BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 Vektor

Vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah.

Definisi 2.1.1 : Jika x dan y dua vektor di R^n dimana $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ dan $y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ maka bentuk $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$ dinamakan perkalian dalam (inner product) dari x dan y dan dinyatakan dengan x.y.

Definisi 2.1.2 : Jika x adalah sebuah vektor didalam R^n, maka panjang vektor x ditunjukkan oleh $\|x\|$, yang merupakan akar kuadrat dari hasil kali dalam vektor x dan x, jadi :

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

dengan $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$

2.1.1 Ruang Vektor Linier

Definisi 2.1.3 : S dinamakan ruang vektor jika S adalah himpunan vektor yang tidak kosong dan memenuhi aksioma - aksioma berikut :

1. Untuk semua $x \in S$, $y \in S$ ada satu dan hanya satu $z \in S$ dimana $z = x + y$
2. $x + y = y + x$ untuk $x, y \in S$
3. $(x + y) + z = x + (y + z)$ untuk semua $x, y, z \in S$

4. Ada satu dan hanya satu $0 \in S$ sedemikian sehingga $x + 0 = x$ untuk setiap $x \in S$
5. Untuk setiap $x \in S$ ada satu dan hanya satu $y \in S$ sehingga $x + y = 0$
6. Untuk setiap $x \in S$, $\alpha \in R$ ada satu dan hanya satu $\alpha x \in S$
7. $1.x = x$ untuk setiap $x \in S$
8. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, untuk setiap $x \in S$ dan $\alpha, \beta \in R$
9. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ untuk setiap $x \in S$ dan $\alpha, \beta \in R$
10. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ untuk setiap $x, y \in S$ dan $\alpha \in R$

2.1.2 Kombinasi Linier

Definisi 2.1.4 : Jika $x_1, x_2, \ldots x_n$ adalah vektor – vektor di R^n maka vektor $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ dinamakan kombinasi linier dari $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Definisi 2.1.5 : Kumpulan $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tak bebas linier jika terdapat skalar $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$. Kumpulan $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dikatakan bebas linier jika $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ hanya dipenuhi oleh $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$

2.1.3 Basis

Definisi 2.1.6 : $V \subset S$ dikatakan membangun S, jika setiap vektor $x \in S$ dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor di V.

Definisi 2.1.7 : Misalkan S ruang vektor dan $V \subset S$, maka V dinamakan basis dari S, jika :

(i) V kumpulan bebas linier

(ii) V membangun S

2.1.4 Ruang Bagian dari R^n

Definisi 2.1.8 : Jika $S = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_s\}$ adalah suatu himpunan vektor yang berasal dari R^n, maka ruang bagian yang direntang oleh himpunan S didefinisikan sebagai :

$$\text{REN}\{u_1, \ldots, u_s\} = \left\{ \sum_{k=1}^{s} \alpha_k u_k , \alpha_k \text{ bilangan riil} \right\}$$

atau ruang bagian itu terdiri dari semua kemungkinan kombinasi linier vektor - vektor dalam himpunan S.

Definisi 2.1.9 : Dua vektor v dan u di dalam R^n dikatakan ortogonal jika $u.v = 0$. Suatu himpunan vektor-vektor $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ di dalam R^n dikatakan saling ortogonal jika vektor-vektor itu ortogonal sepasang-sepasang dengan kata lain $u_i . u_j = 0$ jika $i \neq j$. Sedangkan jika vektor-vektor di dalam himpunan S yang saling ortogonal itu semuanya vektor satuan, maka kita namakan himpunan itu ortonormal dengan kata lain $u_i . u_j = 0$ jika $i \neq j$ dan $u_i . u_i = 1$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, k$. Himpunan ortonormal yang juga membentuk suatu basis bagi R^n dinamakan basis ortonormal bagi R^n.

2.2 Ortogonalitas Gram - Schmidt

Misalkan u_1, u_2 adalah basis dari ruang bagian U. Basis yang saling ortogonal dari U dicari dengan cara sebagai berikut :

Vektor pertama dari basis ortogonal dapat diambil dari vektor pertama basis yang diketahui, yaitu :

$$w_1 = u_1$$

kemudian dicari vektor w_2 di U yang tegak lurus terhadap w_1. Karena vektor w_2 harus terletak di U maka vektor tersebut haruslah dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari u_1 dan u_2.

$$w_2 = u_2 + s w_1$$

Kita hanya memakai satu parameter karena hanya ada satu syarat untuk menentukan w_2 yaitu :

$w_2 . w_1 = 0$ atau $u_2 . w_1 + s(w_1 . w_1) = 0$

dengan demikian

$s = -\dfrac{u_2 . w_1}{w_1 . w_1}$ atau

$$w_2 = u_2 - \frac{u_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} \cdot w_1$$

Selanjutnya untuk ruang bagian U yang dibangun oleh 3 vektor u_1, u_2, u_3.

Ambil $w_3 = u_3 + s_1 w_2 + s_2 w_1$

Karena w_1, w_2 dan w_3 harus saling ortogonal maka

$w_1 \cdot w_3 = w_1 \cdot u_3 + s_1 w_1 \cdot w_2 + s_2 w_1 \cdot w_1 = w_1 \cdot u_3 + s_2 w_1 \cdot w_1 = 0$

dan

$w_2 \cdot w_3 = w_2 \cdot u_3 + s_1 w_2 \cdot w_2 + s_2 w_2 \cdot w_1 = w_2 \cdot u_3 + s_1 w_2 \cdot w_2 = 0$

sehingga diperoleh $s_1 = -\dfrac{w_2 \cdot u_3}{w_2 \cdot w_2}$, $s_2 = -\dfrac{w_1 \cdot u_3}{w_1 \cdot w_1}$

jadi $w_3 = u_3 - \dfrac{w_2 \cdot u_3}{w_2 \cdot w_2} w_2 - \dfrac{w_1 \cdot u_3}{w_1 \cdot w_1} w_1$

sehingga untuk langkah-langkah yang sama didapatkan

$$w_i = u_i - \frac{u_i \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} \cdot w_1 - \dots - \frac{u_i \cdot w_{i-1}}{w_{i-1} \cdot w_{i-1}} \cdot w_{i-1}$$

$i = 1, 2, 3, \dots , k$

Kalau didefinisikan $\dfrac{w_i}{\|w_i\|} = v_i$ ($i = 1, 2, 3 \dots , k$)

maka v_i adalah vektor-vektor satuan yang saling ortogonal dan juga merupakan basis ortonormal dari R^n.

2.3 Matrik

Definisi 2.3.1 :Matrik adalah kumpulan unsur - unsur yang disusun menurut baris dan kolom (yang berbentuk persegi panjang) dan dibatasi oleh 2 kurung besar.

contoh : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{(2\times2)}$

Definisi 2.3.2 : Sebuah matrik bujur sangkar A berordo nxn disebut mempunyai invers bila ada suatu matrik B sedemikian sehingga $AB = BA = I_n$

2.3.1 Invers dengan partisi

Untuk mencari invers suatu matrik dengan partisi adalah sebagai berikut :

Misalkan suatu matrik $A = (a_{ij})$ dengan ordo nxn diberikan dalam bentuk matrik partisi yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} \underset{p\times p}{A_{11}} & \underset{p\times q}{A_{12}} \\ \underset{q\times p}{A_{21}} & \underset{q\times q}{A_{22}} \end{bmatrix} \text{ dengan inversnya } B = \begin{bmatrix} \underset{p\times p}{B_{11}} & \underset{p\times q}{B_{12}} \\ \underset{q\times p}{B_{21}} & \underset{q\times q}{B_{22}} \end{bmatrix}$$

karena $AB = BA = I_n$, sehingga didapatkan :

$$B_{11}A_{11} + B_{12}A_{21} = I_p \qquad B_{11}A_{12} + B_{12}A_{22} = 0$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = 0 \qquad A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = I_q$$

misal $B_{11} = Z^{-1}$, diperoleh :

$$B_{12} = -\ Z^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$$

$$B_{21} = -\ A_{22}^{-1}A_{21}Z^{-1}$$

$$B_{22} = A_{22}^{-1}(I_q - A_{21}B_{12})$$

Sehingga invers dari A adalah :

$$\begin{bmatrix} Z^{-1} & -Z^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}Z^{-1} & A_{22}^{-1}(I_q - A_{21}B_{12}) \end{bmatrix}$$

Dari $B_{11}A_{11} + B_{12}A_{21} = I_p$, maka :

$$Z^{-1}A_{11} - Z^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\ A_{21} = I_p$$

$$Z^{-1}\ (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}\ A_{21}) = I_p$$

$$Z^{-1} = I_p\ (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}\ A_{21})^{-1}$$

$$= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}\ A_{21})^{-1}$$

Definisi 2.3.3 :Sebuah matrik A adalah definit positif jika matrik tersebut adalah simetris dan memenuhi :

$Q = x'Ax > 0$, untuk $x \neq 0$

Definisi 2.3.4 :Sebuah matrik A adalah definit nonnegatif jika matrik tersebut adalah simetris dan memenuhi :

$Q = x'Ax \geq 0$, untuk semua x

Teorema 2.3.1 :Jika matrik A adalah definit positif maka P'AP adalah definit nonnegatif untuk semua P. Jika P adalah matrik kuadrat dan mempunyai rank penuh maka P'AP adalah definit positif.

Bukti : dari $x'P'APx = y'Ay$ dimana $y = Px$ maka $x'P'APx \geq 0$, untuk semua x. Jika P adalah bentuk kuadrat dan mempunyai rank penuh, maka $y = 0$ hanya jika $x = 0$. Sehingga $x'P'APx > 0$ untuk $x \neq 0$.

Teorema 2.3.2 :Untuk sembarang marik P, $P'P \geq 0$

Bukti : Menggunakan teorema 2.3.1 dengan A = I atau matrik A sama dengan matrik identitas

2.4 Model Linier

2.4.1 Model regresi linier berganda

Suatu model regresi yang mencakup lebih dari satu variabel bebas disebut model regresi berganda.

Definisi 2.4.1 :Secara umum model regresi linier berganda dengan variabel tak bebas y dapat dihubungkan pada k variabel bebas (x_1, x_2, ..., x_k), yaitu :

$$y = \alpha_o + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k + u$$

dimana $u \infty NID(0, \sigma_u^2)$ dengan α_i (i = 1, 2 ..., k) disebut koefisien regresi.

2.4.2 Estimasi Koefisien Regresi linier Berganda

Model umum regresi linier berganda adalah :

$$y = \alpha_o + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k + u$$

Model regresi untuk setiap vektor pengamatan (misal pengamatan ke-i) adalah :

$y_i = \alpha_o + \alpha_1 x_{1i} + \alpha_2 x_{2i} + \ldots + \alpha_k x_{ki} + u_i$

Model ini dapat ditulis dalam bentuk matrik sebagai berikut :

$$y = X\alpha + u$$

dimana:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}, \; y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \; \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_o \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

dan $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ dengan $k+1 = p$

dengan menggunakan metode kuadrat terkecil biasa (OLS):

$$L = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = u'u = (y - X\alpha)'(y - X\alpha)$$

$$= y'y - \alpha'X'y - y'X\alpha + \alpha'X'X\alpha$$

$$= y'y - 2\alpha'X'y + \alpha'X'X\alpha$$

karena $\alpha'X'y$ adalah sebuah matrik (1x1) atau sebuah matrik skalar, dan transpose $\alpha'X'y$ atau $(\alpha'X'y)' = y'X\alpha$ adalah skalar yang sama. Estimator - estimator kuadrat terkecil tersebut harus memenuhi :

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right|_{\hat{\alpha}} = -2X'y + 2X'X\hat{\alpha} = 0$$

$$X'X\hat{\alpha} = X'y$$

$$\hat{\alpha} = (X'X)^{-1}X'y \qquad \text{(OLSE)}$$

Theorema 2.4.1 :(Gauss - Markov)

Didalam model linier klasik :

$y = X\alpha + u$

dimana $u \infty (0, \sigma^2 I)$

OLSE $\hat{\alpha}$ dengan matrik variansi $V(\hat{\alpha}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$ adalah estimator tak bias linier yang terbaik (BLUE) dari α.

Bukti :

$$\begin{aligned}
V(\hat{\alpha}) &= E(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\alpha} - \alpha)' \\
&= E((X'X)^{-1}X'y - \alpha)((X'X)^{-1}X'y - \alpha)' \\
&= E((X'X)^{-1}X'(X\alpha + u) - \alpha)((X'X)^{-1}X'(X\alpha + u) - \alpha)' \\
&= E((X'X)^{-1}X'u)((X'X)^{-1}X'u)' \\
&= E((X'X)^{-1}X'u)(u'X(X'X)^{-1}) \\
&= (X'X)^{-1}X'E(uu')X(X'X)^{-1} \\
&= (X'X)^{-1}X'\sigma^2 IX(X'X)^{-1} \\
&= \sigma^2(X'X)^{-1}
\end{aligned}$$

a. Tak bias

$$\begin{aligned}
E(\hat{\alpha}) &= E((X'X)^{-1}X'y) \\
&= E((X'X)^{-1}X'(X\alpha + u)) \\
&= \alpha + (X'X)^{-1}X'E(u) \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

b. Variansi minimum

Akan diperlihatkan bahwa diantara estimator - estimator linier tak bias (misal α^*) selain estimator $\hat{\alpha}$(OLSE), estimator $\hat{\alpha}$ mempunyai varian terkecil. atau :

$$V(\hat{\alpha}) \leq V(\alpha^*)$$

Misal $\alpha^* = ((X'X)^{-1}X' + D)\, y$

dimana D adalah matrik konstan berukuran (pxn).

Agar α^* merupakan estimator tak bias maka :

$$
\begin{aligned}
E(\alpha^*) &= E((X'X)^{-1}X' + D)\, y \\
&= E((X'X)^{-1}X' + D)(X\alpha + u)) \\
&= (X'X)^{-1}X'X\alpha + (X'X)^{-1}X'E(u) + DX\alpha + DE(u) \\
&= \alpha + DX\alpha \\
&= \alpha
\end{aligned}
$$

jika dan hanya jika $DX = 0$

$$
\begin{aligned}
V(\alpha^*) &= E(\alpha^* - \alpha)(\alpha^* - \alpha)' \\
(\alpha^* - \alpha) &= ((X'X)^{-1}X' + D)y - \alpha \\
&= ((X'X)^{-1}X' + D)(X\alpha + u)) - \alpha \\
&= (X'X)^{-1}X'X\alpha + (X'X)^{-1}X'(u) + DX\alpha + Du - \alpha \\
&= \alpha + (X'X)^{-1}X'u + DX\alpha + Du - \alpha \\
&= (X'X)^{-1}X'u + D(X\alpha + u) \\
V(\alpha^*) &= E((X'X)^{-1}X'u + D(X\alpha+u))((X'X)^{-1}X'u + D(X\alpha+u))' \\
&= E((X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1}) + E((X'X)^{-1}X'u(X\alpha+u)'D') \\
&\quad + E(D(X\alpha+u)u'X(X'X)^{-1}) + E(D(X\alpha+u)(X\alpha+u)'D') \\
&= (X'X)^{-1}X'E(uu')X(X'X)^{-1} + (X'X)^{-1}X'E(u)\alpha'X'D' + \\
&\quad (X'X)^{-1}X'E(uu')D' + DX\alpha E(u')X(X'X)^{-1} + DE(uu')X(X'X)^{-1} \\
&\quad + DX\alpha\alpha'X'D' + DX\alpha E(u')D') + DE(u)\alpha'X'D' + DE(uu')D' \\
&= \sigma^2(X'X)^{-1} + \sigma^2 DD'
\end{aligned}
$$

karena $DD' \geq 0$, maka terbukti :

$$V(\hat{\alpha}) \leq V(\alpha^*)$$

Definisi 2.4.2 :Estimator Aitken atau GLSE (Generalized Least Squares Estimator) dari α dengan matrik variansi $E(uu') = \sigma^2\Gamma$ didefinisikan sebagai :

$$\hat{\alpha} = (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}y$$

Theorema 2.4.2 :(Gauss - Markov - Aitken)

Jika $y = X\alpha + u$, dimana $u \infty (0,\sigma^2\Gamma)$ maka $\hat{\alpha}$ adalah tak bias dan lebih dari itu merupakan estimator linier terbaik (BLUE)

$$V(\hat{\alpha}) = \sigma^2(X'\Gamma^{-1}X)^{-1} \leq V(\alpha^*)$$

untuk estimator - estimator (α^*) tak bias linier yang lainnya.

Bukti :

$$
\begin{aligned}
(\hat{\alpha}-\alpha) &= ((X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}y - \alpha) \\
&= ((X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}(X\alpha + u) - \alpha) \\
&= (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}X\alpha + (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}u - \alpha \\
&= (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(\hat{\alpha}) &= E(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\alpha} - \alpha)' \\
V(\hat{\alpha}) &= E((X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}u)((X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}u)' \\
&= E((X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}uu'\Gamma^{-1\prime}X(X'\Gamma^{-1\prime}X)^{-1}) \\
&= (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}E(uu')\Gamma^{-1\prime}X(X'\Gamma^{-1\prime}X)^{-1} \\
&= \sigma^2(X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}\Gamma\Gamma^{-1\prime}X(X'\Gamma^{-1\prime}X)^{-1} \\
&= \sigma^2(X'\Gamma^{-1}X)^{-1}
\end{aligned}
$$

a. Tak bias

$$E(\hat{\alpha}) = E((X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}y)$$
$$= E((X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}(X\alpha + u))$$
$$= \alpha + (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}E(u)$$
$$= \alpha$$

b. Variansi minimum

misal : $\alpha^* = ((X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1} + D)y$

dimana D adalah matrik konstan yang berukuran (pxn).

Agar α^* merupakan estimator tak bias maka :

$$E(\alpha^*) = E((X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1} + D)y$$
$$E(\alpha^*) = E((X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1} + D)y$$
$$= E((X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1} + D)(X\alpha + u)$$
$$= (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}X\alpha + (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}E(u) + DX\alpha + DE(u)$$
$$= \alpha + DX\alpha$$
$$= \alpha$$

jika dan hanya jika DX = 0

$$V(\alpha^*) = E(\alpha^* - \alpha)(\alpha^* - \alpha)'$$
$$(\alpha^* - \alpha) = (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1} + D\ )y - \alpha$$
$$= (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1} + D\ )(X\alpha + u) - \alpha$$
$$= \alpha + (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}u + DX\alpha + Du - \alpha$$
$$= (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}u + D(X\alpha + u)$$
$$V(\alpha^*) = E((X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}u + D(X\alpha + u))((X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}u + D(X\alpha + u))'$$
$$= (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}E(uu')\Gamma^{-1\prime}X(X'\Gamma^{-1}X)^{-1} + E((X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}u + (X\alpha+u)'D') + ED(X\alpha+u)u'\Gamma^{-1\prime}X(X'\Gamma^{-1}X)^{-1}$$

$$+ E(D(X\alpha + u)(X\alpha + u)'D')$$

$$= (X'\Gamma^{-1}X)^{-1} X'\Gamma^{-1}E(uu')\Gamma^{-1\prime} X(X'\Gamma^{-1}X)^{-1} + (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}$$

$$X'\Gamma^{-1}E(u)\alpha' X' D' + (X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}E(uu')D' + DX\alpha E(u')$$

$$\Gamma^{-1\prime} X(X'\Gamma^{-1}X)^{-1}DE(uu')\Gamma^{-1\prime} X(X'\Gamma^{-1}X)^{-1} + DX\alpha\alpha' X' D' +$$

$$DX\alpha E(u)'D' + E(u)\alpha' X' D' DE(uu')D'$$

$$= \sigma^2(X'\Gamma^{-1}X)^{-1}X'\Gamma^{-1}\Gamma\Gamma^{-1\prime} X(X'\Gamma^{-1}X)^{-1} + \sigma^2 D\Gamma D'$$

karena $D\Gamma D' \geq 0$ maka terbukti :

$$V(\hat{\alpha}) \leq V(\alpha^*)$$

2.5 Runtun Waktu (Time Series) Univariate

Dalam pembahasan Runtun waktu univariate ini akan dikhususkan pada runtun waktu yang stasioner.

Definisi 2.5.1 :Bila T himpunan waktu yang diamati, t didalam T dan u_t adalah hasil pengamatan pada saat t, maka $\{u_t,\ t \in T\}$ disebut proses stokastik.

Untuk proses stokastik yang stasioner akan diberikan pada definisi 2.5.2 yaitu :

Definisi 2.5.2 :Misal $u_{t_1}, u_{t_2}, \ldots, u_{t_n}$ adalah pengamatan pada saat $t_1, t_2, \ldots, t_n$ dari proses stokastik $\{u_t,\ t \in T\}$ dan distribusi peluang gabungan yang berkaitan adalah :

$$f(u_{t_1}, u_{t_2}, \ldots, u_{t_n})$$

jika dipenuhi :

$$f(u_{t_1}, u_{t_2}, \ldots, u_{t_n}) = f(u_{t_1+k}, u_{t_2+k}, \ldots, u_{t_n+k})$$

Untuk setiap pergeseran waktu sebesar k, maka proses stokastik $\{u_t , t \in T\}$ disebut proses stokastik stasioner.

Akibat : $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ bebas dari waktu sehingga proses stokastik stasioner mempunyai mean dan varian yang konstan, yaitu :

Mean $= \mu = E(u_t) = E(u_{t+k})$

Varian $= E(u_t - \mu)^2 = E(u_{t+k} - \mu)^2$

Sementara itu fungsi autokovarian pada proses stokastik akan disajikan pada definisi berikut :

Definisi 2.5.3 :Fungsi autokovarian proses stokastik $\{u_t , t \in T\}$ adalah :

$$\gamma_{u,u_{t+k}} = \text{Cov}(u_t , u_{t+k}) = E(u_t u_{t+k})$$

Untuk proses stokastik stasioner, fungsi autokovariansi hanya bergantung pada selang waktu (lag) antara t_1 dan t_2.

misal untuk proses stasioner, selang waktu dinyatakan dalam k, maka fungsi autokovariansi menjadi :

$$\gamma_{t,t+k} = \text{Cov}(u_t , u_{t+k}) = E(u_t u_{t+k})$$

$\gamma_{t,t+k}$ ditulis γ_k.

Definisi 2.5.4 :White noise adalah barisan variabel acak $\varepsilon_t , \varepsilon_{t-1}, \ldots$ yang masing – masing tidak berkorelasi, dimana $\varepsilon_t \propto (0, \sigma_\varepsilon^2)$

Autokovarian lag k white noise adalah :

$Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t+k}) = E(\varepsilon_t - E\varepsilon_t)(\varepsilon_{t+k} - E\varepsilon_{t+k})$

karena $E(\varepsilon_t) = 0$, sehingga :

$Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t+k}) = E(\varepsilon_t\varepsilon_{t+k})$

untuk $k = 0 \longrightarrow Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t+k}) = E(\varepsilon_t\varepsilon_{t+k})$

$$Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t+k}) = E(\varepsilon_t\varepsilon_t)$$
$$= \sigma_\varepsilon^2$$

untuk $k \neq 0 \longrightarrow Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t+k}) = E(\varepsilon_t\varepsilon_{t+k})$

$$Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t+k}) = 0$$

karena nilai - nilai dari white noise bersifat acak /random dan suatu nilai white noise tidak berkorelasi dengan nilai white noise sesudah dan sebelumnya.

Salah satu proses dari runtun waktu univariat yang statisioner adalah rata-rata bergerak (Moving Average).

Definisi 2.5.5 :Bila u_t dinyatakan dalam bentuk :

$$u_t = \mu + \varepsilon_t - \lambda_1\varepsilon_{t-1} - \ldots - \lambda_q\varepsilon_{t-q}$$

dengan $\lambda_q \neq 0$ disebut proses rata - rata bergerak dengan orde q atau RB(q)