\prod_{i=1}^{N} (B\text{-}X_i))^{-1} A^N \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{B - X_i}{A}\right)^{C}\right))$$

$$= \ln C^N + \ln A^{-N} + \ln (\prod_{i=1}^{N} (B\text{-}Xi))^C + \ln A^{-NC} + \ln (\prod_{i=1}^{N} (B\text{-}Xi))^{-1} + \ln A^N$$

$$+ \left(-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{B - X_i}{A}\right)^{C}\right) \quad (36)$$

Selanjutnya dibentuk persamaan likelihood dengan menyelesaikan $\frac{\partial K}{\partial A} = 0$, $\frac{\partial K}{\partial B} = 0$ dan $\frac{\partial K}{\partial C} = 0$

$$\frac{\partial K}{\partial A} = \frac{-N}{A} - \frac{-NC}{A} + \frac{N}{A} - (\sum_{i=1}^{N}(B - X_i)^C(-C)(A)^{-C-1}) = 0$$

$$\frac{-NC}{A}(1 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(B - X_i)^C \frac{1}{A^C}) = 0$$

$$NA^C = \sum_{i=1}^{N}(B - X_i)^C$$

Jadi , $\hat{A} = \left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(\hat{B} - X_i)^{\hat{c}}\right]^{1/\hat{c}}$ (37)

Estimasi parameter B didapat dari :

$$\frac{\partial K}{\partial B} = C \sum_{i=1}^{N} (B-X_i)^{-1} - \sum_{i=1}^{N} (B-X_i)^{-1} - CA^{-C} \sum_{i=1}^{N} (B-X_i)^{C-1} = 0$$

$$C \sum_{i=1}^{N} (B-X_i)^{-1} - \sum_{i=1}^{N} (B-X_i)^{-1} = C A^{-C} \sum_{i=1}^{N} (B-X_i)^{C-1}$$

$$(C-1)\sum_{i=1}^{N}(B-X_i)^{-1} = CA^{-C}\sum_{i=1}^{N}(B-X_i)^{C-1}$$

Jadi, $(\hat{C}-1)\sum_{i=1}^{N}(\hat{B}-X_i)^{-1} = \hat{C}\hat{A}^{-\hat{C}}\sum_{i=1}^{N}(\hat{B}-X_i)^{\hat{C}-1}$ (38)

Sedangkan estimasi parameter C diperoleh dari :

$$\frac{\partial K}{\partial C} = \frac{N}{C} + \sum_{i=1}^{N} \ln(B-X_i) - N \ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(B-X_i)^C\right)^{1/C}$$

$$-(\ln A^{-1})(A^{-C})\left(\sum_{i=1}^{N}(B-X_i)^C \ln(B-X_i)\right) = 0$$

$$\frac{N}{C} + \sum_{i=1}^{N} \ln(B-X_i) - \frac{N}{C}\ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(B-X_i)^C\right)$$

$$-\left(\ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(B-X_i)^C\right)^{-1/C}\right)\left(\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(B-X_i)^C\right)\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}(B-X_i)^C \ln(B-X_i)\right) = 0$$

$$\frac{1}{C} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ln(B-X_i) - \frac{1}{C}\ln\left(\frac{1}{N}\sum(B-X_i)^C\right)$$

$$-\left(\ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(B-X_i)^C\right)^{-1/C}\right)\left(\sum_{i=1}^{N}(B-X_i)^C\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}(B-X_i)^C \ln(B-X_i)\right) = 0$$

$$\frac{1}{C} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ln(B-X_i) - \frac{1}{C}\ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(B-X_i)^C\right) + \frac{1}{C}\left(\ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(B-X_i)^C\right)\right)$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{N}(B-X_i)^C\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}(B-X_i)^C \ln(B-X_i)\right) = 0$$

Jadi, $\hat{C} = \left(\left(\sum_{i=1}^{N}(\hat{B}-X_i)^{\hat{C}}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}(\hat{B}-X_i)^{\hat{C}} \ln(\hat{B}-X_i)\right) - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln(\hat{B}-X_i)\right)\right)^{-1}$ (39)

3.3. Estimasi Parameter Distribusi Probabilitas Dengan Metode Empiris

3.3.1. Distribusi Weibull 3

Metode empiris yang digunakan untuk menduga parameter A, B dan C berdasarkan data observasi dengan menggunakan metode kuadrat terkecil dalam model regresi linier :

$$X^{(m)} = \hat{A}Y^{(m)} + \hat{B} \tag{40}$$

dengan $X^{(m)}$ adalah data tinggi gelombang laut terurut dan variabel $Y^{(m)}$ dinyatakan dalam bentuk :

$$Y^{(m)} = \left[-\ln\left\{1 - P(x \le X^{(m)})\right\}\right]^{1/C} \tag{41}$$

Probabilitas P dalam persamaan (41) diberikan dalam bentuk :

$$P(x \le X^{(m)}) = 1 - \frac{m - 0{,}2 - \frac{0{,}27}{\sqrt{c}}}{N_T + 0{,}2 + \frac{0{,}23}{\sqrt{c}}} \tag{42}$$

dimana m adalah nomor urut nilai tinggi gelombang signifikan dan N_T adalah jumlah observasi tinggi gelombang signifikan (Triatmodjo,1999). Selanjutnya, dengan metode kuadrat terkecil, maka penduga parameter A dan B pada model regresi linier (40) dinyatakan dalam bentuk :

$$\hat{A} = \frac{N\sum_{i=1}^{N} X_i^{(m)} Y_i^{(m)} - \sum_{i=1}^{N} X_i^{(m)} \sum_{i=1}^{N} Y_i^{(m)}}{N\sum_{i=1}^{N} (Y_i^{(m)})^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} Y_i^{(m)}\right)^2} \tag{43}$$

$$\hat{B} = \overline{X}^{(m)} - \hat{A}\overline{Y}^{(m)} \tag{44}$$

Sedangkan estimasi parameter C dilakukan dengan memasukkan berbagai nilai C yang mungkin. Kemudian nilai C yang menghasilkan jumlah kuadrat residu terkecil diambil sebagai estimasi parameter C.

Jumlah kuadrat residu model regresi linier diberikan dalam bentuk :

$$JKR = \sum_{i=1}^{n}\left[X_i^{(m)} - (\hat{A}Y_i^{(m)} + \hat{B})\right]^2 \qquad (45)$$

yang berguna untuk memberikan tingkat kecocokan (a good fit) pada model regresi linier.

3.3.2. Fungsi Distribusi Fisher 1

Metode empiris yang digunakan untuk menduga parameter A dan B berdasarkan data observasi menggunakan metode kuadrat terkecil dalam bentuk model regresi linier :

$$X^{(m)} = \hat{A}Y^{(m)} + \hat{B} \qquad (46)$$

dimana $X^{(m)}$ adalah data terurut tinggi gelombang laut dan variabel $Y^{(m)}$ dinyatakan dalam bentuk :

$$Y^{(m)} = -\ln\left[-\ln P(x \leq X^{(m)})\right] \qquad (47)$$

Probabilitas P dalam persamaan (47) dinyatakan dalam bentuk :

$$P(x \leq X^{(m)}) = 1 - \frac{m - 0{,}44}{N_T + 0{,}12} \qquad (48)$$

dimana m adalah nomor urut nilai tinggi gelombang laut dan N_T adalah jumlah observasi tinggi gelombang laut (Triatmodjo ,1999). Selanjutnya, dengan metode kuadrat terkecil, maka penduga parameter A dan B pada model regresi linier (46) dinyatakan dalam bentuk :

$$\hat{A} = \frac{N\sum_{i=1}^{N} X_i^{(m)} Y_i^{(m)} - \sum_{i=1}^{N} X_i^{(m)} \sum_{i=1}^{N} Y_i^{(m)}}{N\sum_{i=1}^{N} (Y_i^{(m)})^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} Y_i^{(m)}\right)^2} \tag{49}$$

$$\hat{B} = \overline{X}^{(m)} - \hat{A}\,\overline{Y}^{(m)} \tag{50}$$

Jumlah kuadrat residu model regresi linier dinyatakan dalam bentuk :

$$JKR = \sum_{i=1}^{n} \left[X_i^{(m)} - (\hat{A}\,Y_i^{(m)} + \hat{B})\right]^2 \tag{51}$$

yang berguna untuk memberikan tingkat kecocokan (a good fit) pada model regresi linier.