

BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. ALJABAR MATRIK

Matrik $A_{m \times n}$ dapat ditinjau dari vektor-vektor baris atau dari vektor-vektor kolom. Sub-ruang dari \mathcal{R}^n yang direntang oleh vektor-vektor baris dinamakan ruang baris dari A dan sub-ruang dari \mathcal{R}^m yang direntang oleh vektor-vektor kolom dinamakan ruang kolom dari A , oleh karena itu perlu diingat kembali definisi-definisi berikut ini.

Definisi 2.1.1

Sebuah vektor w dinamakan kombinasi linier dari vektor-vektor v_1, v_2, \dots, v_r jika vektor tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r$$

dengan k_1, k_2, \dots, k_r adalah skalar.

Definisi 2.1.2

Jika v_1, v_2, \dots, v_r adalah vektor-vektor di dalam sebuah ruang vektor V dan jika tiap vektor di dalam V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari v_1, v_2, \dots, v_r maka vektor-vektor tersebut merentang V .

Definisi 2.1.3

Sebuah himpunan vektor $S = \{ v_1, v_2, \dots, v_r \}$ dan persamaan vektor

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r = 0$$

mempunyai paling sedikit satu pemecahan yakni : $k_1=0, k_2=0, \dots, k_r=0$.

Jika pemecahan tersebut adalah satu-satunya pemecahan maka pemecahan tersebut dinamakan pemecahan trivial dan S dinamakan sebuah himpunan yang

bebas linier. Jika ada pemecahan lainnya maka pemecahan lainnya dinamakan pemecahan tak trivial dan S dinamakan sebuah himpunan tak bebas linier.

Definisi 2.1.4

Jika V adalah sembarang ruang vektor dan $S = \{ v_1, v_2, \dots, v_r \}$ adalah sebuah himpunan berhingga dari vektor-vektor di dalam V , maka S dinamakan sebuah basis untuk V jika :

- (i). S bebas linier
- (ii). S merentang V

Definisi 2.1.5

Dimensi dari sebuah ruang vektor V yang berdimensi berhingga didefinisikan sebagai banyaknya vektor di dalam sebuah basis untuk V .

2.1.1. Rank Matrik

Definisi 2.1.6

Dimensi ruang baris dan ruang kolom dari sebuah matrik A dinamakan rank baris dan rank kolom dari A .

Teorema 2.1.1

- (i) Jika $A_{m \times k}$ dan $B_{k \times n}$ maka $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
- (ii) Jika matrik P dan Q yang non singular maka $r(PAQ) = r(A)$

Bukti :

- (i) Baris-baris AB merupakan kombinasi linier dari baris-baris B sehingga jumlah baris-baris bebas linier AB kurang dari atau sama dengan baris-baris B karena jika tidak, tidak mungkin untuk menyatakan baris-baris AB sebagai kombinasi linier dari baris-baris B maka $r(AB) \leq r(B)$, kemudian kolom-kolom AB merupakan kombinasi linier kolom-kolom A maka $r(AB) \leq r(A)$.

Jadi $r(\mathbf{AB}) \leq \min(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B}))$

- (ii) Dari (i) diatas didapatkan $r(\mathbf{A}) \geq r(\mathbf{AQ}) \geq r(\mathbf{AQQ}^{-1}) = r(\mathbf{A})$ jadi $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{AQ})$ dan $r(\mathbf{A}) \geq r(\mathbf{PA}) \geq r(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{PA}) = r(\mathbf{A})$ jadi $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{PA})$ sehingga $r(\mathbf{A}) \geq r(\mathbf{PAQ}) \geq r(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{PAQQ}^{-1}) = r(\mathbf{A})$.

Terbukti $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{PAQ})$.

2.2.1. Diagonalisasi Matrik Bujursangkar

Definisi 2.1.7

Suatu vektor tak nol \mathbf{x} didalam \mathcal{R}^n dinamakan sebuah vektor eigen dari matrik $\mathbf{A}_{n \times n}$ jika $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$, dengan skalar λ dinamakan nilai eigen dari \mathbf{A} dan \mathbf{x} dikatakan suatu vektor eigen yang berpasangan dengan λ .

Definisi 2.1.8

1. Vektor $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ adalah vektor ortogonal jika $\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = 0$ (semua $i, j ; i \neq j$) dan vektor $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ adalah vektor ortonormal jika $\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = 1$ dan $\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = 0$ (semua $i, j ; i \neq j$)
2. Matrik bujursangkar $\mathbf{A}_{n \times n}$ adalah matrik ortogonal jika kolom-kolom dari \mathbf{A} adalah himpunan vektor-vektor ortonormal, dan dimiliki sifat-sifat berikut,

(i) $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$

(ii) $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

(iii) \mathbf{A}^T adalah matrik ortogonal

Definisi 2.1.9

Jika ada matrik nonsingular \mathbf{P} sedemikian sehingga $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{-1}$, maka matrik bujursangkar \mathbf{A} dan \mathbf{B} dikatakan similar (\mathbf{A} dan \mathbf{B} mempunyai nilai eigen yang sama).

Definisi 2.1.10

Matrik $A_{n \times n}$ dapat didiagonalisasi secara ortogonal jika terdapat matrik ortogonal U sehingga $U^{-1}AU = U^T AU = D$ diagonal. Matrik U dikatakan mendiagonalisasi A secara ortogonal.

Teorema 2.1.2

Matrik A adalah matrik simetris jika dan hanya jika A dapat didiagonalisasi secara ortogonal.

Bukti :

(\Rightarrow) Diketahui matrik $A_{n \times n}$ adalah matrik simetris.

Misalkan ke- n nilai eigen dari matrik A semua berlainan ($\lambda_i \neq \lambda_j$; $i, j = 1, \dots, n$).

Kemudian misal x_i dan x_j adalah vektor eigen yang berpasangan dengan nilai eigen λ_i dan λ_j sedemikian sehingga

$$Ax_i = \lambda_i x_i \quad \text{dan} \quad Ax_j = \lambda_j x_j \quad \text{dengan } x_i, x_j \neq 0$$

$$\text{maka } x_j^T Ax_i = \lambda_i x_j^T x_i \quad \text{dan} \quad x_i^T Ax_j = \lambda_j x_j^T x_i$$

Karena nilai eigen $\lambda_i \neq \lambda_j$ dan A simetris maka $x_j^T Ax_i = x_i^T Ax_j$, sehingga

$(\lambda_i - \lambda_j) x_j^T x_i = 0$ dengan demikian $x_j^T x_i = 0$. Jadi vektor eigen dengan nilai eigen

yang berbeda adalah ortogonal, kemudian dibuktikan x_1, x_2, \dots, x_n bebas linier,

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n = 0$$

dengan membentuk hasil kali skalar dengan x_1 diperoleh

$$k_1 |x_1|^2 + k_2 x_1^T x_2 + \dots + k_n x_1^T x_n = 0$$

karena $x_1 \neq 0$ sehingga $|x_1|^2 \neq 0$ dan $x_j^T x_1 = 0$ untuk $i \neq j$ maka $k_1 = 0$, kemudian

dibentuk perkalian lagi dengan x_2 didapat $k_2 = 0$ sedemikian seterusnya, hingga

didapat setiap $k_i = 0$, maka $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ bebas linier.

Misalkan $\mathbf{u}_i = \mathbf{x}_i / \|\mathbf{x}_i\|$ maka $\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = 1$ dan $\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = 0$ ($i \neq j$) sehingga $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ adalah vektor ortonormal, jadi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ adalah basis ortonormal untuk \mathcal{R}^n .
Jadi bila semua nilai eigen berlainan, maka tidak lebih dari satu vektor eigen bebas linier dapat berpasangan dengan suatu nilai eigen yang sama dan sehingga ada matrik ortogonal $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]$ sedemikian sehingga $\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{D}$.

Misal tidak semua nilai eigen berlainan (misal ada nilai eigen λ_j sebanyak k buah), akan dibuktikan bahwa ada k vektor eigen ortonormal berpasangan dengan nilai eigen λ_j .

Andaikan sedikitnya ada satu vektor eigen ortonormal dengan nilai eigen λ_j sebut \mathbf{u}_j sehingga $\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ adalah suatu basis ortonormal untuk \mathcal{R}^n .

Tinjau matrik $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}]$ maka

$$\mathbf{A} \mathbf{U} = [\mathbf{A} \mathbf{u}_j, \mathbf{A} \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{A} \mathbf{v}_{n-1}] = [\lambda_j \mathbf{u}_j, \mathbf{A} \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{A} \mathbf{v}_{n-1}]$$

$$\text{dan } \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \lambda_j & \mathbf{u}_j^T \mathbf{A} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{u}_j^T \mathbf{A} \mathbf{v}_{n-1} \\ \lambda_j \mathbf{v}_1^T \mathbf{u}_j & \mathbf{v}_1^T \mathbf{A} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_1^T \mathbf{A} \mathbf{v}_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_j \mathbf{v}_{n-1}^T \mathbf{u}_j & \mathbf{v}_{n-1}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_{n-1}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}$$

dengan $\mathbf{v}_i^T \mathbf{u}_j = 0$; $\mathbf{u}_j^T \mathbf{A} \mathbf{v}_i = (\mathbf{u}_j^T \mathbf{A} \mathbf{v}_i)^T = \mathbf{v}_i^T \mathbf{A} \mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{v}_i^T \mathbf{u}_j = 0$ ($i=1, \dots, n-1$) dan

\mathbf{Z} adalah matrik simetris dengan $\mathbf{Z} = [z_{is}] = [\mathbf{v}_i^T \mathbf{A} \mathbf{v}_s]$, ($i, s = 1, \dots, n-1$).

Misalkan $U^T A U = B$ dan karena U matrik ortogonal maka B dan A similar dengan demikian B dan A mempunyai nilai eigen λ yang sama, sehingga

$$|B - \lambda I_n| = \left| \begin{bmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} - \lambda I_n \right| = (\lambda_j - \lambda) |Z - \lambda I_{n-1}|$$

Jadi jika λ_j adalah nilai eigen dari A sebanyak $k \geq 2$ maka

$$B - \lambda_j I_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z - \lambda_j I_{n-1} \end{bmatrix}$$

dan $|Z - \lambda_j I_{n-1}| = 0$ sehingga kenolan dari $B - \lambda_j I_n \geq 2$ karena $r(A - \lambda_j I_n) = r(B - \lambda_j I_n)$, kenolan dari $A - \lambda_j I_n \geq 2$, akibatnya ada suatu vektor eigen u_j dari A dengan nilai eigen λ_j bebas linier dan tegak lurus pada u_i . Dalam cara ini dapat ditunjukkan jika nilai eigen λ_j sebanyak k buah maka ada k vektor eigen ortonormal dengan nilai eigen λ_j . Sehingga k vektor eigen ortonormal tersebut bersama vektor eigen yang berpasangan dengan nilai eigen lainnya menyusun basis ortonormal untuk \mathcal{R}^n . Sehingga ada matrik ortogonal U sedemikian sehingga $U^T A U = D$.

(\Leftarrow) Diketahui matrik $A_{n \times n}$ dapat didiagonalisasi secara ortogonal maka terdapat matrik ortogonal U sedemikian sehingga $D = U^T A U$.

Matrik U ortogonal sehingga $U^T = U^{-1}$ sedemikian sehingga,

$$D = U^T A U$$

$$U D U^T = U U^T A U U^T$$

$$= A$$

dan sehingga $A^T = (U D U^T)^T$

$$= U D U^T$$

$$= A$$

Terbukti bahwa A simetris.

Teorema 2.1.3

Jika A simetris maka $r(A)$ sama dengan banyaknya nilai eigen A yang bukan nol.

Bukti :

Misalkan $r(A) = r$ dan karena A simetris maka menurut teorema (2.1.2) ada matrik ortogonal U sedemikian sehingga $U^T A U = D = \text{diagonal} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ dengan λ_i adalah nilai eigen matrik A . Menurut teorema 2.1.1 bagian (ii) diatas $r(A) = r(U^T A U) = r(D) = r$ dengan $D = \text{diagonal} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \text{diagonal} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$. Terbukti $r(A)$ adalah banyaknya nilai eigen yang bukan nol.

2.1.3. Matrik Idempoten**Definisi 2.1.11**

Matrik A adalah idempoten jika $A^2 = A^T A = A$ dan A disebut matrik proyeksi jika A idempoten dan simetris.

Definisi 2.1.12

Trace suatu matrik $[a_{ij}]_{n \times n}$ adalah jumlah elemen-elemen diagonal matrik A

$$\text{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$$

Jika A, B dan c adalah matrik dan skalar maka didapatkan sifat sebagai

berikut :

$$(i). \text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

$$(ii). \text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$$

$$(iii). \text{tr}(cA) = c \text{tr}(A)$$

$$(iv). \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

Teorema 2.1.4

Jika A matrik simetris maka

(i) Jika A idempoten maka rank dan trace dari A adalah sama $r(A) = \text{tr}(A)$.

(ii) $I_n - A$ adalah idempoten dengan $r(I_n - A) = n - r(A)$.

Bukti :

- (i) Diketahui A matrik simetris dan idempoten ($A^2 = A$), misalkan persamaan karakteristik $Ax = \lambda x$ ($x \neq 0$) dengan x adalah vektor eigen matrik A dan

$$\text{skalar } \lambda \text{ adalah nilai eigen dari } A \text{ maka } x^T Ax = \lambda x^T x \quad \dots(2.1.1)$$

$$\text{dan karena } A \text{ idempoten maka } x^T Ax = x^T A^2 x$$

$$= x^T A^T Ax$$

$$= (Ax)^T (Ax) = \lambda^2 x^T x \quad \dots(2.1.2)$$

dari (2.1.1) dan (2.1.2) diatas didapatkan

$$\lambda x^T x - \lambda^2 x^T x = \lambda x^T x (\lambda - 1)$$

$$= 0$$

untuk $(\lambda - 1) = 0$ maka $\lambda = 1$ atau $\lambda x^T x = 0$, karena $x \neq 0$ maka $\lambda x^T x = 0$ hanya jika $\lambda = 0$. Dengan demikian nilai eigen λ adalah 0 atau 1. Menurut teorema (2.1.3) terdapat sebanyak $r(A)$ nilai eigen yang bernilai 1 dan sebanyak $n - r(A)$ yang bernilai 0, sehingga A dapat didiagonalkan dalam bentuk :

$$U^T A U = D = \begin{bmatrix} I_{r(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dari bentuk diagonal diatas didapat $\text{tr}(U^T A U) = r(A)$ dan karena $\text{tr}(U^T A U) = \text{tr}(A U U^T) = \text{tr}(A)$ maka terbukti $\text{tr}(A) = r(A)$.

$$(ii) (I - A)(I - A) = I - A - A + A^2$$

$$= I - 2A + A = I - A$$

jadi $(I - A)$ adalah idempoten.

Sehingga menurut (i) diatas $r(I - A) = \text{tr}(I - A) = \text{tr}(I) - \text{tr}(A) = n - \text{tr}(A) = n - r(A)$

2.1.4. Bentuk Kuadrat

Definisi 2.1.13

Suatu bentuk kuadrat dalam variabel x_1, x_2, \dots, x_n

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{(n-1)n}x_{n-1}x_n$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

dengan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ dan $\mathbf{A}_{n \times n}$ adalah matriks simetris bentuk kuadrat dalam \mathbf{x} dan \mathbf{A} disebut matrik bentuk kuadrat.

Definisi 2.1.14

Matrik simetris \mathbf{A} disebut matrik definit positif jika $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq 0$ dan disebut matrik semidefinit positif jika $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x}$. Juga disebut matrik definit negatif jika $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0, \forall \mathbf{x} \neq 0$.

Contoh 2.1 :

$$1. F = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 3x_1^2 + 5x_2^2$$

adalah definit positif karena tak pernah negatif dan nol jika hanya jika $\mathbf{x} = 0$.

$$2. F = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 3x_3^2$$

$$= (2x_1 - x_2)^2 + 3x_3^2$$

adalah semidefinit positif, karena selalu positif dan nol jika $x_2 = 2x_1, x_3 = 0$.

$$\begin{aligned}
 3. \quad F = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= [x_1, x_2] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
 &= -x_1^2 - x_2^2
 \end{aligned}$$

adalah definit negatif, karena tak pernah positif dan nol jika hanya jika $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Teorema 2.1.5

Jika \mathbf{A} matrik simetris maka

- (i) \mathbf{A} definit positif jika dan hanya jika ada matrik nonsingular \mathbf{P} sedemikian sehingga $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{P}^T$.
- (ii) Jika \mathbf{A} definit positif maka \mathbf{A}^{-1} juga definit positif.
- (iii) Jika \mathbf{A} definit positif maka ada matrik nonsingular \mathbf{Q} sedemikian sehingga $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{I}$.

Bukti :

- (i) (\Rightarrow) Diketahui bahwa \mathbf{A} definit positif dan karena \mathbf{A} simetris maka \mathbf{A} dapat didiagonalisasi secara ortogonal sehingga $\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{D}$ dan $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{D} \mathbf{U}$

$$\begin{aligned}
 \text{Untuk } \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= \mathbf{x}^T \mathbf{U}^T \mathbf{D} \mathbf{U} \mathbf{x} \\
 &= (\mathbf{U} \mathbf{x})^T \mathbf{D} (\mathbf{U} \mathbf{x}) \\
 &= \mathbf{y}^T \mathbf{D} \mathbf{y} = \sum_i \lambda_i y_i^2
 \end{aligned}$$

dengan $\mathbf{y} = \mathbf{U} \mathbf{x}$, dan karena $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ maka $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Sehingga $\sum_i \lambda_i y_i^2 > 0$,

untuk $\forall \lambda_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Jadi ada $\mathbf{D}^{1/2} = \text{diagonal}(\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \dots, \lambda_n^{1/2})$.

$$\begin{aligned}
 \text{maka } \mathbf{A} &= \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^T \\
 &= \mathbf{U} \mathbf{D}^{1/2} (\mathbf{D}^{1/2})^T \mathbf{U}^T \\
 &= \mathbf{U} \mathbf{D}^{1/2} (\mathbf{U} \mathbf{D}^{1/2})^T \\
 &= \mathbf{P} \mathbf{P}^T \text{ dengan } \mathbf{P} = \mathbf{U} \mathbf{D}^{1/2}
 \end{aligned}$$

\mathbf{U} dan $\mathbf{D}^{1/2}$ nonsingular sehingga matrik \mathbf{P} nonsingular.

(\Leftarrow) Diketahui matrik nonsingular \mathbf{P} sedemikian sehingga $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{P}^T$

sehingga $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{P}^T \mathbf{x}$

$$= (\mathbf{P}^T \mathbf{x})^T \mathbf{P}^T \mathbf{x}$$

$$= \mathbf{y}^T \mathbf{y} \text{ dengan } \mathbf{y} = \mathbf{P}^T \mathbf{x}$$

Sehingga $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ untuk semua $\mathbf{P}\mathbf{x} \neq 0$ dan $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$ jika dan hanya jika

$\mathbf{P}^T \mathbf{x} = 0$ dan karena \mathbf{P} nonsingular (\mathbf{P}^{-1} ada) maka $\mathbf{P}^T \mathbf{x} = 0$ hanya jika $\mathbf{x} = 0$.

Terbukti \mathbf{A} definit positif.

(iii) Diketahui bahwa \mathbf{A} definit positif maka menurut bagian (i) diatas ada \mathbf{P}

sedemikian sehingga $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{P}^T$.

$$\text{Maka } \mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{P}\mathbf{P}^T)^{-1}$$

$$= (\mathbf{P}^T)^{-1} \mathbf{P}^{-1}$$

$$= (\mathbf{P}^{-1})^T \mathbf{P}^{-1}$$

$$= \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \text{ dengan } \mathbf{Q} = (\mathbf{P}^{-1})^T \text{ nonsingular.}$$

Terbukti \mathbf{A}^{-1} definit positif.

(iii) Dari bagian (i) dan (ii) diketahui $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{P}^T$ dan $\mathbf{Q} = (\mathbf{P}^{-1})^T$ sehingga

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \mathbf{P}\mathbf{P}^T \mathbf{Q}$$

$$= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}\mathbf{P}^T (\mathbf{P}^{-1})^T$$

$$= \mathbf{I}$$

Teorema 2.1.6

Jika matrik $\mathbf{X}_{n \times p}$ dengan rank p disebut matrik rank kolom penuh maka $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$

definit positif.

Bukti :

$$\mathbf{z}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{z} = (\mathbf{X}\mathbf{z})^T \mathbf{X}\mathbf{z}$$

$$= \mathbf{y}^T \mathbf{y} \text{ dengan } \mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{z}$$

Jelas $\mathbf{y}^T \mathbf{y} \geq 0$, ambil $\mathbf{y}^T \mathbf{y} = 0$, $\mathbf{y}^T \mathbf{y} = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{y} = 0$

Jadi $\mathbf{y} = \mathbf{Xz} = 0$ dan karena \mathbf{X} matrik rank kolom penuh sehingga $\mathbf{Xz} = 0$ hanya mempunyai penyelesaian trivial yakni $\mathbf{z} = 0$. Maka $\mathbf{z}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Xz} > 0, \forall \mathbf{z} \neq 0$

Terbukti $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ definit positif.

Teorema 2.1.7

Matrik simetris \mathbf{A} adalah semidefinit positif jika dan hanya jika $\text{tr}(\mathbf{CA}) \geq 0$ untuk semua \mathbf{C} semidefinit positif.

Bukti :

(\Rightarrow) Diketahui \mathbf{A} semidefinit positif sehingga

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{UDU}^T \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \end{aligned}$$

dengan \mathbf{D} = diagonal $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, λ_i adalah nilai eigen dari \mathbf{A} ($\forall \lambda_i \geq 0$) dan \mathbf{U} adalah matrik ortogonal.

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{CA}) &= \text{tr} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{C} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{C} \mathbf{u}_i \end{aligned}$$

$\mathbf{u}_i^T \mathbf{C} \mathbf{u}_i$ adalah nonnegatif untuk semua \mathbf{C} semidefinit positif sehingga $\text{tr}(\mathbf{CA}) \geq 0$.

(\Leftarrow) jika $\text{tr}(\mathbf{CA}) \geq 0$ untuk semua \mathbf{C} semidefinit positif benar untuk $\mathbf{C} = \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \geq 0$ maka

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{CA}) &= \text{tr} \left[\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T \right) \right] \\ &= \lambda_i \geq 0 \end{aligned}$$

Terbukti \mathbf{A} semidefinit positif.

2.1.5 Penentuan maksimum dan minimum

Definisi 2.1.15

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi kontinue dari elemen-elemen vektor $x = [x_1, x_2, \dots, x_p]^T$ maka derivatif parsial pertama f terhadap x didefinisikan

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]_{p \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p} \end{bmatrix}$$

dan derivatif parsial kedua didefinisikan

$$H = \frac{\partial f}{\partial x x^T} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{p \times p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p} \\ \vdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i+1}^2} & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2} \end{bmatrix}$$

dan H disebut matrik Hess.

Definisi 2.1.16

Jika $f(X)$ adalah sebuah fungsi skalar riil dari matrik $X = [x_{ij}]_{m \times n}$ maka derivatif parsial pertama f terhadap X didefinisikan

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_{ij}} \right]_{m \times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{m1}} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{mn}} \end{bmatrix}$$

Suatu syarat perlu untuk maksimum atau minimum dari $f(x)$ di $x = x_0$

adalah $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$

dan x_0 yang memenuhi persamaan tersebut diatas disebut titik ekstrem.

Syarat cukup untuk nilai maksimum di titik \mathbf{x}_0 , yakni bahwa matrik Hess yang dievaluasi di \mathbf{x}_0 adalah definit negatif dan matrik Hess definit positif adalah syarat cukup untuk nilai minimum.

Jika fungsi $f(\mathbf{x})$ dengan adanya pembatas $g(\mathbf{x})=0$ maka untuk mendapatkan nilai maksimum atau minimum digunakan metode Lagrange Multiplier. Secara khusus, kita bentuk suatu fungsi baru

$$h(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda [g(\mathbf{x}) - c]$$

yang disebut fungsi lagrange.

Syarat perlu $f(\mathbf{x})$ minimum atau maksimum jika dipenuhi

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \lambda \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 0 \\ \frac{\partial h(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda} &= -g(\mathbf{x}) + c = 0 \end{aligned}$$

dan \mathbf{x}_0 yang memenuhi persamaan tersebut diatas disebut titik ekstrim.

Syarat cukup untuk nilai maksimum jika $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}\mathbf{x}^T}$ definit negatif dan minimum jika definit positif.

2.2. DISTRIBUSI NORMAL

Definisi 2.2.1

Jika vektor acak $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ didefinisikan fungsi densitas

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}))}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n} |\mathbf{V}|^{\frac{1}{2}}}$$

dengan vektor rata-rata dari \mathbf{x} adalah $\boldsymbol{\mu}$ dan matrik var-cov(\mathbf{x}) = \mathbf{V} definit positif.

Materi Penunjang

Lemma 2.2.1

Jika matrik $A_{n \times n}$ adalah matrik definit positif maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n = (2\pi)^{\frac{1}{2}n} |\mathbf{A}|^{-\frac{1}{2}}$$

Bukti :

Karena A definit positif, maka ada matrik non-singular Q sedemikian sehingga

$Q^T A Q = I_n$. Sehingga dengan sifat determinan $|Q^T A Q| = |Q|^2 |A| = 1$ dan $|Q| = |A|^{-\frac{1}{2}}$.

Ambil $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ sehingga $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T Q^T A Q \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{y}$ dengan demikian :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{y}) dy_1 \dots dy_n / |Q^{-1}| \\ &= |Q| \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2\right) dy_1 \dots dy_n \\ &= |A|^{-\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^n \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} y_i^2\right) dy_i \right\} \\ &= (2\pi)^{\frac{1}{2}n} |A|^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Teorema 2.2.1

Jika vektor acak $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ maka fungsi pembangkit momen (m.g.f),

$$M_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \exp(\mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu})$$

Bukti :

$$M_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = E(\exp(\mathbf{t}^T \mathbf{x})) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{V}|}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\mathbf{t}^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})] dx_1 \dots dx_n$$

Materi Penunjang

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{V}|}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} - \mathbf{V}\mathbf{t})^T \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} - \mathbf{V}\mathbf{t}) + \mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \mathbf{V}\mathbf{t}] dx_1 \dots dx_n \\
&= \frac{\exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}))}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n} |\mathbf{V}|^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} - \mathbf{V}\mathbf{t})^T \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} - \mathbf{V}\mathbf{t})] dx_1 \dots dx_n \\
&= \exp(\mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu})
\end{aligned}$$

Teorema 2.2.2

Jika vektor acak $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ dan matrik $\mathbf{C}_{p \times n}$ dengan rank p , maka

$$\mathbf{C}\mathbf{x} \sim N(\mathbf{C}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{C}^T)$$

Bukti :

Misal $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$, maka semua \mathbf{t} riil, m.g.f \mathbf{y} adalah :

$$\begin{aligned}
M_{\mathbf{y}}(\mathbf{t}) &= E[\exp(\mathbf{t}^T \mathbf{y})] \\
&= E[\exp(\mathbf{t}^T \mathbf{C}\mathbf{x})] \\
&= E[\exp(\mathbf{s}^T \mathbf{x})] ; \text{ dengan } \mathbf{s}^T = \mathbf{t}^T \mathbf{C} \\
&= \exp(\mathbf{s}^T \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{V} \mathbf{s}) \\
&= \exp(\mathbf{t}^T (\mathbf{C}\boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{2} \mathbf{t}^T (\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{C}^T) \mathbf{t})
\end{aligned}$$

Jadi terbukti $\mathbf{C}\mathbf{x} \sim N(\mathbf{C}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{C}^T)$

Teorema 2.2.3

Nilai ekspektasi dari bentuk kuadratik $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ dengan $\mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ adalah :

$$E(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{V}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}$$

Materi Penunjang

Bukti :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) &= E[\text{tr}(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})] \\ &= E[\text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{x}^T)] \\ &= \text{tr}[E(\mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{x}^T)] \\ &= \text{tr}[\mathbf{A} E(\mathbf{x} \mathbf{x}^T)] \end{aligned}$$

dan $\mathbf{V} = E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T] = E(\mathbf{x} \mathbf{x}^T) - \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T$. Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) &= \text{tr}[\mathbf{A}(\mathbf{V} + \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T)] \\ &= \text{tr}[\mathbf{A} \mathbf{V} + \mathbf{A} \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T] \\ &= \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{V}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\mu} \end{aligned}$$

Definisi 2.2.2

Jika vektor acak $\mathbf{x} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ maka $u = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ berdistribusi chi-kuadrat central dengan derajat bebas n dinotasikan $u \sim \chi_n^2$ dengan fungsi densitas,

$$f(u) = \frac{u^{\frac{1}{2}n-1} \exp(-\frac{1}{2}u)}{2^{\frac{1}{2}n} \Gamma(\frac{1}{2}n)}$$

dengan $\Gamma(\frac{1}{2}n)$ adalah fungsi gamma argumen $\frac{1}{2}n$.

Dan jika $\mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_n)$ maka $u = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ berdistribusi chi-kuadrat nonsentral dengan derajat bebas n dinotasikan $u \sim \chi^2(n, \lambda)$ dengan fungsi densitas,

$$f(u) = \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{u^{\frac{1}{2}n+k-1} \exp(-\frac{1}{2}u)}{2^{\frac{1}{2}n+k} \Gamma(\frac{1}{2}n+k)}$$

dengan parameter non-central $\lambda = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu}$ dan $\Gamma(\frac{1}{2}n+k)$ adalah fungsi gamma dengan argumen $\frac{1}{2}n+k$.

Materi Penunjang

Teorema 2.2.4

Jika $u \sim \chi_n^2$ maka fungsi pembangkit momen $M_u(t) = (1-2t)^{-n/2}$ dan jika $u \sim \chi^2(n, \lambda)$ maka fungsi pembangkit momen $M_u(t) = (1-2t)^{-n/2} \exp(-\lambda(1-(1-2t)^{-1}))$.

Bukti :

Diketahui $u \sim \chi_n^2$ maka

$$\begin{aligned} M_u(t) &= \int_0^{\infty} \exp(tu) \frac{u^{\frac{1}{2}n-1} \exp(-\frac{1}{2}u)}{2^{\frac{1}{2}n} \Gamma(\frac{1}{2}n)} du \\ &= \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n} \Gamma(\frac{1}{2}n)(1/2-t)} \int_0^{\infty} \exp(-(\frac{1}{2}-t)u) u^{\frac{1}{2}n-1} \frac{(1/2-t)^{\frac{1}{2}n-1}}{(1/2-t)^{\frac{1}{2}n-1}} d(1/2-t)u \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}n)}{2^{\frac{1}{2}n} \Gamma(\frac{1}{2}n)(1/2-t) (1/2-t)^{\frac{1}{2}n-1}} \\ &= (1-2t)^{-n/2} \end{aligned}$$

Diketahui $u \sim \chi^2(n, \lambda)$ maka

$$\begin{aligned} M_u(t) &= \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (\text{mgf. } \chi_{n+2k}^2) \\ &= \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (1-2t)^{-n/2-k} \\ &= \exp(-\lambda(1-(1-2t)^{-1}))(1-2t)^{-n/2} \end{aligned}$$

Lemma 2.2.2

Untuk vektor \mathbf{g} dan matrik definit positif \mathbf{W}

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}n} |\mathbf{W}|^{-\frac{1}{2}} \exp(\frac{1}{2} \mathbf{g}^T \mathbf{W} \mathbf{g}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x} + \mathbf{g}^T \mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n$$

Materi Penunjang

Bukti :

Diketahui dari lemma 2.2.1 $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) \, dx_1 \dots dx_n = (2\pi)^{\frac{1}{2}n} |\mathbf{A}|^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } (2\pi)^{\frac{1}{2}n} |\mathbf{W}|^{-\frac{1}{2}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})] \, dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{x} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\mu}] \, dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{g}^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{g}^T \mathbf{W} \mathbf{g}] \, dx_1 \dots dx_n \\ &= \frac{1}{\exp(\frac{1}{2} \mathbf{g}^T \mathbf{W} \mathbf{g})} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{g}^T \mathbf{x}] \, dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

dengan $\mathbf{g}^T = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W}^{-1}$

Teorema 2.2.5

Untuk $\mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$, jika $\mathbf{A}\mathbf{V}$ adalah idempoten, maka

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \sim \chi^2 [r(\mathbf{A}), \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}].$$

Bukti :

Fungsi pembangkit momen dari $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ adalah :

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}(t) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{V}|}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[t \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})] \, dx_1 \dots dx_n \\ &= \frac{\exp(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu})}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n} |\mathbf{V}|^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T (\mathbf{I} - 2t\mathbf{A}\mathbf{V}) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}) \, dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

dari lemma 2.2.1 ambil $\mathbf{g}^T = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1}$ dan $\mathbf{W} = [(\mathbf{I} - 2t\mathbf{A}\mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}]^T = \mathbf{V}(\mathbf{I} - 2t\mathbf{A}\mathbf{V})^{-1}$

didapatkan :

Materi Penunjang

$$\begin{aligned}
M_{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}(t) &= \exp(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}) |\mathbf{V}|^{-\frac{1}{2}} |\mathbf{V}(\mathbf{I} - 2t\mathbf{A}\mathbf{V})^{-1}|^{\frac{1}{2}} \exp[\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}(\mathbf{I} - 2t\mathbf{A}\mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}] \\
&= |\mathbf{I} - 2t\mathbf{A}\mathbf{V}|^{-1/2} \exp\{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T [\mathbf{I} - (\mathbf{I} - 2t\mathbf{A}\mathbf{V})^T] \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}\} \\
&= \prod_{i=1}^n (1 - 2t\lambda_i)^{-1/2} \exp\{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T [-\sum_{k=1}^{\infty} (2t)^k (\mathbf{A}\mathbf{V})^k] \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}\}
\end{aligned}$$

dengan λ_i untuk $i = 1, 2, \dots, n$, adalah akar karakteristik dari $\mathbf{A}\mathbf{V}$. Jika $\mathbf{A}\mathbf{V}$ adalah idempoten dengan rank r , maka sebanyak r akar karakteristiknya bernilai 1 dan sebanyak $n-r$ bernilai 0 dan $(\mathbf{A}\mathbf{V})^T = \mathbf{A}\mathbf{V}$. Oleh karena itu

$$\begin{aligned}
M_{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}(t) &= \prod_{i=1}^n (1 - 2t)^{-1/2} \exp\{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T [-\sum_{k=1}^{\infty} (2t)^k] \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}\} \\
&= (1 - 2t)^{-r/2} \exp\{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T [1 - (1 - 2t)^{-1}] \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}\} \\
&= (1 - 2t)^{-r/2} \exp\{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\mu} [1 - (1 - 2t)^{-1}]\}
\end{aligned}$$

sehingga terlihat bahwa $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \sim \chi^2(r, \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\mu})$ dengan $r = r(\mathbf{A}\mathbf{V})$.

Karena \mathbf{V} nonsingular, $r(\mathbf{A}\mathbf{V}) = r(\mathbf{A})$, jadi $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \sim \chi^2(r(\mathbf{A}), \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\mu})$.

2.3. MODEL REGRESI LINIER DAN PENAKSIRAN PARAMETER

Model regresi linier berbentuk :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i \quad \dots\dots(2.3.1)$$

disebut model regresi linier berganda dengan k variabel bebas x dan variabel tak bebas y . Parameter $\beta_j, j = 1, 2, \dots, k$ disebut koefisien regresi dan kesalahan acak ε_i .

2.3.1. Metode Kuadrat Terkecil Biasa (*Ordinary least square*)

Metode kuadrat terkecil biasa (metode OLS) dikemukakan oleh Carl Friedrich

Gauss seorang ahli matematik bangsa Jerman. Dengan asumsi-asumsi tertentu yang

Materi Penunjang

sering disebut sebagai asumsi standart/klasik, metode OLS mempunyai beberapa sifat statistik yang sangat menarik yang membuatnya menjadi satu metode analisa regresi yang kuat dan populer. Asumsi standart tersebut adalah sebagai berikut :

1. Nilai rata-rata dari unsur kesalahan acak ε_i adalah nol atau $E(\varepsilon_i)=0$ untuk tiap i , dalam notasi matrik $E(\varepsilon) = 0$ dengan ε dan 0 adalah vektor kolom $n \times 1$, dan 0 merupakan vektor nol.

2. Varian bersyarat dari ε_i adalah konstan atau homoskedastik.

$$\begin{aligned} \text{Var}(\varepsilon_i) &= E(\varepsilon_i - E(\varepsilon_i))^2 \\ &= E(\varepsilon_i^2) \text{ karena asumsi 1} \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

3. Tidak ada autokorelasi dalam kesalahan acak.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\varepsilon_i \varepsilon_j) &= E(\varepsilon_i - E(\varepsilon_i))(\varepsilon_j - E(\varepsilon_j)) \\ &= E(\varepsilon_i \varepsilon_j) \text{ karena asumsi 1} \\ &= 0 \text{ untuk } i \neq j \end{aligned}$$

Dan dalam notasi matriks asumsi 2 dan asumsi 3 disajikan $E(\varepsilon \varepsilon^T) = \sigma^2 I_n$.

4. Variabel bebas X adalah nonstokastik (yaitu, tetap dalam penyampelan berulang) atau, jika stokastik, didistribusikan secara independen dari kesalahan acak ε_i .
5. Tidak ada multikolinieritas di antara variabel bebas X .

Sehingga matrik X adalah matrik rank kolom penuh.

Materi Penunjang

Diberikan sebuah pengembangan matrik dari persamaan normal di atas.

Model persamaan (2.3.2) dapat ditulis dalam bentuk matrik sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

atau
$$y = X\hat{\beta} + e \quad \text{..... (2.3.7)}$$

dengan y adalah vektor ($n \times 1$) dari pengamatan variabel tak bebas, X adalah matrik ($n \times p$) dari n pengamatan k variabel bebas ($p = k + 1$) dengan $r(X) = p$ ($n \geq p$), e adalah vektor sesatan ($n \times 1$), dan $\hat{\beta}$ adalah vektor ($p \times 1$) dari penaksir koefisien regresi.

Metode Penaksiran OLS yaitu dengan meminimumkan jumlah kuadrat sesatan

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n e_i^2 &= e^T e = (y - X\hat{\beta})^T (y - X\hat{\beta}) \\ &= y^T y - \hat{\beta}^T X^T y - y^T X \hat{\beta} + \hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta} \\ &= y^T y - 2\hat{\beta}^T X^T y + \hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial (e^T e)}{\partial \hat{\beta}} = -2X^T y + 2X^T X \hat{\beta} = 0$$

$$X^T X \hat{\beta} = X^T y \quad \text{.....(2.3.8)}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \hat{\beta} \hat{\beta}^T} = 2X^T X \quad \text{.....(2.3.9)}$$

Materi Penunjang

Persamaan (2.3.8) adalah persamaan normal kuadrat terkecil. Persamaan normal tersebut identik dengan persamaan (2.3.6). Menurut teorema 2.1.6 matrik $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ definit positif sehingga \mathbf{L} minimal dan $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$ ada sehingga

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \quad \dots(2.3.10)$$

disebut penaksir kuadrat terkecil biasa (OLS).

2.3.3. Penaksir linier tak bias terbaik (*Best linier unbiased estimator*)

Suatu penaksir adalah Penaksir linier tak bias terbaik (BLUE) jika penaksir tersebut merupakan penaksir terbaik, linier dan tak bias. Suatu penaksir dikatakan penaksir terbaik jika dalam kelas penaksir linier tak bias adalah penaksir yang mempunyai variansi minimum.

Definisi 2.3.1

Suatu statistik $\hat{\beta}$ disebut penaksir tak bias dari parameter β jika $E(\hat{\beta}) = \beta$.

Dapat ditunjukkan bahwa penaksir OLS (2.3.10) adalah penaksir tak bias untuk β sebagai berikut :

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= E((\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}) \\ &= E((\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T(\mathbf{X}\beta + \epsilon)) \\ &= E((\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{X}\beta + (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\epsilon) \\ &= \beta \end{aligned}$$

Materi Penunjang

Dengan mensubstitusikan $y = X\beta + \varepsilon$ kedalam persamaan (2.3.10) didapatkan

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (X^T X)^{-1} X^T (X\beta + \varepsilon) \\ &= \beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon\end{aligned}$$

Oleh karena itu $\hat{\beta} - E(\hat{\beta}) = \hat{\beta} - \beta = (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon$, sehingga akan didapatkan

$$\begin{aligned}\text{var-cov}(\hat{\beta}) &= E((\hat{\beta} - E(\hat{\beta})) (\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))^T) \\ &= E(((X^T X)^{-1} X^T \varepsilon) ((X^T X)^{-1} X^T \varepsilon)^T) \\ &= E(X^T X)^{-1} X^T \varepsilon \varepsilon^T X (X^T X)^{-1} \\ &= (X^T X)^{-1} X^T \sigma^2 I_n X (X^T X)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X^T X)^{-1}\end{aligned}$$

Definisi 2.3.2

y adalah vektor random. Misal C dan c adalah matrik dan vektor dengan ukuran yang sesuai, sehingga vektor

$$\hat{\beta} = Cy + c \quad \dots(2.3.11)$$

adalah penaksir linier dari β . $\hat{\beta}$ adalah penaksir linier homogen jika $c = 0$.

Definisi 2.3.3

Rata-rata sesatan kuadrat (*Mean Square Error*) suatu penaksir $\hat{\beta}$ didefinisikan

$$\text{MSE}(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^T$$

MSE untuk penaksir linier homogen $\hat{\beta} = Cy$ adalah sebagai berikut :

Materi Penunjang

$$\begin{aligned}
 \text{MSE}(\hat{\beta}) &= E(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^T \\
 &= E[(CX - I)\beta + C\varepsilon][(CX - I)\beta + C\varepsilon]^T \\
 &= \sigma^2 CC^T + [(CX - I)\beta][(CX - I)\beta]^T \quad \dots(2.3.12)
 \end{aligned}$$

dengan $\hat{\beta} - \beta = (CX - I)\beta + C\varepsilon$; bias = $E(\hat{\beta}) - \beta = (CX - I)\beta$ dan

$$\text{Var-cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2 CC^T$$

Definisi 2.3.4

Skalar rata-rata sesatan kuadrat (*scalar mean square error*) suatu penaksir $\hat{\beta}$ didefinisikan

$$\text{SMSE}(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta} - \beta)^T(\hat{\beta} - \beta)$$

dengan operator trace diperoleh $\text{SMSE}(\hat{\beta}) = \text{tr} E(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^T = \text{tr} \text{MSE}(\hat{\beta})$

Definisi 2.3.5

Kerugian sesatan kuadrat penaksir $\hat{\beta}$ terhadap β adalah

$$L(\hat{\beta}, A) = (\hat{\beta} - \beta)^T A (\hat{\beta} - \beta)$$

dengan A adalah matrik definit positif dengan ukuran $(p \times p)$.

Definisi 2.3.2

Resiko kuadrat dari penaksir $\hat{\beta}$ adalah

$$\begin{aligned}
 R(\hat{\beta}, A) &= E L(\hat{\beta}, A) \\
 &= E (\hat{\beta} - \beta)^T A (\hat{\beta} - \beta)
 \end{aligned}$$

Materi Penunjang

Dipergunakan operator trace didapat hubungan antara resiko kuadrat $R(\hat{\beta}, A)$ dan rata-rata sesatan kuadrat MSE sebagai berikut :

$$\begin{aligned} R(\hat{\beta}, A) &= \text{tr } A E(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^T \\ &= \text{tr } (A \text{MSE}(\hat{\beta})) \end{aligned}$$

hal ini memperlihatkan ekuivalennya peminimalan resiko $R(\hat{\beta}, A)$ atau $\text{MSE}(\hat{\beta})$ untuk penaksir $\hat{\beta}$.

Teorema 2.3.1

Jika diberikan dua estimator β_1^* dan β_2^* maka dua pernyataan ini ekuivalen

- (i) $\text{MSE}(\beta_1^*) - \text{MSE}(\beta_2^*) \geq 0$
- (ii) $R(\beta_1^*, A) - R(\beta_2^*, A) \geq 0$

Bukti :

$$\begin{aligned} R(\beta_1^*, A) - R(\beta_2^*, A) &= \text{tr } A \{ \text{MSE}(\beta_1^*) - \text{MSE}(\beta_2^*) \} \\ &= \text{tr } A \Delta \end{aligned}$$

dengan $\Delta = \text{MSE}(\beta_1^*) - \text{MSE}(\beta_2^*)$

menurut teorema 2.1.7 $\text{tr} A \Delta \geq 0$ untuk semua $A \geq 0$ jika dan hanya jika $\Delta \geq 0$.

Materi Penunjang

Teorema 2.3.2 (teorema gaus-Markov)

Model regresi (2.3.7)

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \sim (0, \sigma^2 \mathbf{I}_n), r(\mathbf{X}) = p$$

penaksir OLS (2.3.10) $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ dengan $\text{Var-cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ adalah penaksir BLUE dari $\boldsymbol{\beta}$.

Bukti :

Penaksir OLS (2.3.9) adalah penaksir linier homogen $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{C}_0 \mathbf{y}$ dengan

$\mathbf{C}_0 = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$ dan merupakan penaksir linier tak bias.

Dalam bentuk umum penaksir linier homogen $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{C} \mathbf{y}$ dengan $\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{C} \mathbf{X} - \mathbf{I}) \boldsymbol{\beta} + \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}$

dan bias $E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) - \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{C} \mathbf{X} - \mathbf{I}) \boldsymbol{\beta}$. Misalkan penaksir $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ tak bias, $E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$ ekuivalen untuk

$\mathbf{C} \mathbf{X} = \mathbf{I}$ dapat ditulis baris demi baris $\mathbf{c}_i \mathbf{X} = \mathbf{e}_i$, dan didapatkan fungsi kuadrat resiko

$$R(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{I}) = \text{tr MSE}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{C}^T).$$

Selanjutnya variansi akan minimal dengan $\min \{ \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{C}^T) \mid \mathbf{C} \mathbf{X} = \mathbf{I} \}$ atau ekuivalen

meminimalkan fungsi lagrange :

$$\begin{aligned} h(\mathbf{C}, \boldsymbol{\lambda}_i) &= R(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{I}) - 2 \sum \boldsymbol{\lambda}_i^T (\mathbf{c}_i \mathbf{X} - \mathbf{e}_i)^T \\ &= \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{C}^T) - 2 \sum \boldsymbol{\lambda}_i^T (\mathbf{c}_i \mathbf{X} - \mathbf{e}_i)^T \end{aligned}$$

Materi Penunjang

dengan λ_i adalah vektor ($p \times 1$) perkalian lagrange dan dimisalkan

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1^T \\ \vdots \\ \lambda_p^T \end{bmatrix}$$

fungsi lagrange $h(C, \lambda_i)$ dideferensialkan terhadap C dan Λ didapatkan persamaan normal sebagai berikut :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial C} &= 2\sigma^2 C - 2\Lambda X^T = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial \Lambda} &= CX - I = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.3.12)$$

dan $\frac{\partial^2 h}{\partial CC^T} = 2\sigma^2 I$

dengan menyelesaikan persamaan normal (2.3.12) tersebut didapatkan

$$\Lambda = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

$$C = (X^T X)^{-1} X^T$$

dan karena $\frac{\partial^2 h}{\partial CC^T}$ definit positif maka $h(C, \lambda_i)$ minimal sehingga terbukti variansi

minimal untuk $C = C_0$. Jadi penaksir OLS memiliki sifat BLUE.

Materi Penunjang