BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Matriks

Definisi 2.1.1

Matriks adalah kumpulan angka-angka riil atau kompleks yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang. Matriks dinotasikan dengan huruf kapital.

Angka-angka tersebut dinamakan entri atau elemen. Apabila suatu matriks A terdiri dari m baris dan n kolom, maka matriks A dapat ditulis sebagai berikut :

$$A_{mxn} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

a_{ij} merupakan elemen matriks dengan i = 1, 2, 3,…,m dan j = 1, 2, 3, …, n.

Ordo atau ukuran dari suatu matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan banyaknya kolom yang dinotasikan sebagai perkalian antara banyaknya baris dan banyaknya kolom.

Definisi 2.1.2

Suatu matriks A dikatakan **matriks bujur sangkar**, jika banyaknya baris dari matriks A sama dengan banyaknya kolom dari matriks A (m = n). Jika suatu matriks berordo m x n, dan m = n, maka matriks tersebut matriks bujur sangkar berordo n. Dalam suatu matriks bujursangkar, elemen-elemen a_{ij}, dengan i = j, dikatakan elemen diagonal.

Definisi 2.1.3

Transpose dari suatu matriks A, dinotasikan dengan A^T, adalah jika baris dari matriks A diubah menjadi kolom dan sebaliknya kolom diubah menjadi baris. Elemen a_{ij} dalam baris ke-i dan kolom ke-j dari A menjadi a_{ji} dalam baris ke-j dan kolom ke-i dalam A^T.

Definisi 2.1.4

Suatu matriks bujur sangkar A berordo n dikatakan **simetri** jika $A^T = A$. Jadi suatu matriks dikatakan simetri jika $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua i dan j.

Definisi 2.1.5

Suatu matriks A dikatakan *sparse* **(jarang)** jika matriks A mengandung banyak elemen 0 (nol).

Sejauh ini belum ada ketentuan mengenai berapa banyaknya elemen nol tersebut sehingga suatu matriks dikatakan sparse. Sebagai gambaran, untuk matriks berordo 10, dari 100 elemen hanya ada 12 elemen yang bukan nol. Prosentase itupun masih terlalu banyak.

Definisi 2.1.6

Sparse matrix simmetry **(matriks simetri jarang)** adalah suatu matriks sparse yang simetri.

Contoh 2.1.1

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.7

Suatu matriks A dikatakan *definit positif* jika berlaku $x^TAx > 0$, untuk sembarang vektor $x \neq 0$. Dengan x adalah sembarang vektor tidak nol dan x^T adalah transpose dari x.

Contoh 2.1.2

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.7

Matriks segitiga atas adalah matriks yang semua elemen di bawah diagonal utamanya sama dengan nol ($a_{ij} = 0$ untuk $i > j$).

Matriks segitiga bawah adalah matriks yang semua elemen di atas diagonal utamanya sama dengan nol ($a_{ij} = 0$ untuk $i < j$).

Definisi 2.1.8

Suatu **matriks permutasi** $\mathbb{P}$ adalah matriks bujur sangkar ordo n sedemikianhingga masing-masing baris atau kolomnya mengandung satu elemen bernilai 1 (satu), sedangkan elemen sisanya 0 (nol).

Contoh 2.1.3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2. Beberapa Teori mengenai Graph

Definisi 2.2.1

Sebuah **Graph** atau **Graph tak berarah G = (X,E)** adalah suatu sistem yang terdiri dari himpunan berhingga tidak kosong yang disebut ***vertex /node*** (**titik**), yang dinnyatakan dengan X(G), dan himpunan (mungkin kosong) dari pasangan-pasangan tidak terurut antara 2 vertex yang disebut ***edge*** (**garis**), yang dinyatakan dengan E(G). Suatu edge {x,y} atau {y,x} dikatakan menghubungkan vertex x dengan y.

Karena tujuan dalam pengantar teori graph adalah untuk memfasilitasi dalam mempelajari tentang matriks, maka sekarang akan disajikan hubungan antara graph dan matriks.

Definisi 2.2.2

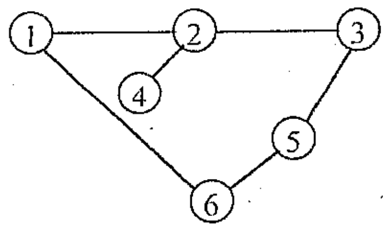
Misal A matriks simetri n x n. **Graph berlabel** dari matriks A, dinotasikan dengan $G^A = (X^A, E^A)$, adalah jika G^A mempunyai n vertex yang dinomori dari 1 sampai n, dan $\{x_i, x_j\} \in E^A$ jika dan hanya jika $a_{ij} = a_{ji} \neq 0$, $i \neq j$.

x_i menotasikan vertex dari X^A dengan label i. Berikut contoh struktur sebuah matriks dan pelabelan graphnya. Elemen tidak nol disimbolkan dengan "*".

Contoh 2.2.1

$$\begin{bmatrix} 1 & * & & & & * \\ * & 2 & * & * & & \\ & * & 3 & & * & \\ & * & & 4 & & \\ & & * & & 5 & * \\ * & & & & * & 6 \end{bmatrix}$$

Matriks A



Graph G^A

Dalam gambar di atas : $X^\wedge = \{1,2,3,4,5,6\}$.

$E^\wedge = \{\{1,2\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,5\},\{5,6\}\}$.

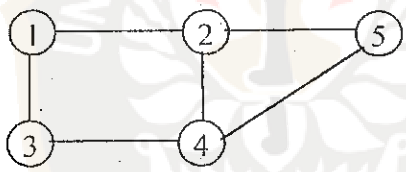
Definisi 2.2.3

Dua vertex x dan y dalam G = (X,E) dikatakan *adjacent* (**berdekatan**) jika $\{x,y\} \in E$. Untuk $Y \subset X$, himpunan adjacent dari Y, yang dinotasikan dengan Adj(Y), adalah himpunan semua vertex yang tidak berada dalam Y tetapi adjacent ke vertex Y.

$\text{Adj}(Y) = \{x \in X - Y \mid \{x,y\} \in E \text{ untuk } y \in Y\}$.

X – Y adalah himpunan semua vertex dalam X yang tidak berada dalam Y.

Contoh 2.2.2



Vertex 1 dan 3, 1 dan 2, 3 dan 4, 2 dan 4 adalah adjacent dengan edge berturut-turut {1,3}, {1,2}, {3,4} dan {2,4}.

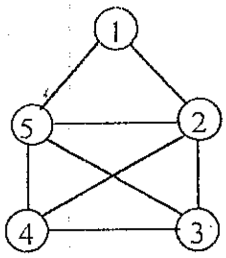
Untuk : • Y = {3}, maka Adj(y) = Adj(3) = {1,4}.

• Y = {3,4}, maka Adj(Y) = Adj({3,4}) = {1,2,5}.

Definisi 2.2.4

Misal $Y \subset X$, *degree* (**derajat**) dari Y, dinotasikan dengan **Deg(Y)** = $|\text{Adj}(Y)|$, adalah banyaknya elemen dari Adj(Y). Dengan kata lain, Deg(Y) adalah banyaknya edge yang bertemu di satu atau beberapa vertex. Jika Y tunggal, maka cukup dinotasikan dengan Deg(y).

Contoh 2.2.3



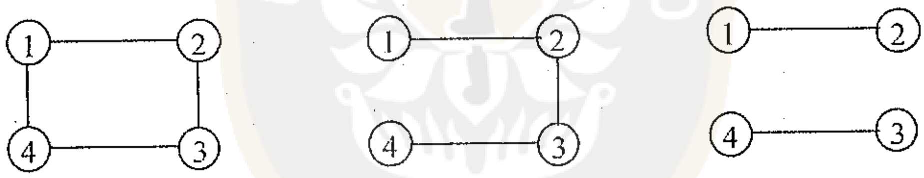
Pada gambar di atas Deg(1) = 2, Deg(5) = 4, Deg(3) = 3

Definisi 2.2.5

Subgraph G' = (X',E') adalah graph yang terdiri dari beberapa atau semua vertex G = (X,E) dan beberapa edge dari G = (X,E).

G' : $X' \subseteq X$, $E' \subset E$.

Contoh 2.2.4



(a) (b) (c)

a. G = (X,E)

X = {1,2,3,4}

E = {{1,2}, {2,3}, {3,4}, {4,1}}

b. G' = (X',E')

X' = {1,2,3,4}

E' = {{1,2}, {2,3}, {3,4}}

c. G' = (X',E')

X' = {1,2,3,4}

E' = {{1,2},{3,4}}

(b) dan (c) adalah subgraph dari (a).

Definisi 2.2.6

Misalkan x dan y dua vertex yang berbeda pada G. Suatu *path* dari x ke y dengan panjang $p \geq 1$ adalah himpunan terurut dari p+1 vertex yang berbeda $(v_1, v_2, \ldots, v_{p+1})$ sedemikianhingga $v_{i+1} \in Adj(v_i)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, dengan $v_1 =$ x dan $v_{p+1} = y$ serta panjang lintasan = p.

Contoh 2.2.5

Untuk gambar pada contoh 2.2.3 :

Barisan vertex (1,2,3,4,5) mempunyai panjang lintasan p = 4.

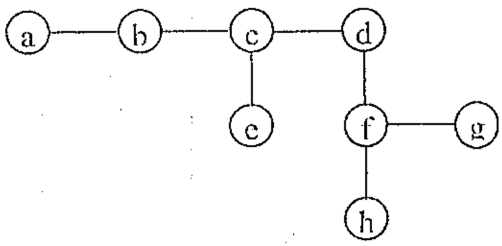
Barisan vertex (1,3,4) mempunyai panjang lintasan p = 2.

Definisi 2.2.7

Suatu graph G dikatakan *connected* (**terhubung**), jika setiap pasang dua vertex yang berbeda dihubungkan oleh minimal satu path. Sebaliknya, G adalah ***disconected*** (**tak terhubung**), dan terdiri dari dua atau lebih komponen terhubung.

Komponen terhubung (**komponen**) adalah subgraph terhubung maksimal dari G.

Contoh 2.2.6



Graph tersebut merupakan graph terhubung.

2.3. Metode Faktorisasi Cholesky

Metode penyelesaian suatu sistem persamaan linier dalam tulisan ini menggunakan metode Cholesky. Sebuah varian dari eliminasi Gauss yang sudah disesuaikan dengan matriks simetri definit positif.

Theorema 2.3.1

Jika A matriks simetri definit positif n x n, maka matriks tersebut dapat difaktorisasikan dengan tunggal menjadi LL^T dengan L matriks segitiga bawah yang elemen diagonalnya positif.

Bukti :

Pembuktian menggunakan induksi pada matriks A.

Untuk $A_{1\times 1}$, maka pasti benar karena a_{11} adalah positif.

Andaikan benar untuk $A_{(n-1)\times(n-1)}$.

Akan ditunjukkan theorema benar untuk $A_{n\times n}$. Untuk maksud ini, akan dilakukan

langkah sebagai berikut :

Tinjaulah untuk $A_{n\times n}$. A dapat dipartisi menjadi bentuk :

$$A = \begin{bmatrix} d & v^T \\ v & \overline{H} \end{bmatrix}, \qquad (2.3.1)$$

dengan d = skalar positif, v = vektor tidak nol dengan panjang n - 1 dan $\overline{H}$ = sub matriks berordo n - 1.

Selanjutnya matriks partisi A dapat disajikan sebagai :

$$\begin{bmatrix} d & v^T \\ v & \overline{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^{1/2} & 0 \\ v/d^{1/2} & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{1/2} & v^T/d^{1/2} \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix},$$

dengan $H = \overline{H} - vv^T/d$ dan I_{n-1} = matriks identitas berordo n - 1.

Matriks H jelas simetri dan juga definit positif karena untuk sembarang vektor tidak nol x dengan panjang n - 1,

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{x^T v}{d} & x^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & v^T \\ v & \overline{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dfrac{x^T v}{d} \\ x \end{bmatrix} = x^T \begin{bmatrix} \overline{H} & -\dfrac{vv^T}{d} \end{bmatrix} x$$

$$= x^T H x > 0$$

Berdasarkan asumsi induksi, H dapat difaktorkan menjadi $L_H L_H^T$, dengan elemen diagonalnya positif, maka A dapat dinyatakan :

$$\begin{bmatrix} d & v^T \\ v & \overline{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^{1/2} & 0 \\ v/d^{1/2} & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{1/2} & v^T/d^{1/2} \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d^{1/2} & 0 \\ v/d^{1/2} & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{1/2} & v^T/d^{1/2} \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d^{1/2} & 0 \\ v/d^{1/2} & L_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{1/2} & v^T/d^{1/2} \\ 0 & L_H^T \end{bmatrix}$$

$$= LL^T$$

Berikut akan dibuktikan bahwa L tunggal dengan induksi.

Untuk matriks A berordo 1 (satu), jelaslah bahwa L tunggal.

Misal benar untuk A berordo n-1. Akan dibuktikan benar untuk A berordo n.

Misalkan A memiliki dua faktorisasi LL^T, $A = L_1 L_1^T$ dan $A = L_2 L_2^T$, sehingga didapat :

$$\begin{bmatrix} d_1^{1/2} & 0 \\ v_1/d_1^{1/2} & L_{H1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{1/2} & v_1^T/d_1^{1/2} \\ 0 & L_{H1}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2^{1/2} & 0 \\ v_2/d_2^{1/2} & L_{H2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2^{1/2} & v_2^T/d_2^{1/2} \\ 0 & L_{H2}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & v^T \\ v & \overline{H} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & v_2^T \\ v_1 & v_1 v_1^T/d_1 + L_{H1} L_{H1}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 & v_2^T \\ v_2 & v_2 v_2^T/d_2 + L_{H2} L_{H2}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & v^T \\ v & \overline{H} \end{bmatrix}$$

dengan $\overline{H}$ adalah sub matriks berordo (n-1) dan $H = \overline{H} - vv^T/d$.

Dapat dilihat bahwa $d_1 = d_2 = d$ dan $v_1 = v_2 = v$ demikian juga $v_1^T = v_2^T = v^T$.

Menurut asumsi induksi, L dari $\overline{H}$ adalah tunggal, maka dari hasil yang diperoleh memperlihatkan bahwa kedua faktorisasi adalah sama. Sehingga benar untuk A berordo n.

(terbukti)

2.3.1 Penerapan Faktorisasi Cholesky

Diberikan suatu sistem persamaan linier

$$Ax = b \qquad (2.3.1.1)$$

Tinjau kembali (2.3.1), maka A di atas dapat dipartisi $A = A_0 = H_0 = \begin{bmatrix} d_1 & V_1^T \\ v_1 & \overline{H}_1 \end{bmatrix}$.

Dengan menggunakan metode Cholesky, A dapat difaktorisasikan menjadi :

$$A_0 = \begin{bmatrix} d_1 & V_1^T \\ v_1 & \overline{H}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^{1/2} & 0 \\ v_1/d_1^{1/2} & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{H}_1 - v_1 v_1^T/d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{1/2} & v_1/d_1^{1/2} \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_1 \end{bmatrix} L_1^T = L_1 A_1 L_1^T.$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & v_2^T \\ 0 & v_2 & \overline{H}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2^{1/2} & 0 \\ 0 & v_2/d_2^{1/2} & I_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{H}_2 - v_2 v_2^T/d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2^{1/2} & v_2/d_2^{1/2} \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$= L_2 A_2 L_2^T.$$

Selanjutnya proses tersebut dilakukan sampai n kali, maka hasil faktorisasinya adalah :

$$A_{n-1} = L_n I_n L_n^T.$$

Dengan d_i adalah skalar positif, v_i adalah vektor dengan panjang n-1, I_n adalah matriks identitas dan H_i matriks simetri definit positif(n-i)x(n-i), untuk $1 \le i \le n$. Setelah langkah ke-n, didapat :

$$A = L_1 L_2 \ldots L_n L_n^T \ldots L_2^T L_1^T$$

$$= LL^T. \qquad (2.3.1.2)$$

dengan L adalah matriks segitiga bawah dengan elemen diagonalnya positif.

Dari hasil (2.3.1.1) dan (2.3.1.2) didapat :

$$LL^T x = b, \qquad (2.3.1.3)$$

dan dengan substitusi $y = L^T x$, maka akan didapat x dengan menyelesaikan

$$Ly = b \text{ dan } L^T x = y. \qquad (2.3.1.4)$$

Contoh 2.3.1

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 1/2 & 2 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 5/8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 7 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan metode Cholesky didapat :

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0,25 & -0,25 & -0,5 & 0,5 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ly = b : \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0,25 & -0,25 & -0,5 & 0,5 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 7 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{didapat } y = \begin{bmatrix} 3{,}5 \\ 2{,}5 \\ 6 \\ -2{,}4 \\ -0{,}5 \end{bmatrix}.$$

$$L^T x = y : \begin{bmatrix} 2 & 0{,}5 & 1 & 0{,}25 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & -1 & -0{,}25 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}25 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}5 \\ 2{,}5 \\ 6 \\ -2{,}4 \\ -0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\text{didapat } x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -8 \\ -0{,}5 \end{bmatrix}.$$

2.3.2 Faktorisasi Matriks Sparse Simetri

Ketika sebuah matriks sparse difaktorkan, seringkali mendapat beberapa ***fill*** ; yaitu, elemen tidak nol dalam matriks segitiga bawah L pada tempat nol dalam matriks A. Akan ditinjau kembali contoh matriks dalam subbab sebelumnya.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{8} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga bawah L dari matriks tersebut diberikan oleh :

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & -0.25 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Terlihat bahwa matriks L mendapat fill pada l_{32}, l_{42}, l_{43}, l_{52}, l_{53}, dan l_{54}.

Untuk mengurangi fill ini, matriks A dapat dipermutasikan. Sebagai contoh, matriks permutasi yang dipakai adalah :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sehingga didapatkan matriks yang telah dipermutasikan :

$$PAP^T = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Contoh sederhana ini menggambarkan bahwa pemilihan matriks P dapat menghasilkan pengurangan fill. Oleh karena itu, dalam penyelesaian persamaan linier $Ax = b$, pertama memerlukan pencarian matriks permutasi P dari sistem yang diberikan. Berangkat dari itu, maka sistem persamaan dapat disajikan dalam bentuk $(PAP^T)(Px) = Pb$, dan metode Cholesky diterapkan pada matriks simetri definit positif PAP^T untuk menghasilkan faktorisasi LL^T.

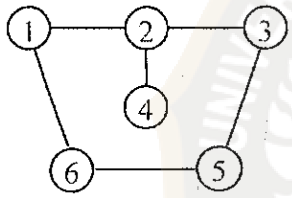
2.4. Proses Eliminasi sebagai Bagian dari Eliminasi Graph

Pada subbab ini akan disajikan hubungan antara eliminasi Gauss dengan eliminasi graph. Ambil suatu matriks seperti pada Gambar 2.4.1. Graph dari G_1 dihasilkan dari G_0 dengan :

1. Penghapusan vertex x_1 dan edge yang menyertainya.
2. Penambahan edge sedemikianhingga vertex-vertex dalam $Adj(x_1)$ juga merupakan pasangan adjacent pada G_1.

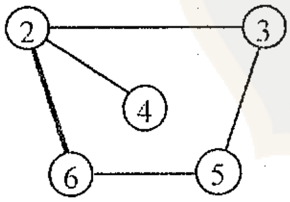
Gambar 2.4.1 Urutan eliminasi graph.

G_0



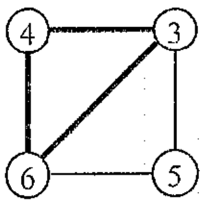
$$A(0) = \begin{bmatrix} * & * & & & & * \\ * & * & * & * & & \\ & * & * & & * & \\ & * & & * & & \\ & & * & & * & * \\ * & & & & * & * \end{bmatrix}$$

G_1



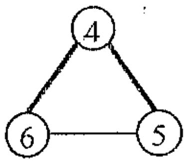
$$A(1) = \begin{bmatrix} * & * & * & & \otimes \\ * & * & & * & \\ * & & * & & \\ & * & & * & * \\ \otimes & & & * & * \end{bmatrix}$$

G_2



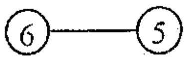
$$A(2) = \begin{bmatrix} * & \otimes & * & \otimes \\ \otimes & * & & \otimes \\ * & & * & * \\ \otimes & \otimes & * & * \end{bmatrix}$$

G_3



$$A(3) = \begin{bmatrix} * & \otimes & \otimes \\ \otimes & * & * \\ \otimes & * & * \end{bmatrix}$$

G_4



$$A(4) = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

G_5

$$A(5) = [*]$$

Terlihat pada gambar di atas, jika pada A(1) dilakukan eliminasi Gauss dan dihasilkan A(2), A(3), A(4) dan A(5), maka G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 berturut-turut adalah graph yang berkaitan dengan matriks tersebut.

Jadi proses eliminasi Gauss pada sebuah matriks dapat disajikan sebagai proses eliminasi pada graph

$$G_i = G^{A(i)} = (X_i, E_i),\ i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

G_i dihasilkan dari G_{i-1} sesuai dengan prosedur yang digambarkan tersebut di atas. Garis tebal menunjukkan edge yang ditambahkan.

Sebagai contoh, eliminasi vertex x_1 dalam graph G_1 menghasikan tiga edge fill $\{x_3, x_4\}$, $\{x_4, x_6\}$ dan $\{x_3, x_6\}$ dalam G_2 karena $\{x_3, x_4, x_6\}$ merupakan adjacent dari x_1 dalam G_1.

Definisi 2.4.1

Jika L matriks segitiga bawah hasil faktorisasi Cholesky dari matriks A, maka didefinisikan *filled matrix* (**matriks fill**) dari A, dinotasikan dengan F(A), adalah matriks jumlahan $L + L^T$. Jadi F(A) atau $F = L + L^T$.

Graph yang berkaitan dengan matriks F ditulis $G^F = (X^F, E^F)$, dengan $X^F = X^A$. Hubungan antara E^F dan E^A dapat dilihat dalam lemma berikut ini.

Lemma 2.4.1

Pasangan $\{x_i,x_j\} \in E^F \Leftrightarrow \{x_i,x_j\} \in E^A$ atau $\{x_i,x_k\} \in E^F$ dan $\{x_k,x_j\} \in E^F$ untuk $k < \min\{x_i,x_j\}$.

Bukti :

$(\Rightarrow)$

Akan dibuktikan bahwa jika $\{x_i,x_j\} \in E^F$, maka $\{x_i,x_j\} \in E^A$ atau $\{x_i,x_k\} \in E^F$ dan $\{x_k,x_j\} \in E^F$.

Misal $\{x_i,x_j\} \in E^F$, maka ada kemungkinan :

1. $\{x_i,x_j\} \in E^\wedge$
2. $\{x_i,x_j\} \notin E^\wedge$

Misal 2) yang terjadi dan $i < j$.

Misal $k < i$. Elemen a_{ij} dari matriks A setelah pengeliminasian variabel x_k atau vertex ke-k adalah :

$$a_{ij}' = -(a_{ik} / a_{kk})a_{kj} + a_{ij}$$

Karena $\{x_i,x_j\} \notin E^\wedge$, $a_{ij} = 0$.

Karena $\{x_i,x_j\} \in E^F$, maka $a_{ij}' \neq 0$. Ini hanya mungkin terjadi jika $a_{ik} \neq 0$ atau $\{x_i,x_k\} \in E^\wedge$ dan $\{x_k,x_j\} \in E^F$. Akibatnya $\{x_i,x_k\} \in E^F$ dan $\{x_k,x_j\} \in E^F$.

($\Leftarrow$)

Akan dibuktikan bahwa jika $\{x_i,x_j\} \in E^\wedge$ atau $\{x_i,x_k\} \in E^F$ dan $\{x_k,x_j\} \in E^F$, maka $\{x_i,x_j\} \in E^F$.

i. Misalkan $\{x_i,x_j\} \in E^\wedge$, maka $\{x_i,x_j\} \in E^F$.

ii. Misalkan $\{x_i,x_j\} \in E^\wedge$ dan ada $k < \min\{i,j\}$ sedemikianhingga $\{x_i,x_k\} \in E^F$ dan $\{x_k,x_j\} \in E^F$.

Jika dieliminasi, mengakibatkan $\{x_i,x_j\} \in E^F$.

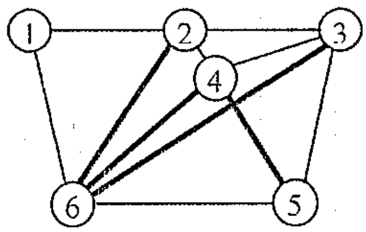
(terbukti)

Penyajian pengeliminasian graph memberikan gagasan bahwa langkah demi langkah dari proses eliminasi dapat diartikan sebagai urutan transformasi (perubahan bentuk) graph. Lebih dari itu, himpunan edge yang ditambahkan dalam eliminasi graph berkorespondensi dengan himpunan fill. Jadi, untuk contoh dalam Gambar 2.4.1, struktur dari graph fill G^F yang berkorespondensi dengan matriks $F = L + L^T$ diberikan dalam Gambar 2.4.2.

Gambar 2.4.2 Graph fill dan matriks dari contoh dalam Gambar 2.4.1.

$$\begin{bmatrix} * & * & & & & * \\ * & * & * & * & & \otimes \\ & * & * & \otimes & * & \otimes \\ & * & \otimes & * & \otimes & \otimes \\ & & * & \otimes & * & * \\ * & \otimes & \otimes & \otimes & * & * \end{bmatrix}$$

$F = L + L^T$



G^F

Dengan : • i = menyatakan elemen diagonal ; i = 1, 2, 3,..., 5.

• * = menyatakan elemen tidak nol.

• ⊗ = menyatakan elemen fill.

Terlihat bahwa graph fill G^F dapat mudah dibentuk dari urutan graph eliminasi. Pencarian G^F penting, sebab memuat struktur matriks L.