BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.1.1:

Jika A adalah matriks nxn, maka vektor tak nol di dalam R^n dinamakan vektor eigen (*eigen vector*) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x; $Ax = \lambda x$, untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Contoh 2.1.1:

Vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 3$ karena $Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3x$

2.1.1. Nilai Eigen

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran nxn maka tulis kembali $Ax = \lambda x$ sebagai $Ax = \lambda Ix$.

Secara ekivalen $\lambda Ix - Ax = 0$

$$(\lambda I - A)x = 0 \qquad (2.1.1)$$

Diberikan

$$\det(\lambda I - A) = 0 \qquad (2.1.2)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, backup and preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

sehingga persamaan (2.1.1) mempunyai penyelesaian tidak nol dan skalar yang memenuhi persamaan tersebut merupakan nilai eigen dari A. Persamaan (2.1.2) dinamakan *persamaan karakteristik A*, sedangkan det (λI- A) yang merupakan polinom dalam λ disebut *polinom karakteristik* dari A.

Jika determinan (λI- A) dijabarkan, persamaan karakteristik menjadi:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{2n} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n = 0$$

Maka n akar-akar dari persamaan karakteristik disebut nilai-nilai eigen dari A atau disebut juga akar-akar karakteristik.

Contoh 2.1.2:

Cari nilai-nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Polinom karakteristik dari A adalah:

$$|\lambda I - A| = \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 3)(\lambda - 5) - 4(\lambda - 5)$$

$$= (\lambda^2 - 6\lambda + 9)(\lambda - 5) - 4\lambda + 20$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

$= \lambda^3 - 11\lambda^2 + 35\lambda - 25$

$= (\lambda - 1)(\lambda - 5)^2$

dan persamaan karakteristik dari A adalah:

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2 = 0$$

Penyelesaian persamaan karakteristik adalah

$\lambda = 1$ dan $\lambda = 5$ (merupakan nilai – nilai eigen dari A).

2.1.2. Vektor Eigen

Vektor eigen A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vektor taknol x yang memenuhi $Ax = \lambda x$. Secara ekivalen, vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah vektor taknol dalam ruang penyelesaian dari $(\lambda I - A)x = 0$. Ruang penyelesaian ini disebut sebagai ruang eigen (*eigen space*) dari A yang bersesuaian dengan λ.

Contoh 2.1.3:

Cari vektor-vektor eigen dari:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Dari contoh 2.1.2. maka diperoleh nila-nilai eigen dari A adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 5$.

Akan ditentukan vektor-vektor eigen dari A.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

Misal $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen A yang bersesuaian dengan λ jika hanya jika

x adalah penyelesaian tak trivial dari $(\lambda I - A)x = 0$, yaitu dari

$$\begin{bmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

jika $\lambda = 5$ maka $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

sehingga diperoleh

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$2x_1 = -2x_2 \rightarrow x_1 = -x_2$$

Jawab dari persamaan ini merupakan ruang vektor berdimensi dua. Dalam bentuk vektor, yaitu :

$$(x_1,x_2,x_3) = (-x_2, x_2, x_3)$$

$$= x_2(-1,1,0) + x_3(0,0,1)$$

jadi, vektor-vektor $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor-vektor bebas linier, maka vektor-vektor tersebut adalah vektor eigen-vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$

jika $\lambda = 1$ maka $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

sehingga

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$-2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2$$

$$-4x_3 = 0$$

$$x_3 = 0$$

Jawab dari persamaan ini merupakan ruang vektor berdimensi satu. Dalam bentuk vektor, yaitu :

$$(x_1,x_2,x_3) = (x_2, x_2, 0)$$

$$= x_2 (1,1,0)$$

jadi vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2.2. Diagonalisasi

Definisi 2.2.1:

Matriks bujursangkar A dinamakan dapat didiagonalisasi (*diagonalizable*) jika terdapat matriks P yang mempunyai invers sehingga $P^{-1}AP$ diagonal; matriks P dikatakan mendiagonalisasi A.

Teorema 2.2.1:

A adalah matriks n x n.

A dapat didiagonalisasi jika hanya jika A mempunyai n vektor eigen bebas linier.

Bukti :

(a) $\Rightarrow$ (b)

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

Karena A dianggap dapat didiagonalisasi, maka terdapat matriks yang mempunyai invers.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Sehingga $P^{-1}AP$ diagonal, katakanlah $P^{-1}AP = D$, dimana

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Maka $AP = PD$, yakni:

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

Jika dimisalkan p_1 p_2, …, p_n menyatakan vektor-vektor kolom p, maka pada persamaan (2.2.1) kolom-kolom PD yang berurutan adalah $\lambda_1 p_1$, $\lambda_2 p_2$, …, $\lambda_n p_n$. Sedangkan kolom-kolom AP yang berurutan adalah Ap_1, Ap_2,…,Ap_n.

Sehingga

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1,\ Ap_2 = \lambda_2 p_2, \ldots, Ap_n = \lambda_n p_n. \quad (2.2.2)$$

Karena P mempunyai invers, maka vektor-vektor kolomnya semuanya tidak nol. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai eigen dari A, dan p_1 p_2, …, p_n adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian. Jadi diperoleh p_1 p_2, …, p_n; vektor eigen dari A yang bebas linier.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

(a)⇐(b)

A mempunyai vektor eigen bebas linier; p_1 p_2, …, p_n; yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Misalkan : $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$ adalah matriks yang vektor-vektor kolomnya

adalah p_1 p_2, …, p_n. Kolom-kolom hasil kali AP adalah $Ap_1, Ap_2, \ldots, Ap_n$, tetapi $Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, \ldots, Ap_n = \lambda_n p_n$, sehingga

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$AP = PD \qquad (2.2.3)$$

Dimana D adalah matriks diagonal yang mempunyai nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pada diagonal utama. Karena vektor-vektor kolom dari P bebas linier, maka P mempunyai invers. Jadi persamaan (2.2.3) dapat ditulis kembali sebagai $P^{-1}AP=D$.

Jadi A dapat didiagonalisasi. ■

Langkah-langkah mendiagonalkan matriks A yang berukuran n x n:

1. Mencari matriks n vektor eigen bebas linier dari matriks A, $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
2. Membentuk matriks P dengan $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sebagai kolom-kolomnya.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, backup and preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

3. Matriks $P^{-1}AP$ akan diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ sebagai entri-entri diagonalnya yang berurutan, dimana λ_i adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan p_i, i= 1,2,…,n.

Contoh 2.2.1:

Carilah matriks P yang mendiagonalkan :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Langkah 1. Mencari n vektor eigen.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 & -1 \\ -2 & \lambda & -1 \\ -2 & 2 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda\text{-}4)(\lambda\text{-}3)+4+4-2\lambda+4(\lambda\text{-}3)+2(\lambda\text{-}4)$$

$$= \lambda^3\text{-}7\lambda^2+12\lambda+8-2\lambda+4\lambda-12+2\lambda-8$$

$$= \lambda^3\text{-}7\lambda^2+16\lambda-12$$

$$= (\lambda\text{-}2)(\lambda\text{-}2)(\lambda\text{-}3)$$

Ada 2 nilai eigen dari A, yaitu λ=2 dan λ=3.

Misal $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ vektor eigen yang bersesuaian jika hanya jika x adalah

penyelesaian tak trivial dari $(\lambda I\text{-}A)x = 0$,

Untuk λ=2 maka $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, backup and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dapat disederhanakan menjadi satu persamaan

$$-2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

sehingga

$$x_1 = x_2 - \frac{1}{2}x_3$$

Jawab dari persamaan ini merupakan ruang vektor berdimensi 2.

Dalam bentuk vektor, yaitu :

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - \frac{1}{2}x_3, x_2, x_3)$$

$$= x_2(1,1,0) + x_3(-\frac{1}{2},0,1)$$

Jadi dua vektor eigen bebas linier, yaitu $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$

Untuk $\lambda = 3$ maka $\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\-2 & -3 & -1\\-2 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

Dapat disederhanakan menjadi :

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$-2x_1 + 2x_2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2$$

sehingga

$$x_3 = x_1 = x_2$$

vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$ adalah $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

Jadi vektor-vektor eigen adalah

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, backup and preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Langkah 2. Membentuk matriks P dengan kolom-kolomnya p_1, p_2, p_3.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Langkah 3. Menentukan matriks diagonal

Mencari P^{-1} dengan ekspansi kofaktor

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 2 - 0 - 2 + 1 = 1$$

$$p_{11} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 ; \quad p_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 ; \quad p_{31} = + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$p_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 ; \quad p_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 ; \quad p_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$p_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 ; \quad p_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 ; \quad p_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{Adj } P = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} \text{adj } P = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Didapat } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, backup and preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= \begin{bmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2.3. Polinomial Matriks nxn

Definisi 2.3.1:

Jika polinomial berhingga dari suatu skalar x

$\phi(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

maka polinomial

$\phi(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0$

dimana A matriks nxn, disebut suatu polinomial dalam A.

Teorema 2.3.1: (teorema Caley – Hamilton)

Misalkan A matriks nxn dengan persamaan karakteristik

$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n = 0$

maka matriks A memenuhi persamaan karakteristik atau

$A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I = 0$

Bukti:

Diketahui persamaan karakteristik

$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots \div \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n = 0$ (2.3.1)

Adjoin $(\lambda I - A)$ adalah polinomial dalam λ derajat n-1, yaitu

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\text{Adj } (\lambda I - A) = B_1 \lambda^{n-1} + B_2 \lambda^{n-2} + \cdots + B_{n-1}\lambda + B_n = 0 \qquad (2.3.2)$$

Dimana $B_1, B_2, \ldots, B_n$ adalah konstanta matriks nxn dan $B_1 = I$.

$(\lambda I - A)$ adj $(\lambda I - A) = [\text{adj } (\lambda I - A)] (\lambda I - A) = \det (\lambda I - A) I$

Dari persamaan (2.3.1) dan (2.3.2)

$$\det (\lambda I - A) I = I\lambda^n + \alpha_1 I\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} I\lambda + \alpha_n I$$

$$= (\lambda I - A) \text{ adj } (\lambda I - A)$$

$$= [\text{adj } (\lambda I - A)] (\lambda I - A)$$

$$= [B_1 \lambda^{n-1} + B_2 \lambda^{n-2} + \cdots + B_{n-1}\lambda + B_n](\lambda I - A)$$

Perkalian $(\lambda I - A)$ dan adj$(\lambda I - A)$ sama dengan nol jika salah satu diantaranya nol. Jika persamaan terakhir A disubstitusikan pada λ, maka $\lambda I - A$ menjadi nol. Sehingga

$$A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I = 0 \quad \blacksquare$$

2.4. Transformasi-z

Definisi 2.4.1:

Transformasi-z dari fungsi x (t) dimana $t \geq 0$ atau barisan nilai-nilai x(kT) atau x(k) dimana k = 0,1,2,…,n dan T periode cacah didefinisikan sebagai :

$$X(z) = Z[x(t)] = Z[x(kT)] = Z[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\; z^{-k}$$

(2.4.1)

dimana x(t) = 0 jika $t < 0$ dan x(kT) =x(k) =0 untuk $k<0$, z adalah variabel kompleks.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

contoh 2.4.1:

Tentukan transformasi z dari fungsi:

$$x(t) = \begin{cases} t & , 0 < t \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

Jawab:

$$Z[t] = \sum_{k=0}^{\infty} kT\, z^{-k}$$

$$= T\sum_{k=0}^{\infty} k\, z^{-k}$$

$$= T\,(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \ldots)$$

dengan menggunakan penderetan binomial diperoleh:

$$Z[t] = T\,\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

$$= \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

Contoh 2.4.2:

Tentukan transformasi z dari

$$X(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0 < t \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

jawab:

jika $x(kT) = e^{-akT}$, $k = 0,1,2,\ldots$

maka $X(z) = Z[e^{-at}]$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}\, z^{-k}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, backup and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \ldots$$

bila $|z| > e^{-at}$ maka dapat ditulis

$$= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

$$= \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

Sedangkan transformasi-z balik dari X(z) diperoleh sebagai jumlah transformasi-z balikan (invers) dari pecahan-pecahan parsial.

Contoh 2.4.3:

Tentukan x(kT) jika

$$X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$$

Jawab:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$$

$$= \frac{-10}{(z-1)} + \frac{10}{(z-2)}$$

$$x(z) = \frac{-10z}{z-1} + \frac{10z}{z-2}$$

Dengan melihat tabel diperoleh

$$z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right] = 1, z^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right] = 2^k$$

sehingga

$$x(kT) = 10(-1 + 2^k), k = 0,1,2,.....$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, backup and preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

Penyelesaian persamaan linier dengan transformasi-z digunakan notasi yang disederhanakan, yaitu x(k) untuk menyatakan x(kT).

Teorema 2.4.1:

Transformasi z dari x(k+1) diberikan oleh

$$Z[x(k+1)] = z\,X(z) - zx(0)$$

Bukti:

Akan dibuktikan

$$Z[x(k+1)] = z\,X(z) - zx(0) \qquad (2.4.2)$$

$X(z) = Z[x(t)] = Z[x(k+1)]$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k+1} \\ &= z\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - x(0)\right] \\ &= zX(z) - zx(0) \end{aligned}$$

(terbukti) ■

jika $x(0) = 0$ maka

$Z[x(k+1)] = zX(z)$

Persamaan (2.4.1) dapat dimodifikasi secara mudah untuk mendapatkan hubungan berikut:

$$Z[x(k+1)] = z\,Z[x(k+1)] - z\,x(1)$$

$$= z[z\,X(z) - z\,x(0)] - z\,x(1)$$

$$= z^2 X(z) - z^2 x(0) - z\,x(1)$$

jadi

$$Z[x(k+2)] = z^2 X(z) - z^2 x(0) - z\,x(1) \qquad (2.4.3)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, backup and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dengan cara yang sama diperoleh rumus untuk mendapatkan Z [x(k+m)], yaitu:

$$Z\,[x(k+m)] = z^m X(z) - z^m x(0) - z^{m-1} x(1) - z^{m-2} x(2) - \ldots - z\,x(m-1) \qquad (2.4.4)$$

Dimana m adlah integer positif.

2.5. Fungsi Alih

Definisi 2.5.1 :

Fungsi alih dari sistem waktu diskrit merupakan perbandingan antara transformasi-z keluaran terhadap transformasi-z masukan dengan asumsi semua syarat awal nol.

Matriks fungsi alih merupakan perluasan dari fungsi alih. Matriks fungsi alih waktu diskrit adalah perbandingan antara transformasi-z multi keluaran (*multiple output*) terhadap transformasi z multi masukkan (*multiple input*) dengan asumsi semua syarat awal nol. Untuk selanjutnya akan digunakan istilah fungsi alih saja.

Akan diturunkan fungsi alih dari sistem linier waktu diskrit invarian terhadap waktu disajikan oleh:

$$x(k+1) = G\,x(k) + Hu(k) \qquad (2.5.1)$$

$$y(k) = C\,x(k) + D\,u(k) \qquad (2.5.2)$$

dimana

x(k) = vektor keadaan (n-vektor)

u(k) = vektor kontrol masukkan (r- vektor)

y(k) = vektor keluaran (m-vektor)

G = matriks n x n

H = matriks n x r

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

C = matriks m x n

D = matriks m x r

Dengan menggunakan transformasi z, diperoleh

$$z\,X(z) - z\,x(0) = GX(z) + HU(z)$$

$$Y(z) = C\,X(z) + D\,U(z)$$

Diasumsikan x(0) = 0, maka

$$(zI - G)\,X(z) = HU(z)$$

$$X(z) = (zI - G)^{-1}\,HU(z)$$

Dan

$$Y(z) = C\,(zI - G)^{-1}HU(z) + DU(z)$$

$$= [C\,(zI - G)^{-1}H + D\,]\,U(z)$$

$$= G(z).\,U(z)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C\,(zI - G)^{-1}H + D \qquad (2.5.3)$$

Invers dari (zI – G) dapat dinyatakan sebagai

$$(zI - G)^{-1} = \frac{adj(zI - G)}{|zI - G|}$$

sehingga

$$G(z) = C\frac{adj(zI - G)}{|zI - G|}H + D$$

Jelas bahwa pole-pole G(z) adalah akar-akar dari $|zI - G| = 0$, yang berarti persamaan karakteristik waktu diskrit diberikan oleh $|zI - G| = 0$

Atau $z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$

Dimana a_i bergantung dari matriks G.

This document is Und... author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submissi... purpose of preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh 2.5.1.:

Tentukan fungsi alih untuk sistem yang diberikan oleh :

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

jawab:

Fungsi alih diberikan oleh:

$G(z) = C\,(zI - G)^{-1}H + D$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1 \\ 2 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{z+1}{z^2+z+2} & \dfrac{1}{z^2+z+2} \\ \dfrac{-2}{z^2+z+2} & \dfrac{z}{z^2+z+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1+z}{z^2+z+2} \\ \dfrac{z}{z^2+z+2} \end{bmatrix}$$

Kestabilan suatu sistem dapat diuji dari nilai eigen-eigen pada matriks keadaan sistem.

Pandang persamaan sistem (2.5.1) dan (2.5.2)

$$x(k+1) = G\,x(k) + Hu(k)$$

$$y(k) = C\,x(k) + D\,u(k)$$

Akan disajikan kestabilan sistem dari definisi berikut:

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Definisi 2.5.2:

Spektrum dari matriks G adalah himpunan dari semua nilai eigen dari G, dengan notasi σ(G).

Definisi 2.5.3:(Barnet, 1985)

Sistem (2.5.1) disebut stabil asismtotik jika dan hanya jika $|\lambda_i| < 1, \forall \lambda_i \in \sigma(G)$, sebaliknya sistem (2.5.1) disebut tidak stabil murni jika hanya jika $|\lambda_i| > 1, \forall \lambda_i \in \sigma(G)$ dan disebut tidak stabil jika terdapat $|\lambda_i| > 1$, untuk suatu $\lambda_i \in \sigma(G)$.

Catatan. Sistem (2.5.1) disebut stabil jika hanya jika $|\lambda_i| \leq 1, \ \forall \lambda_i \in \sigma(G)$.(Brogan, W,. 1991)

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)