BAB II
MATERI PENUNJANG

2.1. KONSEP DASAR TEORI ANTRIAN.

Menurut **Anthanasios Papoulis** (1965) istilah *Antrian* digunakan untuk menggambarkan sejumlah kelas gejala (fenomena) yang memuat kedatangan, penantian, pelayanan, dan keberangkatan. Dan menurut **Siagian P.** (1987) *Suatu Antrian* adalah suatu *garis tunggu* dari pelanggan (satuan/unit) yang memerlukan pelayanan. Sedangkan pengetahuan matematika dari kejadian garis tunggu ini disebut *Teori Antrian.* Kejadian garis tunggu ini timbul disebabkan oleh kebutuhan akan pelayanan melebihi kemampuan (kapasitas) pelayanan dan fasilitas pelayanan.

Sistem Antrian.

Sistem antrian adalah keseluruhan kegiatan atau pelayanan yang diberikan kepada masukan sejak masukan datang ke dalam sistem sampai selesai mendapatkan pelayanan.

Sistem antrian dapat dibagi atas dua komponen, yaitu :

a) *Antrian* yang memuat pelanggan atau sistem-sistem yang memerlukan pelayanan.

b) *Fasilitas pelayanan* yang memuat pelayan dan saluran pelayanan.

Sesuai dengan tingkah lakunya sistem antrian dapat dibedakan atas:

a) <u>*Sumber masukan.*</u>

Sumber masukan adalah kumpulan orang atau barang (satuan /unit) yang masuk ke dalam sistem antrian untuk mendapatkan pelayanan.

Sumber masukan ini bisa terbatas ataupun tidak terbatas.

b) *Proses Masukan.*

Proses masukan adalah suatu proses pembentukan suatu bentuk antrian akibat kedatangan pelanggan.

c) *Mekanisme Pelayanan.*

Ada tiga aspek yang harus diperhatikan dalam mekanisme pelayanan, yaitu:

i) *Tersedianya pelayanan.*

Mekanisme pelayanan tidak selalu tersedia untuk setiap saat, artinya pada waktu tertentu pelayan tidak memberikan pelayanan.

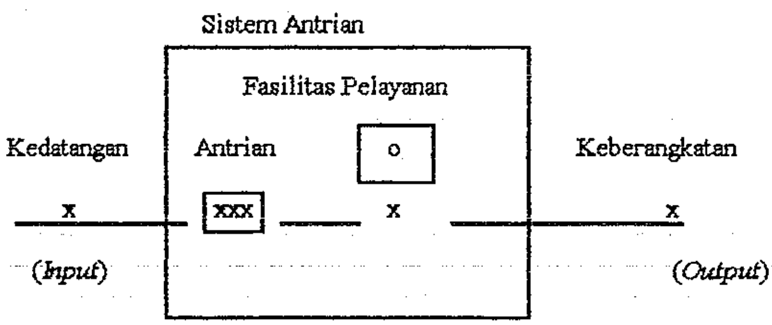
ii) *Kapasitas pelayanan.*

Kapasitas dari mekanisme pelayanan di ukur berdasarkan jumlah pelanggan yang dapat dilayani secara bersamaan.

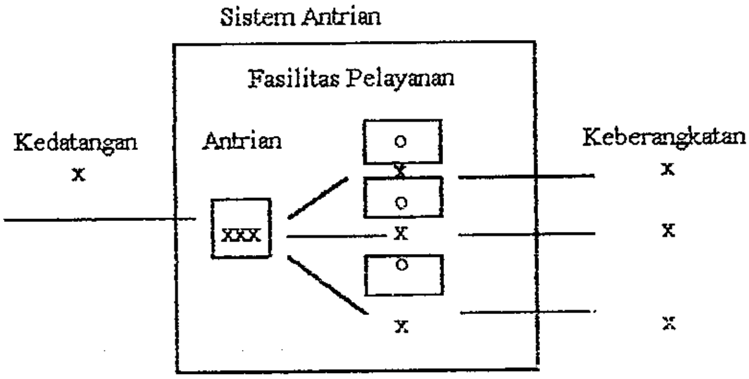
iii) *Lamanya pelayanan.*

Yang dimaksud dengan lamanya pelayanan adalah waktu yang dibutuhkan untuk melayani seorang pelanggan.

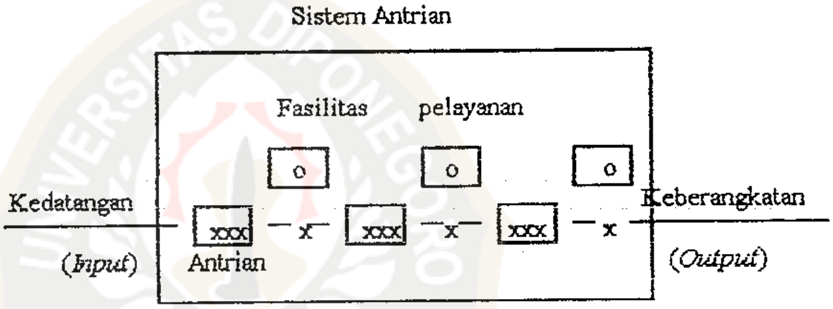
Berdasarkan dari ketiga sifat ini maka dapat membentuk bermacam-macam sistem antrian, diantaranya :



Gambar 2.1.1 *(a) Antrian tunggal pelayan tunggal*



Gambar 2.1.1 *(b) Antrian tunggal pelayan ganda paralel.*



Gambar 2.1.1 *(c) Antrian tunggal pelayan ganda dalam seri*

Disiplin Pelayanan.

Disiplin pelayanan adalah kebiasaan atau kebijakan yang biasa di pakai dalam memilih masukan dalam sistem untuk mendapatkan pelayanan. Ada empat bentuk disiplin pelayanan yang biasa digunakan dalam praktek, yaitu :

1) **FIFO** *(First In First Out)* atau **FCFS** *(First Come First Served)* artinya masukan yang datang terlebih dahulu akan mendapatkan pelayanan terlebih dahulu.
2) **LIFO** *(Last In First Out)* atau **LCFS** *(Last Come First Served)* artinya masukan yang datang terakhir akan mendapatkan pelayanan terlebih dahulu.

3) **SIRO** *(Service In Random Order)* artinya urutan pelayanan didasarkan pada peluang secara acak tanpa memperhatikan urutan kedatangan.

4) **PS** *(Priority Service)* artinya urutan pelayanan diberikan berdasarkan pada urutan prioritas dari masukan yang ada tanpa memperhatikan waktu kedatangan dari masukan.

2.2. MODEL - MODEL ANTRIAN.

Model - model antrian diklasifikasikan berdasarkan susunan sebagai berikut

$$(a/b/c) : (d/e/f)$$

dimana simbol a, b, c, d, e dan f merupakan elemen dasar dari model berikut :

a = Distribusi kedatangan.

b = Distribusi waktu pelayanan (atau keberangkatan).

c = Jumlah saluran pelayanan paralel dalam sistem.

d = Disiplin pelayanan.

e = Batas kapasitas maksimum yang diizinkan dalam sistem (dalam antrian ditambah dalam pelayanan).

f = Besarnya populasi masukan.

Notasi standart pengganti simbol a dan b untuk kedatangan dan keberangkatan diberikan kode - kode sebagai berikut :

M = Distribusi kedatangan atau distribusi keberangkatan poisson (atau ekivalen dengan distribusi antar kedatangan atau distribusi waktu pelayanan eksponensial).

D $\equiv$ Antar kedatangan atau waktu pelayanan konstan (tetap).

$E_k \equiv$ Distribusi waktu antar kedatangan atau distribusi waktu pelayanan erlang atau gamma dengan parameter k *(k=1,2,..., ∞)*.

GI $\equiv$ Distribusi kedatangan umum independent (atau waktu antar kedatangan).

G $\equiv$ Distribusi keberangkatan umum (atau waktu pelayanan).

Untuk huruf c digunakan bilangan - bilangan bulat positif (1,2,...,∞) yang menyatakan jumlah pelayanan paralel.

Untuk huruf d, dipakai kode - kode pengganti yaitu : FIFO/FCFS, LIFO/LCFS, SIRO, PS atau GD.

Untuk huruf e dan f, digunakan kode N (menyatakan jumlah terbatas) dan ∞ (menyatakan jumlah tak terbatas) untuk satuan - satuan dalam sistem antrian dan populasi masukan.

Sebagai illustrasi dari notasi tersebut diberikan contoh model :

(M /D/10) : (GD/N/∞)

Pada model ini kedatangan berdistribusi poisson, waktu pelayanan (atau keberangkatan) konstan, dan jumlah fasilitas pelayanan paralel adalah 10. Disiplin pelayanan adalah umum (GD) dalam arti bahwa hal itu bisa FIFO, LIFO, SIRO atau PS, jumlah maksimum pelanggan dalam sistem antrian adalah N dan besarnya populasi masukan tak terbatas.

2.3. VARIABEL ACAK

Pandang Ω adalah ruang sampel, S adalah koleksi dari peristiwa-peristiwa (merupakan himpunan bagian dari Ω), dan P(.) adalah fungsi peluang dengan domain S. Dan didefinisikan ruang peluang $(\Omega, S, P(.))$.

Definisi 2.3.1 Variabel acak

Diberikan ruang peluang $(\Omega, S, P(.))$, suatu variabel acak yang dinotasikan dengan X atau X(.), adalah suatu fungsi dengan domain Ω dan kodomain himpunan bilangan riil R atau R disebut garis yang memenuhi persyaratan bahwa untuk setiap bilangan riil r terdapatlah peristiwa $S_r = \{\omega; X(\omega) \leq r\} \in S$.

Definisi 2.3.2 Variabel Acak Diskret

Variabel acak X didefinisikan variabel acak diskret, jika daerah hasil dari X dapat dihitung.

Definisi 2.3.3 Variabel Acak Kontinu

Variabel acak X disebut variabel acak kontinu, jika daerah hasil dari variabel acak X tidak dapat dihitung.

Contoh 2.3.1 :

Pertimbangkan percobaan pelemparan koin tunggal. Pandang variabel acak menotasikan bilangan Angka, Ω = {Angka,Gambar} dan $X(\omega) = 1$ jika ω = Angka, dan $X(\omega) = 0$ jika ω = Gambar, sehingga variabel acak X menggabungkan bilangan riil dengan setiap hasil percobaan. Secara matematika dapat ditunjukan bahwa variabel acak X memenuhi definisi. Akan ditunjukan bahwa $\{\omega ; X(\omega) \leq r\}$ termuat dalam S, untuk setiap bilangan riil r. Dalam S ada empat himpunan bagian, yaitu {}, {Angka}, {Gambar} dan Ω = {Angka,Gambar}. Jika $r < 0$, $\{\omega \,;\, X(\omega) \le r\} = \{\}$ dan jika $0 \le r < 1$, $\{\omega \,;\, X(\omega) \le r\}$ = {Gambar} dan jika $r \ge 1$, $\{\omega \,;\, X(\omega) \le r\} = \Omega$ = {Angka,Gambar}. Karena untuk setiap r, $\{\omega \,;\, X(\omega) \le r\}$ merupakan himpunan bagian dari S maka X(.) adalah variabel acak.

Fungsi Distribusi Kumulatif dan Fungsi Densitas

Definisi 2.3.4 Fungsi Distribusi Kumulatif

Fungsi distribusi kumulatif variabel acak X, dinotasikan dengan $F_x(.)$, didefinisikan bahwa fungsi dengan domain garis riil dan kodomain interval [0,1], yang memenuhi $F_x(x) = P(X \le x) = P(\{\omega \,;\, X(\omega) \le x\})$ untuk setiap bilangan riil x.

Definisi 2.3.5. Fungsi Densitas diskret

Jika X adalah variabel acak diskret dengan nilai-nilai tertentu $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sehingga fungsinya dinotasikan dengan $f_x(.)$ dan didefinisikan oleh :

$$f_x(x) = \begin{cases} P(X=x_j) & \text{jika} \quad x = x_j, \quad j = 1,2,\ldots,n,\ldots \\ 0 & \text{jika} \quad x \ne x_j \end{cases}$$

maka $f_x(x)$ disebut densitas diskret untuk X.

Definisi 2.3.6 Fungsi Densitas Peluang

Jika X adalah variabel acak kontinu maka fungsi $f_x(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$ untuk setiap bilangan riil x disebut fungsi densitas peluang dari X.

Definisi 2.3.7 :

Setiap fungsi $f_x(.)$ dengan domain garis riil dan kodomain $[0,\infty)$ disebut fungsi densitas peluang jika dan hanya jika :

(i) $f(x) \geq 0$, untuk semua x.

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(iii) $P(a < x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

Fungsi Distribusi Bersama

Definisi 2.3.8 Fungsi Distribusi Kumulatif Bersama

Pandang $X_1, X_2, \ldots, X_k$, adalah k variabel acak, semua terdefinisi pada ruang peluang $(\Omega, S, P(.))$. Fungsi distribusi kumulatif bersama dari $X_1, X_2, \ldots, X_k$ dinotasikan dengan $F_{X_1, X_2, \ldots, X_k}(., ., \ldots, .)$ adalah didefinisikan sebagai $P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_k \leq x_k)$ untuk semua $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Definisi 2.3.9 Fungsi Distribusi Kumulatif Marginal

Jika $F_{x,y}(.x,y)$ adalah fungsi distribusi kumulatif bersama dari X dan Y, maka $F_x(x) = F_{x,y}(x,\infty)$ dan $F_y(x) = F_{x,y}(\infty,y)$ disebut fungsi distribusi kumulatif marginal.

Definisi 2.3.10 Fungsi Densitas Diskret Bersama

Jika $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ adalah variabel acak diskret bersama berdimensi-k, maka fungsi densitas diskret bersama dari $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ dinotasikan dengan

$f_{x_1,x_2,\ldots,x_k}(.,.,\ldots,.)$ didefinisikan sebagai :

$$f_{x_1,x_2,\ldots,x_k} = \begin{cases} P(X_1=x_1, X_2=x_2, \ldots, X_k=x_k), & \textit{untuk} \quad x_1, x_2, \ldots, x_k \\ 0, & \textit{lainnya} \end{cases}$$

Definisi 2.3.11 Fungsi Densitas Diskret Marginal

Jika X dan Y adalah variabel acak diskret bersama, maka $f_x(.)$ dan $f_y(.)$ disebut fungsi densitas diskret marginal. Secara umum, pandang setiap himpunan bagian $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{im}$, dari variabel acak diskrit barsama ($X_1, X_2, \ldots, X_k$) maka $f_{x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_m}}(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im})$ disebut densitas marginal dari variabel acak dimensi -k ($X_1, X_2, \ldots, X_k$).

Definisi 2.3.12 Fungsi densitas peluang bersama

Jika variabel acak berdimensi-k ($X_1, X_2, \ldots, X_k$) disebut variabel acak kontinu berdimensi-k jika dan hanya jika terdapat fungsi $f_{x_1,x_2,\ldots,x_k}(.,.,\ldots,.)$ =

$\int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f_{x_1,x_2,\ldots,x_k}(u_1, u_2, \ldots, u_k)\, du_1\, du_2 \ldots du_k$ untuk semua ($x_1, x_2, \ldots, x_k$).

Dan $f_{x_1,x_2,\ldots,x_k}(.,.,\ldots,.)$ didefinisikan sebagai fungsi densitas peluang.

Definisi 2.3.13 Fungsi densitas peluang marginal

Jika X dan Y adalah variabel acak kontinu bersama, maka $f_x(.)$ dan $f_y(.)$ disebut Fungsi densitas peluang marginal. Secara umum, pandang setiap himpunan bagian $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{im}$, dari variabel acak diskrit barsama ($X_1, X_2, \ldots, X_k$)

maka $f_{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}}(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im})$ disebut densitas marginal dari variabel acak dimensi -k $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$.

Catatan :

Jika X dan Y kontinu bersama, maka :

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\, dy \text{ dan } f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\, dx$$

karena $f_x(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left[\int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(u,y)\, dy \right) du \right]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\, dy$$

dan $f_y(y) = \dfrac{dF_y(y)}{dy} = \dfrac{d}{dy}\left[\int_{-\infty}^{y} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,u)\, dx \right) du \right]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\, dx \qquad \square$$

2.4. FUNGSI KONVEX

Kombinasi Linier Konvex dan Himpunan Konvex.

Pandang X_1, X_2 adalah dua titik dalam E_n.

Definisi 2.4.1 :

Titik $X = (1-\alpha)X_1 + \alpha X_2$, $0 \leq \alpha \leq 1$ disebut kombinasi linier konvex dari dua titik X_1 dan X_2.

Contoh 2.4.1 :

Dalam E_3, dengan notasi $X = (x,y,z)$, dari definisi 2.4.1. dipenuhi bahwa :

$x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2,$

$y = (1-\alpha)y_1 + \alpha y_2,$

$z = (1-\alpha)z_1 + \alpha z_2,$

Bentuk standart persamaan garis melalui titik $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$, dan $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$, adalah:

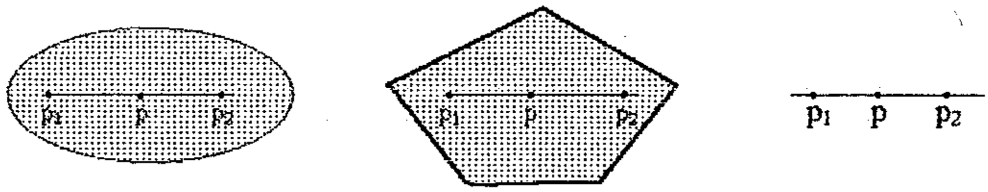
$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2} = \alpha$$

Definisi 2.4.2 :

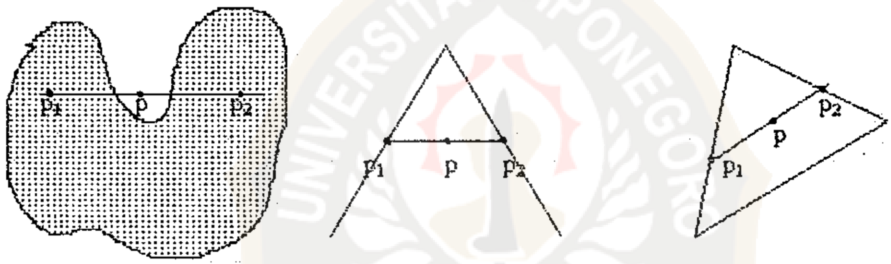
Himpunan $H \subseteq E_n$ disebut himpunan konvex jika kombinasi linier konvex dari setiap dua titik dalam H juga anggota H Dengan kata lain, H adalah himpunan konvex jika $X_1, X_2 \in H$ maka $X \in H$, dimana $X = (1-\alpha)X_1 + \alpha X_2$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Contoh 2.4.2 :

Berikut ini diberikan beberapa contoh sederhana dari himpunan konvex dan bukan konvex dalam E_2 yang disajikan dalam gambar 2.4.1 :



Himpunan Konvex.



Bukan himpunan konvex.

Gambar 2.4.1. *Himpunan konvex dan bukan konvex*

Definisi 2.4.3 :

Pandang $X_i \in E_n$, dan pandang α_i adalah bilangan riil non negatif sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, maka :

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_m X_m.$$

disebut kombinasi linier konvex dari titik X_i, $1 \le i \le m$.

Theorema 2.4.1 :

Himpunan H adalah himpunan konvex jika dan hanya jika setiap kombinasi linier konvex dari titik-titik dalam H juga anggota H.

Bukti :

Pertama, akan dibuktikan syarat cukup.

(Setiap kombinasi linier konvex dari titk dalam H) $\in$ H $\Rightarrow$ H adalah himpunan konvex.

Dari definisi 2.4.2. dipenuhi bahwa :

Jika setiap kombinasi linier konvex dari dua titik dalam H anggota H maka H adalah himpunan konvex.

Jadi syarat cukup dipenuhi.

Kedua, untuk membuktikan syarat perlu dengan menggunakan metode induksi matematika.

Langkah 1)

Untuk i = 2.

Dari definisi 2.4.2 dipenuhi bahwa :

H merupakan himpunan konvex jika X_1, $X_2 \in$ H maka $X \in$ H dimana $X = (1-\alpha)X_1 + \alpha X_2$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Jadi untuk i = 2 benar.

Langkah 2)

Andaikan benar untuk i = r titik, akan dibuktikan bahwa hal ini juga benar untuk i = r + 1 titik.

Untuk i = r titik berlaku :

Pandang H konvex $\Rightarrow$ jika $X_i \in$ H maka $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i X_i \in$ H, dimana $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$,

$0 \leq i \leq r$.

Selanjutnya akan dibuktikan benar, jika $X_i \in$ H maka $\sum_{i=1}^{r+1} \beta_i X_i \in$ H, dimana

$\sum_{i=1}^{r+1} \beta_i = 1$, $\beta_i \geq 0$, $0 \leq i \leq r+1$.

Dari sini terdapat dua keadaan yaitu:

i) $\beta_{r+1} = 0$ atau

ii) $\beta_{r+1} \neq 0$

i) $\beta_{r+1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r+1} \beta_i X_i = \sum_{i=1}^{r} \beta_i X_i \in$ H, $X_i \in$ H, sesuai hipotesa.

ii) $\beta_{r+1} \neq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r+1} \beta_i X_i = \sum_{i=1}^{r} \beta_i X_i + \beta_{r+1} X_{r+1}$

$$= \left(\sum_{i=1}^{r} \beta_i\right) \frac{\sum_{i=1}^{r} \beta i x_i}{\sum_{i=1}^{r} \beta_i} + \beta_{r+1} X_{r+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \beta_i Y + \beta_{r+1} X_{r+1}$$

dimana $$Y = \frac{\sum_{i=1}^{r} \beta i x_i}{\sum_{i=1}^{r} \beta_i} = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i X_i,\ \sum_{i=1}^{r} \gamma_i = 1.$$

kemudian dengan memenuhi hipotesa, $Y \in$ H.

Dari sini diperoleh :

$$\sum_{i=1}^{r+1} \beta_i X_i = \left(\sum_{i=1}^{r} \beta_i\right) Y + \beta_{r+1} X_{r+1} \in \mathrm{H}$$

Karena persamaan tersebut merupakan kombinasi linier konvex dari dua titik Y dan titik $X_{r+1} \in \mathrm{H}$ maka dari definisi 2.4.2. hipotesa adalah konvex.

Jadi syarat perlu dipenuhi.

Karena syarat perlu dan cukup dipenuhi maka **theorema 2.4.1.** terbukti.

Fungsi Konvex.

Definisi 2.4.4 :

Pandang $X \in \mathrm{H} \subseteq \mathrm{E}_n$ dimana H adalah himpunan konvex.

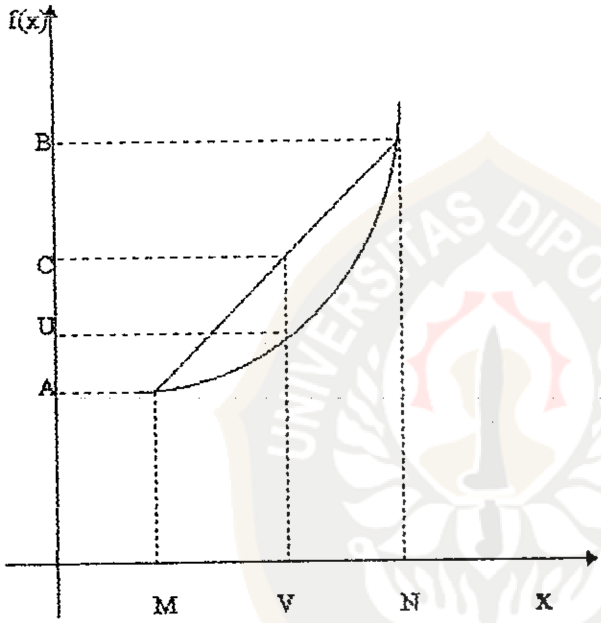
Fungsi $f(X)$, disebut fungsi konvex, jika untuk setiap dua titik X_1 dan X_2 dalam H.

$$f(X) \leq (1-\alpha)\, f(X_1) + \alpha\, f(X_2)$$

untuk seluruh $X = (1-\alpha)X_1 + \alpha X_2$ dan $0 \leq \alpha \leq 1$.

Fungsi ini disebut fungsi konvex kuat *(strickly convex function)* jika pernyataan $\leq$ dapat diganti dengan $<$. Dan fungsi ini dinamakan fungsi konkaf jika pernyataan $\leq$ dapat diganti dengan $\geq$ atau fungsi konkaf kuat *(strickly concave function)* jika pernyataan $\leq$ diganti dengan $>$.

Sebagai illustrasi diberikan dalam E_2, pandang x_1 dan x_2 adalah dua titik M dan N yang terletak pada sumbu-x (gambar 2.4.2.) dan pandang kombinasi linier konvex dari x_1 dan x_2 adalah x yang dinyatakan dengan titik V pada segmen garis MN. Dengan f(x) yang terletak pada sumbu-y, sedemikian sehingga digambarkan pada kurva, $A = f(x_1)$, $B = f(x_2)$, $U = f(x)$. Jika $x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$, maka $C = (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2)$.



Gambar 2.4.2. *Fungsi Konvex.*

Karena $U \leq C$ untuk semua V dalam MN maka f(x) adalah fungsi konvex. □

2.5. FUNGSI LAGRANGE, TITIK SADEL DAN THEORI KUHN - TUCKER UNTUK OPTIMASI YANG BERKENDALA.

Salah satu permasalahan umum program matematis adalah mencari nilai minimum dari fungsi f(X) untuk semua $X=(x_1,x_2,...,x_n)^t$ yang memenuhi kendala :

$$g_i(X) \leq 0,\ X \geq 0,$$

dimana f(X) dan $g_i(X)$, $1 \leq i \leq m$, adalah fungsi yang bernilai riil dari X dalam E_n.

Secara formal permasalahan optimasi tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut :

Meminimalkan $f(X),\ X \in E_n$. (2.5.1)

Kendala $g_i(X) \leq 0,\ 1 \leq i \leq m$ (2.5.2)

$X \geq 0$ (2.5.3)

dimana $f(X), g_i(X)$ adalah fungsi konvex. (2.5.4)

Fungsi Lagrange dan Titik Sadel.

Dengan fungsi tujuan f(X), fungsi kendala $g_i(X)$, $1 \leq i \leq m$ dan vektor $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)^t \in E_m$. Pandang fungsi Lagrange $F(X,\alpha)$ yang didefinisikan dengan :

$$F(X,\alpha) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i(X) \qquad (2.5.5a)$$

$$= f(X) + \alpha^t G(X) \qquad (2.5.5b)$$

dimana G(X) merupakan vektor fungsi

$$G(X)=(g_1(X),g_2(X),...,g_m(X))^t$$

Pandang juga $\alpha \geq 0$ (2.5.6.)

Dan α adalah faktor pengali lagrange.

Definisi 2.5.1 :

Fungsi $F(X, \alpha)$ disebut mempunyai titik sadel pada (X^*, α^*) jika $F(X, \alpha^*) \leq F(X^*, \alpha^*) \leq F(X^*, \alpha)$

Turunan Berarah

Pandang $X \in E_n$ dan $f(X)$ adalah fungsi differensiabel yang bernilai riil. Pandang α adalah vektor satuan dalam E_n. Dan $\beta\alpha$, $X + \beta\alpha$ juga vektor dalam E_n, dimana $\beta \in R$.

Definisi 2.5.2 :

Turunan berarah dari $f(X)$ dalam arah α didefinisikan sebagai

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{f(X + \beta\alpha) - f(X)}{\beta} = \alpha^t \frac{\partial f(X)}{\partial X}$$

Theorema Kuhn-Tucker.

Theorema 2.5.1 :

Jika permasalahan dalam persamaan (2.5.1) - (2.5.4), fungsi $f(X)$ dan semua fungsi $g_i(X)$ adalah differensiabel, maka syarat bahwa (X^*, α^*) adalah titik sadel dari $F(X,\alpha)$ adalah ekivalen dengan syarat-syarat berikut :

$$\left(\frac{\partial F(X,\alpha^*)}{\partial x_j}\right) \geq 0 \qquad \text{di } X = X^*, \quad 1 \leq j \leq n \qquad (2.5.7)$$

$$X^{*T}\left(\frac{\partial F(X,\alpha^*)}{\partial X}\right)=0 \qquad \text{di } X=X^* \qquad (2.5.8.)$$

$$X^* \geq 0 \qquad (2.5.9)$$

$$\left(\frac{\partial F(X^*,\alpha)}{\partial \alpha_i}\right)\leq 0 \qquad \text{di } X=X^*, \quad 1\leq i\leq m \qquad (2.5.10)$$

$$\alpha^{*T}\left(\frac{\partial F(X^*,\alpha)}{\partial \alpha}\right)=0 \qquad \text{di } \alpha=\alpha^* \qquad (2.5.11)$$

$$\alpha^* \geq 0 \qquad (2.5.12)$$

dimana $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^I$ dan $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)^I$.

Dalam hal ini $\frac{\partial F}{\partial X}=(\frac{\partial F}{\partial x_1},\frac{\partial F}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial F}{\partial x_n})^I$ dan $\frac{\partial F}{\partial \alpha}=(\frac{\partial F}{\partial \alpha_1},\frac{\partial F}{\partial \alpha_2},\ldots,\frac{\partial F}{\partial \alpha_m})^I$

Bukti :

Karena (X^*,α^*) adalah titik sadel dari fungsi $F(X,\alpha)$, maka dari definisi (2.5.1) dipenuhi :

$$F(X^*,\alpha) \leq F(X^*,\alpha^*) \leq F(X,\alpha^*) \qquad (2.5.13)$$

karena $F(X,\alpha^*) \leq f(X) + \alpha^{*I}G(X)$ adalah kombinasi linier dari fungsi konvex dan $\alpha^* \geq 0$, maka $F(X^*,\alpha)$ adalah fungsi konvex dari X.

Dari persamaan (2.5.13) :

$$F(X^*,\alpha^*) \leq F(X,\alpha^*), \qquad X\geq 0$$

ini berarti X^* merupakan titik minimum global dari $F(X,\alpha)$ dalam himpunan konvex

$X^* \geq 0$, maka untuk semua X dalam H berlaku :

$$F(X, \alpha^*) \geq F(X^*,\alpha^*)$$

Demikian juga untuk setiap X dalam H, $\beta X + (1-\beta)X^*$ juga dalam H, $\beta \in R$.

$$F((\beta X + (1-\beta)X^*),\alpha^*) \geq F(X^*,\alpha^*)$$

$$\Rightarrow F((X^* + \beta(X-X^*)),\alpha^*) \geq F(X^*,\alpha^*)$$

$$\Rightarrow F((X^* + \beta(X-X^*)),\alpha^*) - F(X^*,\alpha^*) \geq 0$$

dibagi dengan β dan ambil limit untuk $\beta \to 0$,

$$\underset{\beta \to 0}{\text{Limit}} \quad \frac{F((X^* + \beta(X-X^*)),\alpha^*) - F(X^*,\alpha^*)}{\beta} \geq 0$$

dari definisi 2.5.2 dipenuhi :

$$(X-X^*)^t \left(\frac{\partial F(X,\alpha^*)}{\partial X} \right) \geq 0 \qquad \text{di} \quad X = X^*$$

atau

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^*) \left(\frac{\partial F(X,\alpha^*)}{\partial x_j} \right) \geq 0 \qquad \text{di} \quad X = X^*. \qquad (2.5.14)$$

Pandang x_k^* adalah komponen ke-k dari X^*.

Pertama, assumsikan bahwa $x_k^* \neq 0$, ambil $x_j = x_j^*$ untuk semua j kecuali $j = k$, maka persamaan (2.5.14) menjadi :

$$(x_k - x_k^*) \left(\frac{\partial F(X,\alpha^*)}{\partial x_k} \right) \geq 0 \qquad \text{di} \quad X = X^*. \qquad (2.5.15)$$

karena $x_k^* \neq 0$ maka dapat dipilih sembarang x_k sedemikian sehingga berlaku $0< x_k^*<x_k$ jika hal ini dipenuhi maka persamaan (2.5.15) bernilai positif atau dapat juga berlaku $0<x_k<x_k^*$, dan jika hal ini dipenuhi maka persamaan (2.5.15) dapat bernilai negatif, tetapi hal ini tidak mungkin, maka syarat persamaan (2.5.15) harus memenuhi pernyataan berikut :

$$\left(\frac{\partial F(X,\alpha^*)}{\partial x_k}\right) = 0\,, \qquad \text{di } X = X^* \qquad (2.5.16)$$

Hal ini dipenuhi untuk semua j, untuk $x_j^* \neq 0$. Dalam kenyataannya, jika $X^*>0$, kita dapat menduga bahwa :

$$\left(\frac{\partial F(X,\alpha^*)}{\partial X}\right) = 0\,, \qquad \text{di } X = X^* \qquad (2.5.17)$$

Dari fakta tersebut jika X^* adalah titik interior untuk $X \geq 0$, minimum global juga bisa merupakan minimum lokal dan gradien pada titik tersebut adalah 0.

Kedua, jika X^* adalah titik batas, kemudian terdapat komponen $x_k^* = 0$, dan ambil $x_j = x_j^*$ untuk semua j kecuali j = k, sehingga dari persamaan (2.5.15) diperoleh

$$x_k\left(\frac{\partial F(X,\alpha^*)}{\partial x_k}\right) \geq 0 \qquad \text{di } X = X^*.$$

hal ini dipenuhi untuk semua $x_k > 0$,

$$\left(\frac{\partial F(X,\alpha^*)}{\partial x_k}\right) \geq 0 \qquad \text{di } X = X^*. \qquad (2.5.18)$$

Dengan menggabungkan persamaan (2.5.16) dengan (2.5.18) diperoleh :

$$\left(\frac{\partial F(X,\alpha^*)}{\partial x_k}\right) \geq 0 \qquad \text{di } X = X^*.$$

Jadi persamaan (2.5.7) terbukti.

Selanjutnya, jika $x_k^* = 0$,

$$x_k^* \left(\frac{\partial F(X,\alpha^*)}{\partial x_k} \right) = 0 \qquad \text{di } X = X^*$$

dan jika $x_k^* \neq 0$, kembali kepersamaan di atas dari sebab persamaan (2.5.16) :maka :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(\frac{\partial F(X,\alpha^*)}{\partial x_j} \right) = 0 \qquad \text{di } \; X = X^*.$$

atau

$$X^{*T} \left(\frac{\partial F(X,\alpha^*)}{\partial X} \right) = 0 \qquad \text{di } \; X = X^*$$

Jadi persamaan (2.5.8.) terbukti.

Untuk membuktikan persamaan (2.5.10) - (2.5.12), dari persamaan (2.5.13) diperoleh:

$$F(X^*,\alpha) \le F(X^*,\alpha^*)$$

dari sini diperoleh $\alpha^* \geq \alpha$, dan $F(X^*,\alpha)$ adalah fungsi linier dari α yang merupakan fungsi konkaf (semua fungsi linier adalah fungsi konvex juga bisa merupakan fungsi konkaf). Argumen untuk membuktikan dari persamaan (2.5.7) - (2.5.9) dipenuhi juga untuk membuktikan persamaan (2.5.10) - (2.5.12) dengan mengganti pernyataan ≥ dengan pernyataan ≤.

Syarat dari persamaan (2.5.7) - (2.5.12) dikenal dengan syarat Kuhn-Tucker.

Dengan memperhatikan fungsi $F(X,\alpha)$ yang didefinisikan dengan :

$$F(X,\alpha) = f(X) + \alpha^I G(X)$$

$$F(X,\alpha) = f(X) + \alpha^t G(X)$$

$$= f(X) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i(X)$$

dimana $X=(x_1, x_2, ..., x_n)^t$

syarat persamaan (2.5.7) - (2.5.12) dapat juga dituliskan dalam bentuk :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j}\right) \geq 0 \qquad \text{di } X = X^* \qquad (2.5.19)$$

$$j=1,2,\ldots,n$$

$$x_j^* \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j}\right) = 0 \qquad \text{di } X = X^* \qquad (2.5.20)$$

$$j=1,2,\ldots,n$$

$$x_j^* \geq 0 \qquad j=1,2,\ldots,n \qquad (2.5.21)$$

$$g_i(X^*) \leq 0 \qquad i=1,2,\ldots,m \qquad (2.5.22)$$

$$\alpha_i^* g_i(X^*) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,m \qquad (2.5.23)$$

$$\alpha_i^* \geq 0, \qquad i=1,2,\ldots,m. \qquad (2.5.24)$$

□