BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 Vektor dan Matriks

Definisi 1

Suatu matriks a dikatakan sebuah vektor kolom jika matriks tersebut terdiri dari satu kolom.

Notasi :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{ adalah vektor yang berukuran } m \times 1.$$

Transpose dari vektor $\mathbf{a}$ (dinotasikan $\mathbf{a}'$) adalah berbentuk matriks berukuran $1 \times m$ yang dinamakan vektor baris.

Notasi :

$$\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix}$$

Vektor $\mathbf{a}'$ dapat ditulis dalam bentuk $(a_1, a_2, \dots, a_m)$.

Definisi 2

Suatu matriks $\mathbf{A} = (a_{ij})$, dengan $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 1,2,\dots,n$ berukuran $(m \times n)$. Transpose dari $\mathbf{A}$ bernotasi $\mathbf{A}'$ adalah matriks berukuran $(n \times m)$

yang didapat dari matriks **A** dengan menuliskan baris ke-i dari matriks **A** sebagai kolom ke-i dari $\mathbf{A}'$, atau dapat ditulis $\mathbf{A}' = (a_{ji})$.

Beberapa sifat dari matriks transpose :

1. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$ (1)
2. $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$ (2)
3. $\lambda(\mathbf{A}') = (\lambda\mathbf{A})'$, λ adalah skalar sebarang (3)
4. $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$ (4)

<u>Definisi 3</u>

A suatu matriks bujur sangkar berukuran $(n \times n)$. Trace dari matriks **A** ditulis tr (**A**) adalah jumlah elemen-elemen pada diagonal utama.

Bila **A** dan **B** suatu matriks bujur sangkar berukuran $(n \times n)$, **h** adalah vektor berukuran $(n \times 1)$ dan c suatu skalar, maka

1. $\mathrm{tr}\,(c\mathbf{A}) = c\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{A})$ (5)
2. $\mathrm{tr}\,(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}) \pm \mathrm{tr}\,(\mathbf{B})$ (6)
3. $\mathrm{tr}\,(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{BA})$ (7)
4. $\mathrm{tr}\,(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A})$ (8)
5. $\mathbf{h}'\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathrm{tr}(\mathbf{h}'\mathbf{A}\mathbf{h}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{h}'\mathbf{h})$ (9)

<u>Definisi 4</u>

Misalkan **A** matriks simetris berukuran $(n \times n)$ dan **h** vektor berukuran $(n \times 1)$. Matriks **A** dikatakan definit positif jika $\mathbf{h}'\mathbf{A}\mathbf{h} > 0$ untuk semua $\mathbf{h} \neq 0$.

Definisi 5

Suatu matriks bujur sangkar **A** disebut singular apabila $\det(\mathbf{A}) = 0$. Kalau $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ maka disebut matriks non singular. Matriks yang non singular mempunyai invers, sedangkan matriks singular tidak mempunyai invers.

Sifat-sifat determinan dari suatu matriks **A** berukuran $(n \times n)$ adalah :

1. Untuk matriks definit positif **A**

$$|\mathbf{A}| > 0 \tag{10}$$

2. Untuk matriks bujur sangkar **A** dan **B** berukuran $(n \times n)$

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \tag{11}$$

3. Untuk matriks non singular

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \tag{12}$$

4. Untuk c skalar sebarang

$$|c\mathbf{A}| = c|\mathbf{A}| \tag{13}$$

Definisi 6

1. Misalkan $\mathbf{U} = f(\mathbf{h}) = f(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ adalah fungsi skalar dari variabel $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Differensial parsial tingkat satu **U** terhadap vektor **h** didefinisikan sebagai :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{U}/\partial h_1 \\ \partial \mathbf{U}/\partial h_2 \\ \vdots \\ \partial \mathbf{U}/\partial h_n \end{bmatrix} \tag{14}$$

2. Misalkan $\mathbf{U} = f(\mathbf{A}) = f(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{p1})$, dimana **A** adalah matriks simetris. Differensial parsial tingkat satu **U** terhadap matriks **A** didefinisikan sebagai :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{U} / \partial a_{11} & \partial \mathbf{U} / \partial a_{12} & \cdots & \partial \mathbf{U} / \partial a_{1p} \\ \partial \mathbf{U} / \partial a_{21} & \partial \mathbf{U} / \partial a_{22} & \cdots & \partial \mathbf{U} / \partial a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial \mathbf{U} / \partial a_{p1} & \partial \mathbf{U} / \partial a_{p2} & \cdots & \partial \mathbf{U} / \partial a_{pp} \end{bmatrix} \tag{15}$$

Sifat-sifat derivatif parsial tingkat satu pada vektor dan matriks adalah sebagai berikut :

Misalkan **h** dan **a** adalah vektor berukuran $(n \times 1)$ dan **A, B** adalah matriks simetris berukuran $(n \times n)$ maka

1. misalkan $\mathbf{U} = \mathbf{a}'\mathbf{h} = \mathbf{h}'\mathbf{a}$

$$\frac{\partial(\mathbf{a}'\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = \frac{\partial(\mathbf{h}'\mathbf{a})}{\partial \mathbf{h}} = \mathbf{a} \tag{16}$$

2. misalkan $\mathbf{U} = \mathbf{h}'\mathbf{A}\mathbf{h}$

$$\frac{\partial(\mathbf{h}'\mathbf{A}\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = 2\mathbf{A}\mathbf{h} \tag{17}$$

3. $$\frac{\partial \mathrm{tr}(\mathbf{AB})}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{B} - \mathrm{diag}(\mathbf{B}) \tag{18}$$

4. $$\frac{\partial \ln(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{A}^{-1} - \mathrm{diag}(\mathbf{A}^{-1}), \ \mathbf{A} \text{ matriks non singular} \tag{19}$$

2.2 Nilai Harapan dan Matrik Covarian dari Vektor Random

Vektor random adalah vektor yang elemen-elemennya variabel random. Sedangkan matriks random adalah matriks yang elemen-elemennya variabel random. Harga harapan dari vektor dan matrik random adalah harga harapan dari setiap elemen-elemennya.

Misal $\widetilde{\mathbf{C}} = (c_{ij})$ adalah matriks berukuran (r x s), harga harapan dari $\widetilde{\mathbf{C}}$ (ditulis $\mathbf{E}(\widetilde{\mathbf{C}})$) adalah matriks (r x s).

$$\mathbf{E}(\widetilde{\mathbf{C}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(c_{11}) & \mathbf{E}(c_{12}) & \cdots & \mathbf{E}(c_{1s}) \\ \mathbf{E}(c_{21}) & \mathbf{E}(c_{22}) & \cdots & \mathbf{E}(c_{2s}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E}(c_{r1}) & \mathbf{E}(c_{r2}) & \cdots & \mathbf{E}(c_{rs}) \end{bmatrix}$$

dimana :

$\mathbf{E}(c_{ij}) = \int_{-\infty}^{\infty} c_{ij}\, f_{ij}(c_{ij})\, d(c_{ij})$ bila C_{ij} variabel random kontinu dengan fungsi densitas f_{ij} (c_j)

$\mathbf{E}(c_{ij}) = \sum_{c_{ij}} c_{ij}\, p_{ij}(c_{ij})$ bila C_{ij} variabel random diskrit dengan fungsi probabilitas p_{ij} (c_j).

Nilai harapan dan covarian dari vektor random $\widetilde{\mathbf{D}} = (d_1, d_2, \ldots, d_q)'$ adalah

$$\mathbf{E}(\widetilde{\mathbf{D}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(d_1) \\ \mathbf{E}(d_2) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(d_q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_q \end{bmatrix} = \widetilde{\mu}$$

$$\mathrm{Cov}(\widetilde{\mathbf{D}}) = \mathbf{E}(\widetilde{\mathbf{D}} - \widetilde{\mu})(\widetilde{\mathbf{D}} - \widetilde{\mu})'$$

$$= \mathbf{E}\left(\begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 \\ d_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ d_q - \mu_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 & d_2 - \mu_2 & \cdots & d_q - \mu_q \end{bmatrix}\right)$$

$$= \mathbf{E}\begin{bmatrix} (d_1 - \mu_1)^2 & (d_1 - \mu_1)(d_2 - \mu_2) & \cdots & (d_1 - \mu_1)(d_q - \mu_q) \\ (d_2 - \mu_2)(d_1 - \mu_1) & (d_2 - \mu_2)^2 & \cdots & (d_2 - \mu_2)(d_q - \mu_q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (d_q - \mu_q)(d_1 - \mu_1) & (d_q - \mu_q)(d_2 - \mu_2) & \cdots & (d_q - \mu_q)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{E}(d_1 - \mu_1)^2 & \mathbf{E}(d_1 - \mu_1)(d_2 - \mu_2) & \cdots & \mathbf{E}(d_1 - \mu_1)(d_q - \mu_q) \\ \mathbf{E}(d_2 - \mu_2)(d_1 - \mu_1) & \mathbf{E}(d_2 - \mu_2)^2 & \cdots & \mathbf{E}(d_2 - \mu_2)(d_q - \mu_q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E}(d_q - \mu_q)(d_1 - \mu_1) & \mathbf{E}(d_q - \mu_q)(d_2 - \mu_2) & \cdots & \mathbf{E}(d_q - \mu_q)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1q} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{q1} & \tau_{q2} & \cdots & \tau_{qq} \end{bmatrix}$$

dimana : $\tau_{uu} = \mathbf{E}(d_u - \mu_u)^2$

$\tau_{uv} = \mathbf{E}(d_u - \mu_u)(d_v - \mu_v)$, dengan $\tau_{uv} = \tau_{vu}$, untuk $u, v = 1, 2, \ldots, p$

Bila $d_1, d_2, \ldots, d_q$ saling bebas maka $\mathrm{Cov}(d_u, d_v) = \tau_{uv} = 0$, sehingga :

$$\mathrm{cov}(\widetilde{\mathbf{D}}) = \begin{bmatrix} \tau_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tau_{qq} \end{bmatrix}$$

2.3 Distribusi Normal Multivariat

Untuk variabel random X berdistribusi normal univariat dengan rata-rata μ dan varian σ^2 mempunyai fungsi densitas probabilitas yaitu :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty$$

Maka untuk kasus multivariat dimana vektor random $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_p)'$ mempunyai distribusi normal p-variat dengan vektor rata-rata μ dan matriks covarian Σ adalah :

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}, -\infty < x_i < \infty,\ i=1,2,\ldots,p$$

dimana : $\mu=[\mu_1 \quad \mu_2 \quad \cdots \quad \mu_p]$

$$\Sigma=\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

dengan syarat Σ definit positif sehingga Σ mempunyai invers.

Misalkan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ adalah sampel random yang masing-masing berukuran $p \times 1$ dan saling bebas dari distribusi normal p-variat dengan vektor rata-rata μ dan matriks kovariansi Σ, maka fungsi densitas bersama dari semua observasi adalah :

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = \prod_{i=1}^{n} f(\mathbf{x}_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_i - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \mu)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{np/2} |\Sigma|^{n/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}_i - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \mu) \right\}$$

merupakan fungsi dari μ dan Σ atau disebut juga fungsi likelihood. Akan ditentukan penduga untuk μ dan Σ dengan memaksimumkan fungsi likelihood diatas.

Theorema 1

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ adalah sampel random dari populasi distribusi normal p-variat dengan rata-rata μ dan kovariansi Σ. Maka $\hat{\mu} = \bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i$ dan $\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' = \frac{1}{n} \mathbf{W}$, dimana $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})'$ adalah penduga maksimum likelihood untuk μ dan Σ.

Bukti

Fungsi likelihood (densitas bersama) dari $\mathbf{x}_i$ adalah

$$L(\mu, \Sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_i - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \mu)} \tag{20}$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai dari μ dan Σ yang memaksimalkan persamaan (20). Berdasarkan persamaan (6) dan (9) diperoleh :

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}_i - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \mu) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(\mathbf{x}_i - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \mu)$$

$$= \mathrm{tr}\left(\Sigma^{-1} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}_i - \mu)(\mathbf{x}_i - \mu)' \right) \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\mu)(\mathbf{x}_i-\mu)'=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{x}}-\mu)(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{x}}-\mu)'$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}})'+\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}})(\overline{\mathbf{x}}-\mu)'$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(\overline{\mathbf{x}}-\mu)(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}})'+\sum_{i=1}^{n}(\overline{\mathbf{x}}-\mu)(\overline{\mathbf{x}}-\mu)'$$

Karena,

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}})(\overline{\mathbf{x}}-\mu)'=\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i-\sum_{i=1}^{n}\overline{\mathbf{x}}\right](\overline{\mathbf{x}}-\mu)'=(n\overline{\mathbf{x}}-n\overline{\mathbf{x}})(\overline{\mathbf{x}}-\mu)'=\mathbf{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\mu)(\mathbf{x}_i-\mu)'=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}})'+n(\overline{\mathbf{x}}-\mu)(\overline{\mathbf{x}}-\mu)'$$

$$=\mathbf{W}+n(\overline{\mathbf{x}}-\mu)(\overline{\mathbf{x}}-\mu)' \tag{22}$$

Subtitusikan persamaan (22) ke persamaan (21) kemudian subtitusikan ke persamaan (20), sehingga diperoleh :

$$L(\mu,\Sigma)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{np}|\Sigma|^{n/2}}e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1}\left(\mathbf{W}+n(\overline{\mathbf{x}}-\mu)(\overline{\mathbf{x}}-\mu)'\right)} \tag{23}$$

Karena logaritma natural adalah fungsi naik, maksimum dari ln L akan terjadi pada titik yang sama dengan maksimum L. Pengoperasian ln pada L untuk mempermudah dalam pendifferensialan. Dengan pengoperasian ln pada L diperoleh :

$$\ln L(\mu,\Sigma)=-np\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)-\frac{n}{2}\ln|\Sigma|-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1}\left(\mathbf{W}+n(\overline{\mathbf{x}}-\mu)(\overline{\mathbf{x}}-\mu)'\right) \tag{24}$$

Berdasarkan persamaan (6) dan (9) diperoleh :

$$\ln L(\mu,\Sigma)=-np\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)-\frac{n}{2}\ln|\Sigma|-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\Sigma^{-1}\mathbf{W}\right)-\frac{n}{2}\left((\overline{\mathbf{x}}-\mu)\Sigma^{-1}(\overline{\mathbf{x}}-\mu)'\right)$$

$$= -\text{np}\ln\left(\sqrt{2\pi}\right) - \frac{\text{n}}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}\text{tr}\left(\Sigma^{-1}\mathbf{W}\right)$$

$$-\frac{\text{n}}{2}\left(\overline{\mathbf{x}}'\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{x}} - \mu'\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{x}}\Sigma^{-1}\mu + \mu'\Sigma^{-1}\mu\right)$$

Karena Σ^{-1} simetris maka $\left(\Sigma^{-1}\right)' = \Sigma^{-1}$, sehingga

$$\ln L(\mu,\Sigma) = -\text{np}\ln\left(\sqrt{2\pi}\right) - \frac{\text{n}}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}\text{tr}\left(\Sigma^{-1}\mathbf{W}\right) - \frac{\text{n}}{2}\left(\overline{\mathbf{x}}'\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{x}} - \mu'\left(\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{x}}\right)' - \left(\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{x}}\right)'\mu + \mu'\Sigma^{-1}\mu\right) \tag{25}$$

Untuk menentukan estimator maksimum likelihood untuk μ, $\ln L(\mu,\Sigma)$ didifferensialkan ke μ dan menyamakannya dengan nol. Berdasarkan persamaan (16) dan (17) diperoleh :

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\Sigma)}{\partial \mu} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \frac{\text{n}}{2}\left(\mathbf{0} - \Sigma^{-1}\overline{\mathbf{x}} - \Sigma^{-1}\overline{\mathbf{x}} + 2\Sigma^{-1}\hat{\mu}\right) = \mathbf{0}$$

$$\left(\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{x}} - \Sigma^{-1}\hat{\mu}\right) = \mathbf{0}$$

$$\hat{\mu} = \overline{\mathbf{x}} \tag{26}$$

Sebelum pendifferensialan $\ln L(\mu,\Sigma)$ untuk mendapatkan Σ, subtitusikan persamaan (26) ke persamaan (24) dan dari persamaan (12), $\left|\Sigma^{-1}\right| = \frac{1}{|\Sigma|}$ dengan pengoperasian ln pada kedua ruas diperoleh $\ln\left|\Sigma^{-1}\right| = -\ln|\Sigma|$, sehingga persamaan (24) dapat ditulis

$$\ln L(\mu,\Sigma) = -\text{np}\ln\left(\sqrt{2\pi}\right) + \frac{\text{n}}{2}\ln\left|\Sigma^{-1}\right| - \frac{1}{2}\text{tr}\left(\Sigma^{-1}\mathbf{W}\right) \tag{27}$$

Persamaan (27) didifferensialkan terhadap Σ^{-1} dan menyamakannya dengan nol, berdasarkan persamaan (18) dan (19) diperoleh :

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\mu},\Sigma)}{\partial \Sigma^{-1}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{0} + n\hat{\Sigma} - \frac{n}{2}\mathrm{diag}(\hat{\Sigma}) - \mathbf{W} + \frac{1}{2}\mathrm{diag}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}$$

$$\hat{\Sigma} - \frac{1}{2}\mathrm{diag}(\hat{\Sigma}) = \frac{1}{n}\left(\mathbf{W} - \frac{1}{2}\mathrm{diag}(\mathbf{W})\right) \tag{28}$$

dinotasikan

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11} & \hat{\sigma}_{12} & \cdots & \hat{\sigma}_{1p} \\ \hat{\sigma}_{21} & \hat{\sigma}_{22} & \cdots & \hat{\sigma}_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}_{p1} & \hat{\sigma}_{p2} & \cdots & \hat{\sigma}_{pp} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1p} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{p1} & w_{p2} & \cdots & w_{pp} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{diag}(\hat{\Sigma}) = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{\sigma}_{pp} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{diag}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} w_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_{pp} \end{bmatrix}$$

Perhatikan untuk selain elemen diagonal diperoleh :

$$\hat{\sigma}_{jk} = \frac{1}{n} w_{jk}, \ j \neq k \tag{29}$$

Untuk elemen diagonal diperoleh :

$$\hat{\sigma}_{jj} - \frac{\hat{\sigma}_{jj}}{2} = \frac{w_{jj}}{n} - \frac{w_{jj}}{2n}$$

$$\hat{\sigma}_{jj} = \frac{1}{n} w_{jj} \tag{30}$$

Dari persamaan (29) dan (30) dapat disimpulkan bahwa

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\mathbf{W} \tag{31}$$

Sehingga estimator maksimum likelihood untuk Σ adalah $\hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\mathbf{W}$.

2.4 Model Regresi Linier Multivariat

Misalkan $\mathbf{Y}_t = (Y_{1t}, Y_{2t}, \ldots, Y_{kt})'$ adalah vektor random berdimensi k dari variabel tak bebas dan $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{rt})'$ adalah vektor random berdimensi r dari variabel bebas. Maka model regresi linier multivariat dari data diatas dapat digambarkan dalam bentuk :

$$Y_{it} = \mathbf{X}_t' \beta_i + \varepsilon_{it}, \quad i = 1,2,\ldots,k \tag{32}$$

atau

$$\mathbf{Y}_t' = \mathbf{X}_t' \mathrm{B} + \varepsilon_t', \quad t = 1,2,\ldots,T \tag{33}$$

dimana :

$$\boldsymbol{B} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$$

dan

$$\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \ldots, \varepsilon_{kt})'$$

2.4.1 Metode Kuadrat Terkecil

Metode Kuadrat Terkecil dapat digunakan untuk mengestimasi koefisien regresi pada persamaan (33). Misalkan diberikan T data observasi $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_T$ dan $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_T$, dan didefinisikan

$\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_T)'$ matriks data berukuran $(\mathrm{T} \times \mathrm{k})$,

$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_T)'$ matriks data berukuran $(\mathrm{T} \times \mathrm{r})$,

dan

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_T)'$ matriks berukuran $(\mathrm{T} \times \mathrm{k})$.

Diasumsikan ε_i, $i = 1,2,\ldots,k$ masing-masing berdistribusi normal dengan $E(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{var}(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$, dan $\{\varepsilon_{it}\}$ adalah variabel-variabel random yang tidak berkorelasi untuk setiap observasi $t = 1,2,\ldots,T$ pada masing-masing ε_i, sehingga diperoleh ε adalah berdistribusi normal multivariat independen $N(0, \Sigma)$, dengan $\Sigma = E(\varepsilon_t\, \varepsilon_t')$. Maka model pada persamaan (33) dapat ditulis menjadi model linier multivariat :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{B} + \varepsilon \tag{34}$$

dengan

$$\boldsymbol{B} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k).$$

Kolom ke-i dari $\boldsymbol{B}$ yaitu β_i adalah vektor dari koefisien regresi pada variabel bebas ke-i, $i = 1,2,\ldots,k$.

Untuk mendapatkan estimasi kuadrat terkecil $\hat{\beta}_i$ dapat dilakukan dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat galatnya yaitu :

$$L = \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_{it}^2 = \varepsilon_i' \varepsilon_i$$

$$= (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}\beta_i)'(\mathbf{y}_i - \mathbf{X}\beta_i)$$

$$= \mathbf{y}_i'\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_i'\mathbf{X}\beta_i - \beta_i'\mathbf{X}'\mathbf{y}_i + \beta_i'\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{y}_i$$

$$= \mathbf{y}_i'\mathbf{y}_i - 2\beta_i'\mathbf{X}'\mathbf{y}_i + \beta_i'\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{y}_i$$

karena $\mathbf{y}_i'\mathbf{X}'\beta_i$ adalah matriks skalar berukuran $(1 \text{ x } 1)$, maka $(\beta_i'\mathbf{X}'\mathbf{y}_i)' = \mathbf{y}_i'\mathbf{X}\beta_i$ mempunyai nilai yang sama.

Sehingga estimasi kuadrat terkecil untuk parameter regresi β_i adalah

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_i} = -2\mathbf{X}'\mathbf{y}_i + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta}_i = \mathbf{0}$$

yang penyederhanaannya menjadi

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta}_i = \mathbf{X}'\mathbf{y}_i \tag{35}$$

persamaan (35) merupakan persamaan normal kuadrat terkecil. Untuk menyelesaikan persamaan normal tersebut adalah dengan mengalikan kedua ruas persamaan dengan $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$, sehingga diperoleh penaksir kuadrat terkecil untuk β_i yaitu :

$$\hat{\beta}_i = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\mathbf{y}_i, \quad i = 1,2,\ldots,k \tag{36}$$

dimana

$(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ adalah non singular

dan

$$\mathbf{y}_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, \ldots, Y_{iT})'$$

adalah kolom ke-i dari $\mathbf{Y}$.

Ini berarti :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k) \\ &= \left((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}_1, (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}_2, \ldots, (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}_k\right) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \end{aligned} \tag{37}$$

Sehingga estimasi model regresi multivariatnya adalah :

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{B}$$

Matriks jumlahan kuadrat residual yaitu

$$\text{SSE} = \sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t' = \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$$

$$= \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{B}\right)'\left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{B}\right)$$

$$= \mathbf{Y'Y} - \mathbf{Y'X}\hat{B} - \hat{B}'\mathbf{X'Y} - \hat{B}'\mathbf{X'X}\hat{B}$$

$$= \mathbf{Y'Y} - \hat{B}'\mathbf{X'Y}$$

Subtitusi $\hat{B} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y}$, sehingga diperoleh

$$= \mathbf{Y'Y} - \mathbf{Y'X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y}$$

$$= \mathbf{Y'}\left[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\right]\mathbf{Y}$$

Kemudian subtitusikan $\mathbf{Y} = \mathbf{X}B + \varepsilon$, diperoleh

$$= (\varepsilon' + B'\mathbf{X'})\left[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\right](\mathbf{X}B + \varepsilon)$$

$$= \varepsilon'\varepsilon - \varepsilon'\mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\varepsilon$$

$$= \varepsilon'\left[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\right]\varepsilon$$

$$= \text{tr}\left(\varepsilon'\left[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\right]\varepsilon\right)$$

$$= \text{tr}\left(\left[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\right]\varepsilon'\varepsilon\right)$$

karena $\mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}$ bersifat matriks idempoten, maka

$$= \text{tr}\left[\mathbf{I} - (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'X}\right]\varepsilon'\varepsilon$$

$$= (\text{T} - \text{r})\varepsilon'\varepsilon$$

Nilai harapan dari SSE adalah

$$\mathbf{E}(\mathrm{SSE}) = \mathbf{E}[(\mathrm{T}-\mathrm{r})\varepsilon'\varepsilon]$$

$$= (\mathrm{T}-\mathrm{r})\mathbf{E}[\varepsilon'\varepsilon] = (\mathrm{T}-\mathrm{r})\Sigma$$

Sehingga estimator tak bias untuk matriks kovarian error Σ adalah

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{\mathrm{T}-\mathrm{r}}\mathrm{SSE} = \frac{1}{\mathrm{T}-\mathrm{r}}\left(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{B}}\right)'\left(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{B}}\right)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{T}-\mathrm{r}}\sum_{t=1}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Y}_t - \hat{\boldsymbol{B}}'\mathbf{X}_t\right)\left(\mathbf{Y}_t - \hat{\boldsymbol{B}}'\mathbf{X}_t\right)' \quad (38)$$

atau

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{\mathrm{T}-\mathrm{r}}\sum_{t=1}^{\mathrm{T}}\hat{\varepsilon}_t\,\hat{\varepsilon}_t' \quad (39)$$

dimana :

$\hat{\varepsilon}_t = \mathbf{Y}_t - \hat{\boldsymbol{B}}'\mathbf{X}_t$ adalah vektor residual.

Baris dalam model $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{B} + \varepsilon$ adalah $\mathbf{Y}_t' = \mathbf{X}_t'\mathrm{B} + \varepsilon_t'$, $t = 1,2,\ldots,\mathrm{T}$, kemudian ditranspose menjadi $\mathbf{Y}_t = \mathrm{B}'\mathbf{X}_t + \varepsilon_t$, sehingga

$\mathbf{Y}_t$, $t = 1,2,\ldots,\mathrm{T}$ berdistribusi $\mathrm{N}_k(\mathrm{B}'\mathbf{X}_t,\Sigma)$

<u>Theorema 2</u>

Jika $\mathbf{Y}_t$ berdistribusi $\mathrm{N}_k(\mathrm{B}'\mathbf{X}_t,\Sigma)$, $t = 1,2,\ldots,k$ dimana $\mathbf{Y}_t'$ adalah kolom ke-t dari $\mathbf{Y}$ dalam model $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{B} + \varepsilon$, dan jika $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_\mathrm{T}$ independen maka maksimum likelihood untuk memaksimalkan $\boldsymbol{B}$ dan Σ adalah

$$\hat{\boldsymbol{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \qquad \hat{\Sigma} = \frac{1}{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{B}}\right)'\left(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{B}}\right)$$

<u>Bukti</u>

$\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_\mathrm{T}$ independen, maka fungsi maksimum likelihood :

$$L(\boldsymbol{B},\Sigma)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{\mathrm{kT}}|\Sigma|^{\mathrm{T}/2}}e^{-\frac{1}{2}\sum_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Y}_\mathrm{t}-B'\mathbf{X}_\mathrm{t})'\Sigma^{-1}(\mathbf{Y}_\mathrm{t}-B'\mathbf{X}_\mathrm{t})}$$

Seperti pada theorema 1, maka

$$\sum_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Y}_\mathrm{t}-B'\mathbf{X}_\mathrm{t})\Sigma^{-1}(\mathbf{Y}_\mathrm{t}-B'\mathbf{X}_\mathrm{t})=\mathrm{tr}\left[\Sigma^{-1}\sum_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Y}_\mathrm{t}-B'\mathbf{X}_\mathrm{t})'(\mathbf{Y}_\mathrm{t}-B'\mathbf{X}_\mathrm{t})\right]$$

$$=\mathrm{tr}\left[\Sigma^{-1}(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{B})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{B})\right]$$

Kemudian

$$\left[(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{B})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{B})\right]=\left(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{B}}+\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{B}}-\mathbf{X}\boldsymbol{B}\right)'\left(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{B}}+\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{B}}-\mathbf{X}\boldsymbol{B}\right)$$

$$=\left(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{B}}\right)'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{B})+\left(\hat{\boldsymbol{B}}-\boldsymbol{B}\right)'\mathbf{X}'\mathbf{X}\left(\hat{\boldsymbol{B}}-\boldsymbol{B}\right)$$

maka diperoleh

$$L(\boldsymbol{B},\Sigma)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{\mathrm{kT}}|\Sigma|^{\mathrm{T}/2}}e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\Sigma^{-1}\boldsymbol{E}\right)-\left[\mathbf{X}\left(\hat{\boldsymbol{B}}-\boldsymbol{B}\right)\Sigma^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{B}}-\boldsymbol{B}\right)'\mathbf{X}'\right]}$$

dimana $\boldsymbol{E}=\left(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{B}}\right)'\left(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{B}}\right)$, sehingga maksimum dari $\boldsymbol{B}$ dan Σ dapat diperoleh :

$$\hat{\boldsymbol{B}}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \qquad \hat{\Sigma}=\frac{1}{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{B}}\right)'\left(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{B}}\right)$$

Dari hasil diatas, maka fungsi likelihood yang memaksimalkan $\boldsymbol{B}$ dan Σ adalah

$$L\left(\hat{\boldsymbol{B}},\hat{\Sigma}\right)=\frac{e^{-\mathrm{kT}/2}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{\mathrm{kT}}|\Sigma|^{\mathrm{T}/2}}$$