BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1. Ruang Vektor Atas Field Bilangan Riil (R)

Misalkan suatu himpunan V dan suatu field R, didefinisikan operasi penjumlahan terhadap elemen-elemen V dan perkalian elemen-elemen V dengan elemen R (disebut perkalian skalar). Maka V disebut ruang vektor di atas field R bila terpenuhi :

(1). Untuk setiap $u,v \in V$ dan $k \in R$ maka $u+v \in V$ dan $ku, kv \in V$ (Tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian saklar)

(2). Untuk setiap $u,v,w \in V$ maka $(u + v) + w = u + (v + w)$

(3). Untuk setiap $u,v \in V$ dan $k \in R$ maka $k(u + v) = ku + kv$

(4). Terdapat $0 \in V$ disebut vektor nol, sedemikian hingga untuk setiap $u \in V$ berlaku $0 + u = u + 0 = u$

(5). Untuk masing-masing $u \in V$ terdapat $-u \in V$ sedemikian sehingga $(-u) + u = u + (-u) = 0$

(6). Untuk setiap $u,v \in V$ maka $u + v = v + u$

(7). Untuk setiap $u \in V$ dan $k,l \in R$ berlaku $(k + l)u = ku + lu$

(8). Untuk setiap $u \in V$ dan $k,l \in R$ berlaku $(kl)u = k(lu)$

(9). Untuk setiap $u \in V$ berlaku $1u = u$, dimana 1 adalah elemen satuan dari R

Anggota-anggota dari suatu ruang vektor disebut vektor.

2.2. Subruang Vektor

Definisi 2.2.1.

Subhimpunan W dari sebuah ruang vektor V dinamakan subruang (*subspace*) V jika W itu sendiri adalah ruang vektor di bawah penambahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V.

Teorema 2.2.1.

Jika W adalah himpunan dari satu atau lebih vektor dari sebuah ruang vektor V, maka W adalah subruang dari V bila hanya bila kondisi-kondisi berikut berlaku:

(a). Jika u dan v adalah vektor-vektor pada W, maka u + v terletak di W.

(b). Jika k adalah sebarang skalar dan u adalah sebarang vektor pada W, maka ku berada di W.

Bukti.

Kondisi (a) dan (b) sering dijelaskan dengan menyatakan bahwa W tertutup dibawah penambahan dan perkalian skalar. Jika W adalah subruang dari V, maka semua aksioma ruang vektor dipenuhi khusunya aksioma 1 berlaku. Sebaliknya, anggap kondisi (a) dan kondisi (b) berlaku. Karena kondisi ini adalah aksioma 1 untuk ruang vektor, maka hanya perlu memperlihatkan bahwa W memenuhi aksioma-aksioma selebihnya. Aksioma 2,3,6,7,8, dan 9 secara otomatis terpenuhi oleh vektor pada V. Maka untuk melengkapi bukti tersebut, kita hanya perlu membuktikan bahwa aksioma 4 dan 5 dipenuhi oleh W. Misalkan u sebarang vektor pada W. Menurut kondisi (b) maka ku berada di W untuk setiap skalar k. Dengan membuat skalar k = 0 maka jelaslah bahwa 0u = 0 berada di W dan dengan membuat k = -1 maka jelaslah bahwa (-1)u = -u berada di W.

Setiap ruang vektor pada V mempunyai paling sedikit dua subruang. V sendiri adalah sebuah subruang dan himpunan {0} yang terdiri dari vektor nol saja pada V yang merupakan sebuah subruang yang dinamakan subruang nol (*zero subspace*).

Definisi 2.2.2.

Sebuah vektor w dinamakan kombinasi linier dari vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_r$ jika vektor tersebut dapat di ungkapkan dalam bentuk:

$$w = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots.+ k_rv_r$$

dimana $k_1, k_2, \ldots.., k_r$ adalah skalar.

Conto 2.2.1.

Misal vektor-vektor u = (1,2,-1) dan v = (6,4,2) di R^3. Dapat ditunjukkan bahwa w = (9,2,7) merupakan kombinasi linier u dan v. Supaya merupakan kombinasi linier u dan v, harus ada skalar k_1 dan k_2 sehingga $w = k_1u + k_2v$, yaitu:

$$(9,2,7) = k_1(1,2,-1) + k_2(6,4,2)$$

$$(9,2,7) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 +4k_2, -k_1 + 2k_2).$$

Penyamaan komponen-komponen yang bersesuaian memberikan

$$k_1 \quad + 6k_2 = 9$$

$$2k_1 + 4k_2 = 2$$

$$-k_1 \quad + 2k_2 = 7$$

dengan memecahkan sistem ini akan menghasilkan $k_1 = -3$ dan $k_2 = 2$ sehingga

$$w = -3u + 2v.$$

Definisi 2.2.3.

Jika $v_1, v_2, \ldots, v_r$ adalah vektor-vektor pada ruang vektor V dan jika masing-masing vektor pada V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $v_1, v_2, \ldots, v_r$ maka dikatakan bahwa vektor-vektor ini merentang V.

Contoh 2.2.2.

Vektor vektor i = (1,0,0), j = (0,1,0) dan k = (0,0,1) merentang R^3 karena setiap vektor (a,b,c) pada R^3 dapat ditulis sebagai:

$$(a,b,c) = ai + bj + ck$$

yang merupakan kombinasi linier i, jdan k.

Teorema 2.2.2.

Jika $v_1, v_2, \ldots, v_r$ adalah vektor-vektor terentang pada ruang vektor V maka:

(a). Himpunan W dari semua kombinasi linier $v_1, v_2, \ldots, v_r$ adalah subruang V.

(b). W adalah subruang terkecil dari V yang mengandung $v_1, v_2, \ldots, v_r$ dalam arti bahwa setiap subruang lain dari V yang mengandung $v_1, v_2, \ldots, v_r$ harus mengandung W.

Bukti.

(a). Untuk memperlihatkan bahwa W adalah subruang V harus dibuktikan bahwa W tertutup dibawah penambahan dan perkalian skalar. Jika u dan v adalah vektor-vektor pada W maka

$$u = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_rv_r$$

dan

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r$$

dimana $c_1, c_2, \ldots, c_r, k_1, k_2, \ldots, k_r$ adalah skalar. Maka

$$u + v = (c_1 + k_1)v_1 + (c_2 + k_2)v_2 + \ldots.. + (c_r + k_r)v_r$$

dan untuk sembarang skalar k,

$$ku = (kc_1)v_1 + (kc_2)v_2 + \ldots.. + (kc_r)v_r$$

Jadi u + v dan ku adalah kombinasi-kombinasi linier $v_1, v_2, \ldots, v_r$ dan sebagai konsekuensinya maka u + v dan ku terletak di W. Sehingga W tertutup dibawah penambahan dan perkalian skalar.

(b). Untuk $W = \{ c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_rv_r \mid v_1, v_2, \ldots, v_r \in V, c_1, c_2, \ldots c_r \in R\}$, maka W direntang oleh $v_1, v_2, \ldots, v_r$.

Setiap vektor $v_i \in$ Wadalah kombinasi-kombinasi linier $v_1, v_2, \ldots, v_r$ karenanya dapat ditulis $v_i = 0\ v_1 + 0\ v_2 + \ldots + v_i + \ldots + 0\ v_r$, oleh karena itu subruang W mengandung setiap vektor $v_1, v_2, \ldots, v_r$. Misalkan ambil K adalah subruang lain yang mengandung $v_1, v_2, \ldots, v_r$. Karena K tertutup di bawah penambahan dan perkalian skalar, maka K harus mengandung semua kombinasi linier $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_rv_r$ dari $v_1, v_2, \ldots, v_r$. Jadi setiap vektor W termuat dalam K.

2.3. Kebebasan linier

Definisi 2.3.1.

Jika $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ adalah himpunan vektor maka persamaan vektor $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r = 0$ mempunyai paling sedikit satu pemecahan, yaitu $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, …., $k_r = 0$. Jika ini adalah satu-satunya pemecahan maka S dinamakan himpunan bebas linier (*linierly independent*). Jika ada pemecahan lain maka S dinamakan himpunan tak bebas linier (*linierly dependent*).

Contoh 2.3.1.

Himpunan vektor-vektor S = {v_1, v_2, v_3 } dimana v_1 = {2,-1,0,-3}, v_2 = {1,2,5,-1}, v_3 = {7,-1,5,8} adalah himpunan tak bebas linier karena $3v_1 + v_2 - v_3 = 0$.

Contoh 2.3.2.

Tinjaulah vektor-vektor i = {1,0,0), j = {0.1.0) dan k = {0,0,1) pada R^3. Persamaan vektor $k_1i + k_2j + k_3k = 0$ menjadi $k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = 0$ atau secara ekivalen menjadi $(k_1,k_2,k_3) = (0,0,0)$. Jadi $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, dan $k_3 = 0$ sehingga himpunan S ={i,j,k} bebas linier.

Teorema 2.3.1.

Jika r, (r > 1) vektor {v_1, v_2,……, v_r} bergantung linier maka paling sedikit terdapat satu vektor dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor selebihnya.

Bukti.

Karena {v_1, v_2,……, v_r} bergantung linier, paling sedikit satu diantara skalar-skalar {k_1, k_2, …., k_r} tidak nol, misalnya k_p sedemikian sehingga

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_pv_p + \ldots + k_rv_r = 0.$$

diperoleh

$$-k_pv_p = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r$$

dan karena $k_pv_p \neq 0$ diperoleh

$$v_p = -\frac{k_1}{k_p}v_1 - \frac{k_2}{k_p}v_2 - \ldots - \frac{k_r}{k_p}v_r$$

$$= -\lambda_1v_1 - \lambda_2v_2 - \ldots - \lambda_rv_r .$$

Jadi v_p kombinasi linier dari vektor selebihnya.

Teorema 2.3.2.

Jika satu diantara r vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ adalah kombinasi linier dari vektor selebihnya maka r vektor tersebut bergantung linier.

Bukti.

Misal v_p adalah kombinasi linier dari $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ maka

$$v_p = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r = 0.$$

Bila v_p pindah ruas, diperoleh

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_pv_p + \ldots + k_rv_r = 0.$$

Jelas tidak semua koefisien k nol karena $k_p = -1 \neq 0$, jadi r vektor tersebut bergantung linier.

Contoh 2.2.3.

Selidiki bahwa $v_1 = (2,1,2)$, $v_2 = (0,1,0)$ dan $v_3 = (2,0,2)$ bergantung linier. Berdasarkan teorema 2.3.2 diselidiki apakah salah satu diantara v_1,v_2,v_3 kombinasi vektor selebihnya. Misal

$$v_1 = k_1v_2 + k_2v_3$$

atau

$$(2,1,2) = k_1(0,1,0) + k_2(2,0,2)$$

atau

$$2 = 0k_1 + 2k_2$$

$$1 = k_1 + 0k_2$$

$$2 = 0k_1 + 2k_2$$

terpenuhi $k_1 = 1$ dan $k_2 = 2$, berarti v_1 kombinasi linier v_2 dan v_3. Sehingga $\{v_1,v_2,v_3\}$ bergantung linier.

Teorema 2.3.2. tidak menyatakan kalau salah satu diantara r vektor tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor selebihnya maka r vektor tersebut bebas linier.

Teorema 2.3.3.

Jika r vektor-vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ bebas linier dan $(r + 1)$ vektor-vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, u\}$ bergantung linier maka u adalah kombinasi linier dari $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$.

Bukti.

Karena $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, u\}$ bergantung linier, pada persamaan

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r + k_{r+1}u = 0$$

terdapat $k_i \neq 0$. Dalam hal ini haruslah $k_{r+1}u \neq 0$ karena bila tidak demikian terjadi kontradiksi yaitu $k_i \neq 0$ adalah diantara $i = 1,2,\ldots r$ yang mana

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r + 0u = 0$$

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r = 0$$

berakibat $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ bergantung linier. Maka bila $k_{r+1}u$ pindah ruas diperoleh

$$-k_{r+1}u = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r$$

$$u = -\frac{k_2}{k_{r+1}}v_1 - \frac{k_2}{k_{r+1}}v_2 - \ldots - \frac{k_r}{k_{r+1}}v_r$$

$$u = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \ldots + \lambda_rv_r.$$

Jadi u adalah kombinasi linier dari $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$.

2.4. Basis Dan Dimensi

Definisi 2.4.1.

Jika V adalah sebarang ruang vektor dan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ merupakan himpunan berhingga dari vektor-vektor pada V, maka S dinamakan basis untuk V jika:

(i). S bebas linier

(ii). S merentang V

Contoh 2.4.1.

Misalkan $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,9,0)$ dan $v_3 = (3,3,4)$

$S = \{v_1, v_2, v_3\}$ adalah basis untuk R^3.

Untuk memperlihatkan bahwa S merentang R^3 maka harus diperlihatkan bahwa sebarang vektor $b = (b_1,b_2,b_3)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier.

$$b = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$$

dari vektor–vektor pada S. Dengan menyatakan persamaan ini dalam komponen – komponennya maka akan memberikan

$$(b_1,b_2,b_3) = k_1(1,2,3) + k_2(2,9,0) + k_3(3,3,4)$$

atau

$$(b_1,b_2,b_3) = (k_1 + 2k_2 + 3k_3, 2k_1 + 9k_2 + 3k_3, k_1 + 4k_3)$$

atau

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= b_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= b_2 \qquad (2.1) \\ k_1 + 4k_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Jika untuk memperlihatkan bahwa S merentang V, maka harus diperlihatkan bahwa sistem diatas mempunyai pemecahan untuk semua pilihan $b = (b_1, b_2, b_3)$. Untuk membuktikan bahwa S bebas linier, harus diperlihatkan bahwa satu-satunya pemecahan dari

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0 \qquad (2.2)$$

adalah

$$k_1 = k_2 = k_2 = k_3 = 0.$$

Seperti sebelumnya jika (2.2) dinyatakan dalam komponen-komponennya maka pembuktian bebas linier akan direduksi menjadi pembuktian bahwa sistem tersebut homogen.

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= 0 \qquad (2.3) \\ k_1 + \quad\quad 4k_3 &= 0 \end{aligned}$$

hanya mempunyai pemecahan trivial. Sistem (2.1) dan (2.3) mempunyai matrik koefisien yang sama. Dapat secara serempak membuktikan bahwa S bebas linier dan merentang R^3 dengan memperlihatkan bahwa matrik koefisien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Pada sistem (2.1) dan (2.3) dapat dibalik, karena

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1.$$

Maka jelas bahwa A dapat dibalik sehingga S bebas linier dan merentang R^3. Jadi S adalah sebuah basis untuk R^3.

Definisi 2.4.2.

Sebuah ruang vektor tak nol V dinamakan berdimensi berhingga (*finite dimensional*) jika ruang vektor tersebut mengandung sebuah himpunan berhingga dari vektor-vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ yang membentuk sebuah basis. Jika tidak ada himpuman seperti itu maka V dinamakan berdimensi tak berhingga (*infinite dimensional*). Ruang vektor dianggap sebagai ruang vektor berdimensi berhingga walaupun ruang vektor tersebut tidak mempunyai himpunan bebas linier, sehingga basisnya tidak ada.

2.5. Ruang Inner Product

Sebuah *hasil kali dalam* (*inner product*) pada ruang vektor riil V adalah fungsi yang mengasosiasikan bilangan riil $\langle u, v\rangle$ dengan masing-masing pasangan vektor u dan v pada V sedemikian rupa sehingga aksioma-aksioma berikut dipenuhi untuk semua vektor u,v dan w di V dan juga untuk semua skalar k:

(1). $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$ (aksioma simetri)

(2). $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$ (aksioma penambahan)

(3). $\langle ku,v\rangle = k\langle u,v\rangle$ (aksioma kehomogenan)

(4). $\langle v,v\rangle \geq 0$ dan $\langle v,v\rangle = 0$ bila hanya bila $v = 0$ (aksioma kepositifan)

Sebuah ruang vektor riil dengan sebuah *hasil kali dalam* dinamakan *ruang hasil kali dalam riil* (*real product space*).

Contoh 2.5.1.

Jika u = ($u_1,u_2,\ldots,u_n$) dan v = ($v_1,v_2,\ldots,v_n$) adalah vektor-vektor pada R^n, maka rumus

$$\langle u,v\rangle = u \,.\, v = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$$

mendefinisikan $\langle u,v\rangle$ terhadap *hasil kali dalam* Euclidis pada R^n.

2.6. Norma Dan Jarak Vektor

Dalam *ruang hasil kali dalam* Euclidis pada R^n akan dikembangkan mengenai norma (atau panjang) dan jarak vektor. Di R^2 panjang vektor u = (u_1,u_2) diberikan oleh

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

yang dapat ditulis dalam ruas-ruas hasil kali dalam titik sebagai

$$\|u\| = \sqrt{u.u} = (u.u)^{\frac{1}{2}}.$$

Dengan cara yang sama, jika u = (u_1,u_2,u_3) adalah vektor di R^3, maka

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{u.u} = (u.u)^{\frac{1}{2}}.$$

Dimotifasi hasil ini, dapat dibuat definisi berikut.

Definisi 2.6.1.

Jika V adalah sebuah *ruang hasil kali dalam* Euclidis pada R^n maka norma (atau panjang) vektor u dinyatakan oleh $\|u\|$ dan didefinisikan oleh

$$\|u\| = \langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Di R^2 jarak antara dua titik u = (u_1,u_2) dan v = (v_1,v_2) diberikan oleh

$$d(u,v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2} = \|u - v\|$$

dengan cara serupa, di R^2 jarak antara dua titik $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$ diberikan oleh

$$d(u,v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_n - v_n)^2} = \|u - v\|.$$

Dimotifasi oleh hasil ini, dibuat definisi berikut.

Definisi 2.6.2.

Jika V adalah sebuah *ruang hasil kali dalam* Euclidis pada R^n, maka jarak antara dua titik (vektor) u dan v dinyatakan oleh d (u,v) dan didefinisikan oleh $d(u,v) = \|u - v\|$.

Contoh 2.6.1.

Jika $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah vektor pada R^n dengan hasil kali dalam Euclidis, maka

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2} + \ldots + u_n^{\ 2}}$$

dan

$$d(u,v) = \|u - v\| = \langle u - v, u - v \rangle^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}.$$

Teorema 2.6.1.

(*Ketaksamaan Cauchy-Schwarz*). Jika u dan v adalah vektor pada sebuah *ruang hasil kali dalam*, maka $\langle u,v \rangle^2 \leq \langle u,u \rangle \langle v,v \rangle$.

Bukti.

Misal u dan v vektor di V dan skalar k, dengan aksioma kepositifan, kehomogenan dan simetri pada ruang inner product, didapat

$$0 \le \langle u + kv, u + kv\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,kv\rangle + \langle kv,u\rangle + \langle kv,kv\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + k\langle u,v\rangle + k\langle v,u\rangle + kk\langle v,v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + k\langle u,v\rangle + k\langle v,u\rangle + k^2\langle v,v\rangle$$

$$= \langle u,v\rangle + 2(k\langle u,v\rangle) + k^2\langle v,v\rangle.$$

Jika v = 0 maka $\langle u,v\rangle = \langle v,v\rangle = 0$, sehingga kesamaan sebelumnya terpenuhi. Kemudian anggap $v \neq 0$ dan ambil $k = -\langle u,v\rangle / \langle v,v\rangle$ sehingga

$$\langle u,u\rangle - 2\frac{\langle u,v\rangle^2}{\langle v,v\rangle} + \frac{\langle u,v\rangle^2}{\langle v,v\rangle} = \langle u,u\rangle - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\langle v,v\rangle} \ge 0$$

yang mana ekivalen dengan

$$\langle u,v\rangle^2 \le \langle u,u\rangle \langle v,v\rangle.$$

2.7. Basis Ortonormal

Definisi 2.7.1.

Dalam ruang hasil kali dalam dua vektor u dan v dinamakan ortogonal jika $\langle u,v\rangle = 0$. Selanjutnya jika u ortogonal setiap vektor pada himpunan W, maka dikatakan bahwa u ortogonal terhadap W.

Contoh 2.7.1.

Misalkan P_2 mempunyai hasil kali dalam

$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

dan misal p = x, q = x^2 maka

$$\langle u,v\rangle = \int_{-1}^{1} x(x^2)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{1}$$

$$= 0.$$

Karena ⟨p,q⟩ = 0 maka vektor-vektor p = x dan q = x^2 adalah ortogonal terhadap hasil kali dalam yang diberikan.

Teorema 2.7.1.

(*Teorema Pythagoras yang digeneralisasi*). Jika u dan v adalah vektor-vektor ortogonal pada ruang hasil kali dalam maka $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Bukti.

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Definisi 2.7.2.

Sebuah himpunan vektor pada ruang hasil kali dalam dinamakan himpunan ortogonal jika semua pasangan vektor-vektor yang berbeda dalam himpunan tersebut ortogonal. Sebuah himpunan ortogonal yang setiap vektornya mempunyai norma 1 dinamakan ortonormal.

Contoh 2.7.2.

Misal $v_1 = (0,1,0)$, $v_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})$, $v_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$. Himpunan $S = \{v_1,v_2,v_3\}$ ortonormal jika R^3 mempunyai hasil kali dalam Euclidis, karena

$$\langle v_1,v_2\rangle = \langle v_1,v_3\rangle = \langle v_2,v_3\rangle = 0$$

dan $\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 1$

Jika v adalah vektor tak nol pada ruang hasil kali dalam maka $\frac{1}{\|v\|}v$ mempunyai norma 1, karena $\left\|\frac{1}{\|v\|}v\right\| = \frac{1}{\|v\|}\|v\| = 1$.

Proses pengalian vektor tak nol ini dengan kebalikan panjangnya untuk mendapatkan vektor yang normanya 1 dinamakan menormalisasikan v. Himpunan ortogonal dari vektor tak nol selalu dapat dikonversikan terhadap himpunan ortonormal dengan menormalisasikan vektornya masing-masing.

Contoh 2.7.3.

Himpunan vektor $S = \{u_1,u_2,u_3\}$ dimana $u_1 = (0,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (1,0,-1)$ adalah ortogonal karena $\langle u_1,u_2\rangle = \langle u_1,u_3\rangle = \langle u_2,u_3\rangle = 0$. Karena $\|u_1\| = 1$, $\|u_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dan $\|u_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, dengan menormalisasikan masing-masing vektornya akan menghasilkan himpunan ortonormal pada contoh 2.7.2.

Teorema 2.7.2.

Jika $S = \{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ adalah basis ortonormal untuk ruang hasil kali dalam V dan u adalah sebarang vektor dalam V maka

$$u = \langle u,v_1\rangle v_1 + \langle u,v_2\rangle v_2 + \ldots.. + \langle u,u_n\rangle v_n.$$

Bukti.

Karena $S = \{v_1,v_2,\ldots..,v_n\}$ adalah basis maka vektor u dapat dinyatakan dalam bentuk

$$u = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots.. + k_nv_n$$

akan dilengkapi bukti tersebut dengan memperlihatkan bahwa $k_i = \langle u,v_i\rangle$ untuk $i = 1,2,\ldots,n$. Untuk setiap vektor v_i dalam S diperleh

$$\langle u,v_i\rangle = \langle k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots.. + k_nv_n,v_i\rangle$$

$$= k_1\langle v_1,v_i\rangle + k_2\langle v_2,v_i\rangle + \ldots.. + k_i\langle v_i,v_i\rangle + \ldots.. + k_n\langle v_n,v_i\rangle.$$

Karena $S = \{v_1,v_2,\ldots..,v_n\}$ adalah himpunan ortonormal maka diperoleh $\langle v_i,v_i\rangle = \|v_i\|^2 = 1$ dan $\langle v_i,v_j\rangle = 0$ jika $i \neq j$ maka persamaan diatas dapat disederhanakan menjadi $\langle u,v_i\rangle = k_i$.

Contoh 2.7.4.

Misalkan $v_1 = (0,1,0)$, $v_2 = (-\frac{4}{5},0,\frac{3}{5})$, $v_3 = (\frac{3}{5},0,\frac{4}{5})$ mudah untuk memeriksa bahwa $S = \{v_1,v_2,v_3\}$ adalah basis ortonormal untuk R^3 dengan hasil kali dalam Euclidis. Untuk vektor $u = (1,1,1)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier vektor-vektor S. Dari *hasil kali dalam*

$$\langle u,v_1\rangle = 1,\ \langle u,v_1\rangle = -\tfrac{1}{5},\ \langle u,v_1\rangle = \tfrac{7}{5}$$

sehingga menurut teorema 2.7.2

$$u = v_1 - \tfrac{1}{5}v_2 + \tfrac{7}{5}v_3$$

yaitu : $(1,1,1) = (0,0,0) - \frac{1}{5}(\frac{4}{5},0,\frac{3}{5}) + \frac{7}{5}(\frac{3}{5},0,\frac{4}{5})$.

2.8. Sifat Fungsi Terukur

Misal M subhimpunan X dan f adalah fungsi riil yang didefinisikan pada X, f terukur jika terdapat bilangan riil λ sedemikian sehingga

$$\{x \in X : f(x) > \lambda\} = \{f > \lambda\} \in M$$

Teorema 2.8.1.

Andaikan M subhimpunan X dan misal f fungsi riil yang didefinisikan pada X. Maka pernyataan berikut adalah ekivalen:

(i) f adalah terukur

(ii) untuk bilangan riil λ, $\{f \geq \lambda\} \in M$

(iii) untuk bilangan riil λ, $\{f < \lambda\} \in M$

(iv) untuk bilangan riil λ, $\{f \leq \lambda\} \in M$.

Bukti.

(i) $\rightarrow$ (ii). Ambil λ dan $n \geq 1$ misal $A_n = \{f > \lambda - \frac{1}{n}\}$ dengan $A_n \in M$ untuk semua n, sehingga $\{f \geq \lambda\}$ adalah interseksi dari A_n dan juga anggota M jadi (ii) terpenuhi.

(ii) $\rightarrow$ (iii). $\{f < \lambda\} = X \setminus \{f \geq \lambda\}$

(iii) $\rightarrow$ (iv). $\{f \leq \lambda\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f < \lambda + \frac{1}{n}\}$

(iv) $\rightarrow$ (i). $\{f > \lambda\} = X \setminus \{f \leq \lambda\}$.

Dari teorema diatas didapatkan:

$$\{f = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > n\}, \{f = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f < -n\}$$

$$\{f < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f < n\}, \{f > -\infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f > -n\}$$

$$\{-\infty < f < \infty\} = \{f > -\infty\} \cap \{f < \infty\}.$$

Untuk bilangan riil λ, μ didapatkan

$$\{\lambda < f < \mu\} = \{f > \lambda\} \cap \{f < \infty\}$$

$$\{\lambda < f \le \mu\} = \{f > \lambda\} \cap \{f \le -\infty\}$$

$$\{\lambda < f < \mu\} = \{f > \lambda\} \cap \{f < \mu\}$$

$$\{\lambda < f \le \mu\} = \{f > \lambda\} \cap \{f \le \mu\}$$

$$\{\lambda \le f < \mu\} = \{f \ge \lambda\} \cap \{f < \mu\}$$

$$\{\lambda \le f \le \mu\} = \{f \ge \lambda\} \cap \{f \le \mu\}$$

$$\{f = \lambda\} = \{f \le \lambda\} \cap \{f \ge \lambda\}$$

$$\{f \ne \lambda\} = X \setminus \{f = \lambda\}.$$

2.9. Fungsi Dalam L^2 (R)

Diberikan f fungsi terukur yang didefinisikan pada himpunan terukur $E \subset$ R. Fungsi f dikatakan terintegral kuadrat jika f^2 terintegral Lebesque pada E. Himpunan semua fungsi terukur yang terintegral kuadrat pada E dinotasikan dengan

$$L^2(E) = \left\{ f : \int_E |f|^2 \, du < \infty \right\}$$

dengan u ukuran Lebesque.

Jika $L^2(E)$ dilengkapi dengan inner product $\langle .,. \rangle$ dengan aturan untuk setiap $f,g \in L^2(E)$ didefinisikan

$$\langle f, g \rangle = \int_E f\, \overline{g}\, du$$

maka L_2 (E) merupakan ruang pre Hilbert. Lebih lanjut terhadap norma $\|.\|$ dengan aturan jika $f \in L^2(E)$ didefinisikan

$$\|f\| = \left\{ \int_E |f|^2\, du \right\}^{\frac{1}{2}}$$

maka L^2 (E) merupakan ruang Hilbert. Jika diambil E = R maka diperoleh ruang Hilbert L^2 (R).

Definisi 2.9.1.

Himpunan fungsi $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ dikatakan merentang ruang vektor V jika fungsi dalam V dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Jika diambil subruang dari ruang fungsi L^2 (R), dan merentang di L^2 (R). Fungsi-fungsi $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ adalah subruang dari L^2 (R) didefinisikan

$$\{f \in L^2(R) : f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)\}$$

dimana

$\{f_i(x)\}$ adalah basis L^2 (R)

$\{a_i\}$ adalah konstanta.

2.10. Himpunan Ortonormal

Dari definisi 2.7.1 untuk elemen x_i, x_j dalam ruang inner product X dikatakan ortogonal dan ditulis $x_i \perp x_j$ jika $\langle x_i, x_j \rangle = 0$. Jika $x \in X$ ortogonal untuk setiap elemen dari subhimpunan A dari X maka x dikatakan ortogonal ke A dan ditulis $x \perp A$. Kemudian untuk x_i yang mempunyai norma 1 dan untuk $x_i \perp x_j$ dimana $i \neq j$ dikatakan membentuk sistem ortonormal (ONS).

Selanjutnya diberikan ruang Hilbert X dan subhimpunan Y, untuk $Y = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ himpunan ortonormal. Ambil $x \in X$ sehingga x dapat direntang oleh $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dan dinyatakan dengan

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| \text{ ; } \lambda_I \text{ skalar.}$$

Karena Y adalah basis maka Y bebas linier dan didapat

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$$

mempunyai paling sedikit satu pemecahan yaitu

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Misal x_i salah satu basis, maka

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n , x_i \rangle = 0$$

$$\lambda_1 \langle x_1, x_i \rangle + \lambda_2 \langle x_2, x_i \rangle + \ldots + \lambda_i \langle x_i, x_i \rangle + \ldots + \lambda_n \langle x_n, x_i \rangle = 0$$

$$\lambda_i \|x_i\| = 0 .$$

Karena $Y = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ himpunan ortonormal maka

$$\langle x_i, x_j \rangle = \|x_i\| = 1$$

sehingga $\lambda_i \|x_i\| = 0$ bila $\lambda_I = 0$.

Ambil sebarang $x_i \in \{X_i\}$ basis ortonormal didapat

$$\langle x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, x_k \rangle = 0, \qquad 1 \le k \le n$$

$$\langle x, x_k \rangle - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x_i, x_k \rangle = 0$$

$$\langle x,x_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x_i, x_k \rangle$$

$$= \lambda_1 \langle x_1,x_k \rangle + \lambda_2 \langle x_2,x_k \rangle + \ldots + \lambda_k \langle x_k,x_k \rangle + \ldots + \lambda_n \langle x_n,x_k \rangle$$

$$= \lambda_k \langle x_k,x_k \rangle$$

$$= \lambda_k \|x_k\|$$

$$= \lambda_k.$$

Nilai dari $\lambda_k = \langle x,x_k \rangle$ disebut koefisien Fourier dari x dengan $\{x_k\}$ ONS.

2.11. Variabel Random (Peubah Acak)

Hasil dari suatu percobaan yang dilakukan secara lengkap oleh suatu ruang sampel Ω dengan fungsi probabilitas P(.) pada peristiwanya dan dengan mengamati suatu $w \in \Omega$ yang dipilih berdasarkan P(.). Hal ini dapat menganalisis percobaan tersebut, akan tetapi dalam hal ini kita mengamati fungsi dari w yang disebut variabel random.

Definisi 2.11.1.

1. X disebut variabel random diskrit bila X variabel random yang hanya mendapat nilai berhingga atau banyaknya terbilang.

2. X disebut variabel random kontinu bila X variabel random yang mendapat nilai tak berhingga atau banyaknya tak terbilang.

Contoh 2.1.1.

1. Eksperimen melempar 3 mata uang sekali

Ω = {(MMM),(MMB),(MBM),(BMM),(MBB),(BMB),(BBM), (BBB)} untuk setiap $w \in \Omega$.

X = banyaknya sisi M dalam w

X (MMM) = 3

X (MMB) = X (MBM) = X (BMM) = 2

X (MBB) = X (BMB) = X (BBM) = 1

X (BBB) = 0.

Hasil percobaan menghasilkan variabel randomnya diskrit karena ruang hasilnya berhingga yaitu $R_x = \{0,1,2,3\}$.

2. Misal X variabel random yang menyatakan jarak tempuh perjalanan seseorang dalam 4 hari yang tidak melebihi 100 km. Maka X merupakan interval dari X = 0 sampai X = 100 dengan $A = \{0 \le X \le 100\}$.