BAB II

MATERI PENUNJANG

Pada Bab II penulisan tugas akhir ini akan dibahas secara singkat konsep dasar dari materi-materi yang dijadikan penunjang untuk pembahasan materi pada Bab III. Materi-materi penunjang pada Bab II adalah regresi linier berganda univariat, matrik, distribusi normal multivariat, serta distribusi wishart.

2.1 Regresi Linier Berganda Univariat

Pembahasan mengenai analisis regresi multivariat tidak terlepas dari konsep dasar dari analisis regresi linier berganda univariat, karena masing-masing variabel tak bebas y yang terdapat dalam model regresi multivariat mengikuti model regresi linier berganda univariat.

Model regresi berganda univariat atau seringnya hanya disebut dengan model regresi linier berganda pada dasarnya digunakan untuk mengetahui ada tidaknya hubungan linier antara satu variabel tak bebas y dengan beberapa variabel bebas x. Pada umumnya variabel tak bebas y yang dihubungkan dengan q variabel bebas x mempunyai model:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 \cdots\cdots\cdots + \beta_q x_q + \varepsilon \qquad (2.1.1)$$

Misalkan banyaknya pengamatan n, y_i menyatakan pengamatan ke –i dari variabel tak bebas y dan x_{ik} menyatakan pengamatan ke-i dari variabel bebas x_k

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

(k=1,2,......,q), maka data untuk regresi linier berganda dapat disusun seperti pada tabel 2.1.1.

Tabel 2.1.1 Data untuk Regresi Linier Berganda Univariat

y	x_1	x_2	...	x_q
y_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1q}
y_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2q}
...	...	...	...	...
y_n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nq}

Dari data tersebut dapat dibentuk model regresi linier berganda yaitu:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots\cdots + \beta_q x_{iq} + \varepsilon_i$$

$$= \beta_0 + \sum_{k=1}^{q} \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i \qquad (2.1.2)$$

Biasanya untuk memudahkan analisis, persamaan (2.1.2) disajikan dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2.1.3)$$

dimana

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1q} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nq} \end{bmatrix}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_q \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_q \end{bmatrix}$$

Pada persamaan (2.1.3) **y** adalah sebuah vektor pengamatan dari variabel tak bebas y berukuran (nx1) , **X** adalah sebuah matrik nx(q+1) dari variabel-variabel bebas x, β adalah sebuah vektor (q+1)x1 dari koefisien-koefisien regresi dan ε adalah sebuah vektor (nx1) dari error random.

Dengan metode kuadrat terkecil diperoleh estimator kuadrat terkecil untuk β yaitu:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}\mathbf{y} \qquad (2.1.4)$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ pada persamaan (2.1.4) merupakan estimator tak bias karena $E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$ dan mempunyai varian yang minimum yaitu:

$$Var(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \qquad (2.1.5)$$

Bahwa $Var(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ mempunyai varian terkecil dari semua estimator linier tak bias dijamin oleh Gauss-Markov.

Theorema 2.1.1 (Theorema Gauss-Markov)

Estimator kuadrat terkecil $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}\mathbf{y}$ mempunyai varian terkecil dalam himpunan semua estimator linier tak bias.

Bukti :

Untuk menunjukkan bahwa $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ memiliki varian yang terkecil adalah dengan membandingkan varian dari estimator linier tak bias yang lain.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Misalkan $\hat{\gamma}$ adalah suatu estimator linier lain yang tak bias untuk $\boldsymbol{\beta}$. Karena $\hat{\gamma}$ estimator linier , maka dapat dimisalkan bentuknya sebagai:

$$\hat{\gamma} = (\mathbf{U} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{y} \tag{2.1.6}$$

untuk suatu matrik **U** yang merupakan fungsi dari **X**.

Karena pada persamaan (2.1.3) $\mathrm{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$, maka (2.1.6) menjadi

$$\hat{\gamma} = (\mathbf{U} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon)$$

$$= (\mathbf{UX}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{U}\varepsilon + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\varepsilon)$$

$$= \mathbf{UX}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{U}\varepsilon + \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\varepsilon \tag{2.1.7}$$

$$E(\hat{\gamma}) = E(\mathbf{UX}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{U}\varepsilon + \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\varepsilon)$$

$$= \mathbf{UX}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}\text{, karena } E(\varepsilon) = \mathbf{0} \tag{2.1.8}$$

$$= (\mathbf{UX} + \mathbf{I})\,\boldsymbol{\beta}$$

$$= \boldsymbol{\beta}$$

Karena $\hat{\gamma}$ tak bias, maka $\mathbf{UX} = \mathbf{0}$ (2.1.9)

Jadi,

$$Var(\hat{\gamma}) = E(\hat{\gamma} - E(\hat{\gamma}))(\hat{\gamma} - E(\hat{\gamma}))'$$

sesuai persamaan (2.1.7) dan (2.1.8)

$$= E((\mathbf{UX}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{U}\varepsilon + \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\varepsilon) - (\mathbf{UX}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}))$$

$$((\mathbf{UX}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{U}\varepsilon + \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\varepsilon) - (\mathbf{UX}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}))'$$

$$= E((\mathbf{U} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\varepsilon)((\mathbf{U} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\varepsilon)'$$

$$= E(\mathbf{U} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\varepsilon\varepsilon'(\mathbf{U}' + \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= (\mathbf{U} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\,E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')(\mathbf{U}' + \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$$

$$= \sigma^2(\mathbf{U} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\mathbf{U}' + \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$$

$$= \sigma^2(\mathbf{U}\mathbf{U}' + \mathbf{U}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{U}'$$

$$+ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$$

$$= \sigma^2(\mathbf{U}\mathbf{U}' + \mathbf{U}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{U}' + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$$

Menurut persamaan (2.1.9), $\mathbf{UX} = \mathbf{0}$ dan menyebabkan $(\mathbf{UX})' = \mathbf{0}$

Maka,

$$Var(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) = \sigma^2(\mathbf{U}\mathbf{U}' + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}) \qquad (2.1.10)$$

Sedangkan menurut persamaan (2.1.5) $var(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$.

Untuk menentukan varian yang terkecil diperlukan Definisi 2.2.2 point 2 beserta kriteria Syilvester untuk kesemidefinitan positip bentuk kuadrat.

Dengan melihat $\mathbf{U}\mathbf{U}'$ yang merupakan matrik simetrik dengan diagonal utama positif (berbentuk kuadrat) sehingga determinan minor utamanya adalah positif atau sekurang-kurangnya sama dengan nol, dengan demikian $\mathbf{U}\mathbf{U}'$ adalah suatu matrik semidefinit positif. Maka estimator dalam persamaan (2.1.6) mempunyai varian (2.1.10) yang lebih besar atau sama dengan (2.1.5). Berarti di antara semua estimator linier tak bias, estimator kuadrat terkecil $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ mempunyai varian terkecil. (**bukti selesai**).

Untuk tujuan hipotesis terdapat asumsi-asumsi yang harus dipenuhi oleh model regresi linier berganda univariat. Asumsi-asumsi pada model regresi linier berganda univariat adalah:

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

1. Nilai harapan dari vektor error ε dari tiap unsurnya adalah nol, secara explisit, $E(\varepsilon) = \mathbf{0}$.
2. Varian ε_i adalah angka konstan positif yang sama dengan σ^2, secara eksplisit $Var(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2\mathbf{I}_n$. Asumsi ini disebut dengan homokedastisitas varian.
3. Error ε_i dan ε_j tidak berkorelasi , $\forall\, i \neq j$
4. Error independen dan berdistribusi $N(0,\sigma^2)$
5. Tidak ada korelasi linier (multikolinearitas) antar variabel bebas x.

Pengujian hipotesis pada model regresi linier barganda dilakukan untuk mengetahui ada tidaknya hubungan linier antara sebuah variabel tidak bebas y dan variabel bebas $x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots, x_q$ secara keseluruhan dengan pendekatan hipotesis sebagai berikut:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots\cdots\cdots = \beta_q = 0$$

$$H_1 : \beta_k \neq 0 \text{ untuk paling sedikit satu k, k=1,2,........,q} \qquad (2.1.11)$$

Didefinisikan jumlah kuadrat dengan perumusan sebagai berikut:

$$\text{JKR} = \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - n\bar{y}^2$$

$$\text{JKE} = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$\text{JKT} = \text{JKR} + \text{JKE}$$

$$= \mathbf{y}'\mathbf{y} - n\bar{y}^2$$

di mana

JKR = Jumlah Kuadrat Regresi

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

JKE = Jumlah Kuadrat Residual

JKT = Jumlah Kuadrat Total

Derajat bebas (db) untuk masing-masing jumlah kuadrat adalah

db regresi = q yaitu banyaknya parameter regresi selain parameter konstanta

db residual = n-q-1, dengan n banyaknya pengamatan

db total = n-1

Statistik uji untuk hipotesis pada persamaan (2.1.11) adalah

$$F_0 = \frac{KTR}{KTE} = \frac{JKR/q}{JKE/n-q-1} \tag{2.1.12}$$

di mana

KTR = Kuadrat Tengah Regresi

KTE = Kuadrat Tengah Residual

Statistik uji F_0 mengikuti distribusi $F_{q,n-q-1}$. Dengan taraf signifikansi α tertentu, pengambilan keputusan untuk hipotesis pada persamaan (2.1.11) yaitu menolak H_0 jika $F_0 > F_{\alpha,q,n-q-1}$, untuk $F_{\alpha,q,n-q-1}$ merupakan nilai kritis dari distribusi F. Penolakan $H_0 : \beta_k = 0$ menyatakan paling sedikit satu variabel bebas $x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots, x_q$ memberikan sumbangan yang nyata pada model tersebut. Prosedur pengujian dinyatakan dalam tabel analisis varian tabel 2.1.2

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Tabel 2.1.2 Analisis Varian untuk Nyata Regresi

Pada Model Regresi Linier Berganda

Sumber variansi	Jumlah kuadrat	Derajat Bebas	Rata-rata jumlah kuadrat	F_0
Regresi	JKR	q	KTR	$\frac{KTR}{KTE}$
Residual	JKE	n-q-1	KTE	
Total	JKT	n-1		

Untuk menentukan signifikan tidaknya nilai dari setiap variabel-variabel bebas dalam model dilakukan uji nyata regresi secara individu. Pendekatan hipotesisnya adalah:

$H_0 : \beta_k = 0$

$H_1 : \beta_k \neq 0$, untuk masing-masing k, k=1,2,.......,q.

Statistik ujinya

$$t = \frac{\hat{\beta}_k}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{kk}}} \qquad (2.1.13)$$

dengan C_{kk} adalah elemen diagonal $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ yang berhubungan dengan β_k. Dengan pengambilan α tertentu, hipotesis nol ditolak jika $|t| > t_{\alpha/2,n-q-1}$. $t_{\alpha/2,n-q-1}$ adalah nilai kritis dari distribusi t. Jika $H_0 : \beta_k = 0$ diterima, menunjukkan bahwa x_k dapat dihilangkan dari model.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Untuk mengukur seberapa jauh kecocokan dari suatu model regresi digunakan koefisien determinasi berganda R^2. Nilai R^2 menyatakan besarnya sumbangan keseluruhan variabel bebas x terhadap variabel tak bebas y. Besarnya R^2 didefinisikan:

$$R^2 = \frac{JKR}{JKT} = 1 - \frac{JKE}{JKT} \tag{2.1.14}$$

Nilai R^2 berkisar antara 0 sampai 1 ($0 \le R^2 \le 1$). Semakin besar nilai R^2 mengindikasikan semakin cocok model yang diperoleh.

2.2 Matrik

Konsep aljabar vektor matrik sangat diperlukan dalam analisis multivariat. Dengan menggunakan aljabar vektor matrik perhitungan-perhitungan yang rumit dapat dihindari. Telah diperlihatkan pada sub bab 2.1. vektor dan matrik dapat digunakan untuk memudahkan dalam menyatakan model regresi beserta analisisnya. Dalam sub bab 2.2. berikut akan dibahas hal-hal mengenai vektor dan matrik yang diperlukan dalam analisis regresi multivariat, yang kesemuanya terangkum dalam definisi-definisi di bawah ini.

Definisi 2.2.1

Misalkan $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ adalah matrik bujursangkar berukuran pxp. Trace dari matrik **A** ditulis tr(**A**) adalah jumlahan dari elemen-elemen diagonalnya, sehingga

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{p} a_{ii} \tag{2.2.1}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Sifat-sifat dari trace adalah sebagai berikut. Misalkan **A** dan **B** matrik bujursangkar berukuran pxp dan **x** vektor berukuran px1.

1. $\mathrm{tr}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) \pm \mathrm{tr}(\mathbf{B})$ (2.2.2)
2. $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$ (2.2.3)
3. $\mathbf{x}'\mathbf{Ax} = \mathrm{tr}(\mathbf{x}'\mathbf{Ax}) = \mathrm{tr}(\mathbf{Axx}')$ (2.2.4)
4. $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$, dengan λ merupakan nilai eigen untuk matrik simetrik **A** (2.2.5)

Definisi 2.2.2

Jika **A** adalah matrik bujur sangkar, maka **A** dikatakan matrik simetrik jika $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$. Misalkan **A** matrik simetrik berukuran pxp dan **x** adalah vektor berukuran px1.

1. Matrik **A** dikatakan matrik definit positif apabila bentuk kuadrat $\mathbf{x}'\mathbf{Ax}$ nilainya positip ($\mathbf{x}'\mathbf{Ax} > 0$) untuk setiap x kecuali $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

   Terdapat kondisi perlu untuk memenuhi bentuk kuadrat $\mathbf{x}'\mathbf{Ax}$ menjadi definit positif yaitu jika determinan **A** adalah positif dan minor utama determinan **A** (determinan matrik kxk pada sudut kiri matrik **A** dengan k=1,2,......,p-1) secara berturut-turut adalah positif yaitu

$$a_{11} > 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ldots\ldots, |\mathbf{A}| > 0$$

   (kondisi ini disebut kriteria Sylvester untuk kedefinitan positif bentuk kuadrat)

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2. Matrik **A** dikatakan matrik semidefinit positif apabila bentuk kuadrat $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ nilainya nonnegatip ($\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$) untuk setiap **x** dan ada nilai-nilai $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ dimana $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$.

   Kondisi perlu dan mencukupi untuk bentuk kuadratik $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$, menjadi semi definit positif jika **A** singuler ($|\mathbf{A}|=0$) dan semua minor utamanya adalah tak negatif.

$$a_{ii} \geq 0, \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \geq 0, \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} \geq 0, \ldots\ldots, |\mathbf{A}| = 0$$

   dengan i<j<k

   (kondisi ini disebut kriteria Sylvester untuk kesemidefinitan positif bentuk kuadrat)

Definisi 2.2.3

Misalkan **A** matrik nonsingular yaitu matrik dengan determinan tidak sama dengan nol, maka determinan dari invers matrik nonsingular didefinisikan sebagai

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \left|\frac{1}{\mathbf{A}}\right| \qquad (2.2.6)$$

Definisi 2.2.4

1. Misalkan u = f(x) = f($x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_p$) adalah fungsi skalar dari variabel $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_p$. Differensial parsial tingkat satu terhadap vektor **x** didefinisikan sebagai

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_p} \end{bmatrix} \tag{2.2.7}$$

2. Misalkan $u = f(\mathbf{A}) = f(a_{11}, a_{22}, \ldots\ldots\ldots, a_{pp})$, dimana **A** matrik simetrik .

   Differensial parsial tingkat satu u terhadap matrik **A** didefinisikan sebagai

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial a_{11}} & \frac{\partial u}{\partial a_{12}} & \cdots\cdots & \frac{\partial u}{\partial a_{1p}} \\ \frac{\partial u}{\partial a_{21}} & \frac{\partial u}{\partial a_{22}} & \cdots\cdots & \frac{\partial u}{\partial a_{2p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial a_{p1}} & \frac{\partial u}{\partial a_{p2}} & \cdots\cdots & \frac{\partial u}{\partial a_{pp}} \end{bmatrix} \tag{2.2.8}$$

Sifat-sifat derivatif parsial tingkat satu pada vektor dan matrik adalah sebagai berikut, misalkan **x,a** vektor berukuran px1 dan **A** dan **C** matrik simetrik berukuran pxp

1. Misalkan $u = \mathbf{a}'\mathbf{x} = \mathbf{x}'\mathbf{a}$

$$\frac{\partial(\mathbf{a}'\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{a})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a} \tag{2.2.9}$$

2. Misalkan $u = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$

$$\frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{2.2.10}$$

3. $$\frac{\partial \mathrm{tr}(\mathbf{AC})}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{C} - \mathrm{diag}(\mathbf{C}) \tag{2.2.11}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

4. $\dfrac{\partial \ln|\mathbf{A}|}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{A}^{-1} - \mathrm{diag}(\mathbf{A}^{-1})$, **A** nonsingular (2.2.12)

Definisi 2.2.5

Vekor-vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots\ldots\ldots, \mathbf{a}_n$ dikatakan bergantung linier jika terdapat konstanta $c_1, c_2, \ldots\ldots\ldots, c_n$ (tidak semua nol) sedemikian hingga

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots\ldots\ldots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \quad (2.2.13)$$

jika tidak demikian $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots\ldots\ldots, \mathbf{a}_n$ dikatakan bebas linier.

Definisi 2.2.6

Rank suatu matrik **A** didefinisikan dengan

Rank(**A**) = jumlah dari baris yang bebas linier pada matrik **A**

= jumlah dari kolom yang bebas linier pada matrik **A**

Definisi 2.2.7

Dua buah vektor **a** dan **b** yang masing-masing berukuran nx1 dikatakan ortogonal jika

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots\ldots + a_nb_n = 0 \quad (2.2.14)$$

Dua buah vektor eigen yang berlainan pada matrik simetrik adalah saling ortogonal. Vektor eigen diterangkan lebih lanjut dalam Definisi 2.2.8.

Definisi 2.2.8

Misalkan **A** adalah matrik bujur sangkar berukuran nxn, λ adalah skalar dan **e** adalah vektor kolom dengan $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$, sedemikian sehingga memenuhi $\mathbf{Ae} = \lambda\mathbf{e}$, maka dikatakan bahwa λ adalah suatu nilai eigen dari **A**, dan **e** adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Nilai eigen dicari dengan menggunakan persamaan karakteristik:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}) = 0 \qquad (2.2.15)$$

Definisi 2.2.9

P dikatakan matrik idempoten jika $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. Sebuah matrik idempoten sekaligus simetrik disebut dengan matrik proyeksi.

1. Jika **P** matrik proyeksi berukuran nxn dan mempunyai rank r, maka **P** akan mempunyai r nilai eigen yang berharga 1 dan n-r sisanya nilai eigen berharga nol.
2. Jika **P** matrik proyeksi maka tr(**P**) = rank(**P**).
3. Jika **P** matrik idempoten , maka (**I-P**) juga matrik idempoten.

Definisi 2.2.10

A adalah matrik simetrik nxn dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\ldots\ldots,\lambda_n$ dan $e_1,e_2,\ldots\ldots\ldots,e_n$ merupakan vektor eigen ternormalisasi, maka *Dekomposisi spektral* dari matrik **A** adalah

$$\mathbf{A} = \lambda_1 e_1 e_1' + \lambda_2 e_2 e_2' + \ldots\ldots\ldots + \lambda_2 e_2 e_2'$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, e_i e_i' \qquad (2.2.16)$$

dengan $\mathbf{e}_i'\mathbf{e}_j = 1$ untuk i = j dan 0 untuk i ≠ j.

2.3 Distribusi Normal Multivariat

Kebanyakan prosedur inferensial multivariat didasarkan pada distribusi normal multivariat, yang merupakan generalisasi dari distribusi normal univariat.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Meskipun kebanyakan data yang sebenarnya tidak pernah tepat normal multivariat, distribusi normal multivariat sering digunakan untuk aproksimasi distribusi yang sebenarnya.

Definisi 2.3.1

Suatu vektor random **y** berukuran px1, dikatakan berdistribusi p variat dengan rata-rata $\boldsymbol{\mu}$ dan matrik kovarian Σ yang dinotasikan dengan $N_p(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$, jika mempunyai fungsi densitas probabilitas sebagai berikut:

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^p|\Sigma|^{1/2}} e^{-(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})/2} \tag{2.3.1}$$

dimana Σ definit positif dan $-\infty < y < \infty$.

Untuk mempermudah penulisan vektor **y** berukuran px1 selanjutnya ditulis dengan **y**.

Theorema 2.3.1

Jika **y** berdistribusi $N_p(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$, fungsi pembangkit momen dari **y** adalah

$$M_{\mathbf{y}}(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}+\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}\mathbf{t}/2} \tag{2.3.2}$$

Bukti :

Fungsi pembangkit momen dari **y** adalah

$$M_{\mathbf{y}}(\mathbf{t}) = E(e^{\mathbf{t}'\mathbf{y}})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{t}'\mathbf{y}} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^p|\Sigma|^{1/2}} e^{-(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})/2} d\mathbf{y}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^p|\Sigma|^{1/2}} e^{\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}+\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t}/2-(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}-\Sigma\mathbf{t})'\Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}-\Sigma\mathbf{t})/2} d\mathbf{y}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

$$= e^{t'\mu + t'\Sigma t/2} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots\ldots\ldots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^p |\Sigma|^{1/2}} e^{-(y-\mu-\Sigma t)'\Sigma^{-1}(y-\mu-\Sigma t)/2} dy$$

$$= e^{t'\mu + t'\Sigma t/2}$$ **(bukti selesai)**

Pada distribusi normal multivariat ada dua parameter yang nilainya tidak diketahui yaitu μ dan Σ, untuk itu nilai dari parameter tersebut harus diestimasi. Metode yang sering digunakan untuk menetukan estimator dari parameter adalah metode maksimum likelihood. Densitas bersama dari $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_n$ disebut fungsi likelihood. Estimator maksimum likelihood adalah nilai parameter yang memaksimalkan fungsi likelihood. Berikut ini akan ditentukan estimator maksimum likelihood dari μ dan Σ untuk suatu sampel random dari distribusi normal multivariat.

Theorema 2.3.2

Jika $y_1, y_n, \ldots\ldots\ldots, y_n$ vektor random yang independen berdistribusi $N_p(\mu, \Sigma)$, maka estimator maksimum likelihood dari μ dan Σ adalah

$$\hat{\mu} = \overline{y} \tag{2.3.3}$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})(y_i - \overline{y})' = \frac{1}{n}\mathbf{W} \tag{2.3.4}$$

dimana $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})(y_i - \overline{y})'$

Bukti:

Fungsi Likelihood (densitas bersama) dari y_i adalah hasil kali densitas dari masing-masing y_i

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$L(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{p}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-(\mathbf{y}_i-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y}_i-\boldsymbol{\mu})/2}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{np}|\boldsymbol{\Sigma}|^{n/2}} e^{-\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y}_i-\boldsymbol{\mu})/2} \qquad (2.3.5)$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai $\boldsymbol{\mu}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}$ yang memaksimumkan persamaan (2.3.5). Berdasarkan persamaan (2.2.2) dan (2.2.4) diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y}_i-\boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(\mathbf{y}_i-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y}_i-\boldsymbol{\mu})$$

$$= \mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{y}_i-\boldsymbol{\mu})') \qquad (2.3.6)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{y}_i-\boldsymbol{\mu})' = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i-\overline{\mathbf{y}}+\overline{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{y}_i-\overline{\mathbf{y}}+\overline{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu})'$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i-\overline{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i-\overline{\mathbf{y}})' + \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i-\overline{\mathbf{y}})(\overline{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu})'$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}(\overline{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{y}_i-\overline{\mathbf{y}})' + \sum_{i=1}^{n}(\overline{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{y}_i-\boldsymbol{\mu})'$$

karena

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i-\overline{\mathbf{y}})(\overline{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu})' = (\sum_{i=1}^{n}\mathbf{y}_i - \sum_{i=1}^{n}\overline{\mathbf{y}})(\overline{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu})'$$

$$= (n\overline{\mathbf{y}} - n\overline{\mathbf{y}})(\overline{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu})'$$

$$= \mathbf{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{y}_i-\boldsymbol{\mu})' = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i-\overline{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i-\overline{\mathbf{y}})' + n(\overline{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu})(\overline{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu})'$$

$$= \mathbf{W} + n(\overline{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu})(\overline{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu})' \qquad (2.3.7)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Substitusi persamaan (2.3.7) ke dalam persamaan (2.3.6) kemudian substitusi ke dalam persamaan (2.3.5), sehingga diperoleh

$$L(\boldsymbol{\mu},\Sigma)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{np}|\Sigma|^{n/2}}e^{-\mathrm{tr}\Sigma^{-1}(\mathbf{W}+n(\bar{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu})')/2} \qquad (2.3.8)$$

Karena logaritma natural adalah fungsi naik, maksimum dari lnL akan terjadi pada titik yang sama dengan maksimum L. Pengoperasian dengan lnL pada L untuk mempermudah dalam pendefferensialan. Dengan pengoperasian ln pada L diperoleh

$$\ln L(\boldsymbol{\mu},\Sigma)=-np\ln(\sqrt{2\pi})-\frac{n}{2}\ln|\Sigma|-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Sigma^{-1}(\mathbf{W}+n(\bar{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu})') \qquad (2.3.9)$$

Berdasarkan persamaan (2.2.2) dan (2.2.4) diperoleh

$$\ln L(\boldsymbol{\mu},\Sigma)=-np\ln(\sqrt{2\pi})-\frac{n}{2}\ln|\Sigma|-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{W})-\frac{n}{2}((\bar{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu}))$$

$$=-np\ln(\sqrt{2\pi})-\frac{n}{2}\ln|\Sigma|-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{W})$$

$$-\frac{n}{2}(\bar{\mathbf{y}}'\Sigma^{-1}\bar{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu}'\Sigma^{-1}\bar{\mathbf{y}}-\bar{\mathbf{y}}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\mu}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})$$

Karena Σ^{-1} simetrik maka $(\Sigma^{-1})'=\Sigma^{-1}$, sehingga

$$\ln L(\boldsymbol{\mu},\Sigma)=-np\ln(\sqrt{2\pi})-\frac{n}{2}\ln|\Sigma|-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}\mathbf{W})$$

$$-\frac{n}{2}(\bar{\mathbf{y}}'\Sigma^{-1}\bar{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\mu}'(\Sigma^{-1}\bar{\mathbf{y}})-(\Sigma^{-1}\bar{\mathbf{y}})'\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\mu}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})$$

Untuk menentukan estimator maksimum likelihood untuk $\boldsymbol{\mu}$ dan Σ, $\ln L(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$ didefferensialkan ke $\boldsymbol{\mu}$ dan menyamakannya dengan nol. Berdasarkan persamaan(2.2.9) dan (2.2.10) diperoleh

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} - \frac{n}{2}(\mathbf{0} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\overline{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\overline{\mathbf{y}} + 2\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}) = \mathbf{0})$$

$$(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\overline{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\overline{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\mathbf{y}} \qquad (2.3.10)$$

Sebelum pendefferensialan $\ln L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ untuk mendapatkan $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$, substitusikan persamaan (2.3.10) ke dalam persamaan (2.3.9) dan berdasarkan persamaan (2.2.6), $\left|\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|}$ dengan pengoperasian ln pada kedua ruas diperoleh $\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\right| = -\ln|\boldsymbol{\Sigma}|$, sehingga persamaan (2.3.9) dapat ditulis

$$\ln L(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\Sigma}) = -np\ln(\sqrt{2\pi}) + \frac{n}{2}\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\right| - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{W}) \qquad (2.3.11)$$

Persamaan (2.3.11) didefferensialkan terhadap $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ dan menyamakannya dengan nol, berdasarkan persamaan (2.2.11) dan (2.2.12) diperoleh

$$\frac{\partial \ln(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\Sigma}^{-1}} = \mathbf{O}$$

$$\mathbf{O} + n\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \frac{n}{2}\mathrm{diag}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}) - \mathbf{W} + \frac{1}{2}\mathrm{diag}(\mathbf{W}) = \mathbf{O}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \frac{1}{2}\mathrm{diag}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}) = \frac{1}{n}(\mathbf{W} - \frac{1}{2}\mathrm{diag}(\mathbf{W})) \qquad (2.3.12)$$

dinotasikan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11} & \hat{\sigma}_{12} & \cdots & \hat{\sigma}_{1p} \\ \hat{\sigma}_{21} & \hat{\sigma}_{22} & \cdots & \hat{\sigma}_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}_{p1} & \hat{\sigma}_{p2} & \cdots & \hat{\sigma}_{pp} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1p} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{p1} & w_{p2} & \cdots & w_{pp} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{diag}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}) = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{\sigma}_{pp} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{diag}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} w_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_{pp} \end{bmatrix}$$

Perhatikan untuk selain elemen diagonal diperoleh

$$\hat{\sigma}^2{}_{jj} = \frac{1}{n} w_{jk}\text{, untuk } j \neq k \tag{2.3.13}$$

Perhatikan untuk elemen diagonal

$$\hat{\sigma}^2{}_{jj} = \frac{1}{n} w_{jj} \tag{2.3.14}$$

Dari persamaan (2.3.13) dan (2.3.14) dapat disimpulkan bahwa

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n}\mathbf{W} \tag{2.3.15}$$

Sehingga estimator maksimum likelihood untuk Σ adalah

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n}\mathbf{W}$$

(Bukti selesai)

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Beberapa sifat penting dari distribusi normal multivariat adalah sebagai berikut, misalkan y_i independen berdistribusi $N_p(\mu, \Sigma)$, **A** matrik, **b** vektor dan a konstanta

1. $\mathbf{y}+\mathbf{b}$ berdistribusi $N_p(\mu+\mathbf{b}, \Sigma)$ (2.3.16)

2. ay berdistribusi $N_p(a\mu, a^2\Sigma)$ (2.3.17)

3. $\sum_{i=1}^{n} y_i$ berdistribusi $N_p(n\mu, n\Sigma)$ (2.3.18)

4. $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ berdistribusi $N_p(\mu, 1/n\Sigma)$ (2.3.19)

5. $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i$ berdistribusi $N_p(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\Sigma)$ (2.3.20)

6. $\mathbf{A}y$ berdistribusi $N_q(\mathbf{A}\,\mu, \mathbf{A}\,\Sigma\,\mathbf{A}')$, **A** berukuran qxp (2.3.21)

Dalam Theorema 2.3.3 berikut akan ditunjukkan bahwa kombinasi linier komponen-komponen yang berdistribusi normal multivariat juga berdistribusi normal multivariat.

Theorema 2.3.3:

$y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ merupakan vektor random berukuran px1 dan masing-masing independen dan berdistribusi $N_p(\mu_i, \Sigma)$ dan

$$V_1 = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots\ldots\ldots + c_ny_n$$

$$V_2 = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots\ldots\ldots + c_ny_n$$

maka V_1 dan V_2 mempunyai distribusi bersama normal multivariat dengan matrik kovarian

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^{n} c_i^{2})\Sigma & \mathbf{b}'\mathbf{c}\Sigma \\ \mathbf{b}'\mathbf{c}\Sigma & (\sum_{i=1}^{n} b_i^{2})\Sigma \end{bmatrix}$$

dan $\mathbf{V}_1$ dan $\mathbf{V}_2$ independen bila $\mathbf{b}'\mathbf{c} = (\sum_{i=1}^{n} c_i b_i) = 0$.

Bukti:

$\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots\ldots, \mathbf{y}_n$ independen

$\mathbf{y}' = (\mathbf{y}_1', \mathbf{y}_2', \ldots\ldots, \mathbf{y}_n')$

$= (y_{11}, y_{12}, \ldots\ldots, y_{1p}, y_{21}, y_{22}, \ldots\ldots, y_{2p}, y_{n1}, y_{n2}, \ldots\ldots, y_{np})'$

$\mathbf{y}'$ berukuran 1xnp.

Sehingga **y** berdistribusi $N_{np}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma_y)$ dengan

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} \qquad \Sigma_y = \begin{bmatrix} \Sigma_{pxp} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Sigma_{pxp} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Sigma_{pxp} \end{bmatrix}$$

Dengan memilih $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_1\mathbf{I} & c_2\mathbf{I} & \cdots & c_n\mathbf{I} \\ b_1\mathbf{I} & b_2\mathbf{I} & \cdots & b_n\mathbf{I} \end{bmatrix}$, **A** berukuran 2pxnp

I adalah matrik identitas berukuran pxp.

Berdasarkan persamaan (2.3.21) **Ay** berdistribusi $N_{2p}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}\Sigma_y\mathbf{A}')$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Kovarian

$$\mathbf{A}\Sigma_y\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} c_1\mathbf{I} & c_2\mathbf{I} & \cdots\cdots & c_n\mathbf{I} \\ b_1\mathbf{I} & b_2\mathbf{I} & \cdots\cdots & b_n\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{pxp}{\Sigma} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \underset{pxp}{\Sigma} & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \underset{pxp}{\Sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\mathbf{I} & b_1\mathbf{I} \\ c_2\mathbf{I} & b_2\mathbf{I} \\ \vdots & \vdots \\ c_n\mathbf{I} & b_n\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1\mathbf{I}\Sigma & c_2\mathbf{I}\Sigma & \cdots\cdots & c_n\mathbf{I}\Sigma \\ b_1\mathbf{I}\Sigma & b_2\mathbf{I}\Sigma & \cdots\cdots & b_n\mathbf{I}\Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\mathbf{I} & b_1\mathbf{I} \\ c_2\mathbf{I} & b_2\mathbf{I} \\ \vdots & \vdots \\ c_n\mathbf{I} & b_n\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^{n} c_i^2)\Sigma & (\sum_{i=1}^{n} c_i b_i)\Sigma \\ (\sum_{i=1}^{n} c_i b_i)\Sigma & (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)\Sigma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^{n} c_i^2)\Sigma & \mathbf{b}'\mathbf{c}\Sigma \\ \mathbf{b}'\mathbf{c}\Sigma & (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)\Sigma \end{bmatrix}$$

$(\sum_{i=1}^{n} c_i^2)\Sigma$ menyatakan varian $\mathbf{V}_1$

$(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)\Sigma$ menyatakan varian $\mathbf{V}_2$

$(\sum_{i=1}^{n} c_i b_i)\,\Sigma = \mathbf{b}'\mathbf{c}\,\Sigma$ menyatakan kovarian antara $\mathbf{V}_1$ dan $\mathbf{V}_2$

bila $(\sum_{i=1}^{n} c_i b_i) = \mathbf{b}'\mathbf{c} = 0$ maka $(\sum_{i=1}^{n} c_i b_i)\,\Sigma = \mathbf{b}'\mathbf{c}\,\Sigma = \mathbf{O}$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Karena kovarian antara $\mathbf{V}_1$ dan $\mathbf{V}_2$ sama dengan $\mathbf{O}$ maka $\mathbf{V}_1$ dan $\mathbf{V}_2$ independen.(**bukti selesai**).

2.4 Distribusi Wishart

Distribusi wishart memegang peranan penting dari prosedur inferensial multivariat. Distribusi wishart dapat diturunkan dari distribusi normal multivariat.

Definisi 2.4.1

Jika matrik $\mathbf{Z'Z} = \sum_{i=1}^{n} z_i z_i'$ dengan z_i adalah baris ke-i dari matrik $\mathbf{Z}$ berukuran nxp, independen berdistribusi $N_p(0, \Sigma)$, maka $\mathbf{Z'Z}$ dikatakan berdistribusi wishart dengan derajat kebebasan n dan matrik kovarian Σ dinotasikan W_p (n, Σ). Dengan $\mathbf{Z}$ didefinisikan sebagai

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ . \\ z_n' \end{bmatrix} \qquad (2.4.1)$$

Subskrip p menunjukkan ukuran matrik $\mathbf{Z'Z}$. Untuk n≥p $\mathbf{Z'Z}$ mempunyai fungsi densitas

$$\mathbf{W(Z'Z / n, \Sigma)} = \begin{cases} \dfrac{|\mathbf{Z'Z}|^{1/2(n-p-1)} \exp(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Sigma^{-1}(\mathbf{Z'Z}))}{2^{1/2np}\pi^{p(p-1)/4}|\Sigma|^{1/2n}\prod_{i=1}^{p}\Gamma(\frac{1}{2}(n+1-i))} \\ 0, \text{yang lain} \end{cases} \qquad (2.4.2)$$

$\mathbf{Z'Z}$ definit positif.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Sebuah kondisi di bawah bentuk $\mathbf{Z'AZ}$ dikatakan berdistribusi Wishart diberikan oleh theorema berikut.

Theorema 2.4.1

Andaikan $\mathbf{Z} = [z_1, z_2, \ldots\ldots\ldots, z_n]'$ dimana $z_1, z_2, \ldots\ldots\ldots, z_n$ adalah independen dan masing-masing $\mathbf{z}_i$ berdistribusi $N_p(0, \Sigma)$. Kemudian apabila **A** adalah matrik simetrik idempoten berukuran nxn yang mempunyai rank r, maka $\mathbf{Z'AZ}$ dikatakan berdistribusi $W_p(r, \Sigma)$.

Bukti:

Dengan (2.2.16) matrik **A** dapat dibawa ke dalam bentuk dekomposisi spektral $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i'$ dengan λ_i adalah nilai eigen ke –i dari matrik **A,** $\mathbf{e}_i$ berhubungan dengan vektor eigen berukuran nx1. Kemudian karena matrik **A** mempunyai rank r, dengan Definisi 2.2.9 point satu akan terdapat sebanyak r λ_i yang berharga 1 dan n-r sisanya λ_i berharga nol. Sehingga $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i'$.

$$\mathbf{Z'AZ} = \mathbf{Z}'\left(\sum_{i=1}^{r} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i'\right)\mathbf{Z} \tag{2.4.3}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \mathbf{Z}'\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i'\mathbf{Z}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} (\mathbf{Z}'\mathbf{e}_i)(\mathbf{Z}\mathbf{e}_i')'$$

Sehingga didapat

$$\mathbf{Z'AZ} = \sum_{i=1}^{r} (\mathbf{Z}'\mathbf{e}_i)(\mathbf{Z}'\mathbf{e}_i)' \tag{2.4.4}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Untuk menunjukkan $\mathbf{Z'AZ}$ pada persamaan (2.4.4) berdistribusi $W_p\ (n, \Sigma)$ perlu dibuktikan terlebih dahulu bahwa $\mathbf{Z'e}_i$ berdistribusi $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ dan independen.

Yang pertama akan dibuktikan adalah bahwa $\mathbf{Z'e}_i$ berdistribusi $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ sebagai berikut. Hasil kali silang $\mathbf{Z'e}_i$ dapat ditulis sebagai $\mathbf{Z'e}_i = \sum_{k=1}^{n} e_{ik}\mathbf{z}_k$ dimana $\mathbf{e}_i = [e_{i1}, e_{i2}, \ldots\ldots, e_{ik}]'$ dan $\mathbf{z}_k$ berdistribusi $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$, maka berdasarkan persamaan (2.3.20) $\sum_{k=1}^{n} e_{ik}\mathbf{z}_k$ berdistribusi $N_p(\sum_{k=1}^{n} e_{ik}\mathbf{0}, e_{ik}{}^2\Sigma) = N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$, karena $\mathbf{e}_i'\mathbf{e}_i = 1$. Selanjutnya $\mathbf{Z'e}_i$ independen dibuktikan dengan kovarian antara $\mathbf{Z'e}_i$ dan $\mathbf{Z'e}_j$ merupakan matrik $\mathbf{O}$.

Karena $\mathbf{Z'e}_i$ dan $\mathbf{Z'e}_j$ masing-masing dapat dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{Z'e}_i = \sum_{k=1}^{n} e_{ik}\mathbf{z}_k$$

$$= e_{i1}\mathbf{z}_1 + e_{i2}\mathbf{z}_2 + \ldots\ldots\ldots + e_{in}\mathbf{z}_n$$

$$\mathbf{Z'e}_j = \sum_{k=1}^{n} e_{jk}\mathbf{z}_k$$

$$= e_{j1}\mathbf{z}_1 + e_{j2}\mathbf{z}_2 + \ldots\ldots\ldots + e_{jn}\mathbf{z}_n$$

menurut Theorema 2.3.3 kovarian antara $\mathbf{Z'e}_i$ dan $\mathbf{Z'e}_j$ sama dengan $\mathbf{O}$ jika $\sum_{k=1}^{n} e_{ik}e_{jk}\mathbf{z}_k = \sum_{k=1}^{n} e_{jk}e_{ik}\mathbf{z}_k = \mathbf{e}_i'\mathbf{e}_j = 0$. Dalam hal ini $\mathbf{e}_i'\mathbf{e}_j = 0$ terpenuhi karena vektor eigen yang berbeda pada matrik simetrik adalah saling ortogonal.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dengan Definisi 2.4.1 terbukti bahwa $\mathbf{Z'AZ}$ pada persamaan (2.4.4) berdistribusi $W_p\ (r, \Sigma)$. (**bukti selesai**).

Mengenai independensi antara dua matrik wishart akan diterangkan lebih lanjut dalam Theorema 2.4.2 berikut.

Theorema 2.4.2:

Andaikan matrik **Z** berukuran nxp yang didefinisikan pada Theorema 2.4.1 dan andaikan **A** dan **C** keduanya matrik simetrik idempoten berukuran nxn yang masing-masing mempunyai rank r dan s, kemudian matrik Wishart $\mathbf{Z'AZ}$ dan $\mathbf{Z'CZ}$ saling independen jika $\mathbf{AC} = \mathbf{O}$.

Bukti:

Untuk membuktikan $\mathbf{Z'AZ}$ dan $\mathbf{Z'CZ}$ independen dengan menunjukkan kovarian antara keduanya sama dengan **O.**

Berdasarkan persamaan (2.4.4)

$$\mathbf{Z'AZ} = \sum_{i=1}^{r} (\mathbf{Z'e}_i)(\mathbf{Z'e}_i)', \qquad \mathbf{Z'e}_i \text{ independen berdistribusi } N_p(\mathbf{0}, \Sigma).$$

Demikian juga untuk $\mathbf{Z'CZ}$

$$\mathbf{Z'CZ} = \sum_{j=1}^{s} (\mathbf{Z'u}_j)(\mathbf{Z'u}_j)', \quad \mathbf{Z'u}_j \text{ independen berdistribusi } N_p(\mathbf{0}, \Sigma).$$

dengan $\mathbf{u}_j$ merupakan vektor eigen dari **C**.

$$E(\mathbf{Z'AZ}) = E(\mathbf{Z'}\sum_{i=1}^{r} \mathbf{e}_i\mathbf{e}_i'\mathbf{Z})$$

$$= E((\mathbf{Z'e}_1)(\mathbf{Z'e}_1)' + (\mathbf{Z'e}_2)(\mathbf{Z'e}_2)' + \dots\dots\dots + (\mathbf{Z'e}_r)(\mathbf{Z'e}_r)')$$

$$= E((\mathbf{Z'e}_1)(\mathbf{Z'e}_1)') + E((\mathbf{Z'e}_2)(\mathbf{Z'e}_2)') + \dots\dots\dots + E((\mathbf{Z'e}_r)(\mathbf{Z'e}_r)')$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= E(\mathbf{Z}'\mathbf{e}_1)E(\mathbf{Z}'\mathbf{e}_1)' + E(\mathbf{Z}'\mathbf{e}_2)E(\mathbf{Z}'\mathbf{e}_2)' + \dots\dots\dots + E(\mathbf{Z}'\mathbf{e}_r)E(\mathbf{Z}'\mathbf{e}_r)'$$

$$= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \dots\dots\dots + \mathbf{0}$$

$$= \mathbf{0}$$

Analog untuk $\mathbf{Z}'\mathbf{C}\mathbf{Z}$, $E(\mathbf{Z}'\mathbf{C}\mathbf{Z}) = \mathbf{0}$

Sehingga didapat

$$Cov(\mathbf{Z}'\mathbf{A}\mathbf{Z}, \mathbf{Z}'\mathbf{C}\mathbf{Z}) = E((\mathbf{Z}'\mathbf{A}\mathbf{Z} - E(\mathbf{Z}'\mathbf{A}\mathbf{Z}))(\mathbf{Z}'\mathbf{C}\mathbf{Z} - E(\mathbf{Z}'\mathbf{C}\mathbf{Z}))')$$

$$= E((\mathbf{Z}'\mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{0})(\mathbf{Z}'\mathbf{C}\mathbf{Z} - \mathbf{0})')$$

$$= E(\mathbf{Z}'\mathbf{A}\mathbf{Z}\,\mathbf{Z}'\mathbf{C}'\mathbf{Z}) \quad \text{(karena A dan } \mathbf{C} \text{ matrik simetrik)}$$

$$= E(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\,\mathbf{A}\mathbf{C}\,\mathbf{Z}'\mathbf{Z})$$

Jika $\mathbf{AC} = \mathbf{O}$ maka $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\,\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{O}$

$$\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\,\mathbf{A}\mathbf{C}\,\mathbf{Z}'\mathbf{Z} = \mathbf{O}$$

Dan pada akhirnya

$$E(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\,\mathbf{A}\mathbf{C}\,\mathbf{Z}'\mathbf{Z}) = \mathbf{O}$$

Kovarian antara $\mathbf{Z}'\mathbf{A}\mathbf{Z}$ dan $\mathbf{Z}'\mathbf{C}\mathbf{Z}$ sama dengan $\mathbf{O}$ dipenuhi jika $\mathbf{AC}=\mathbf{O}$, sehingga terbukti keduanya independen jika **AC =O.** (**bukti selesai**) .

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)