BAB II

MATERI PENUNJANG

Pengamatan yang dilakukan terhadap data runtun waktu harus mempunyai interval waktu yang sama, dimana pengamatan pada satu periode secara statistik tergantung pada pengamatan periode sebelumnya.

2.1 RUNTUN WAKTU UNIVARIAT

DEFINISI 2.1 (Proses Stokastik)

Misalkan T himpunan waktu yang diamati, t didalam T dan Z_t adalah hasil pengamatan pada saat t, sehingga $\{Z_t, t \in T\}$ disebut proses stokastik. (Praptono, hal. 2.2)

DEFINISI 2.2 (Proses Stokastik Stasioner)

Misalkan $Z_{t1}, Z_{t2}, \ldots, Z_{tn}$ adalah pengamatan pada saat t1,t2,…,tn dari proses dan distribusi peluang bersama yang berkaitan adalah P $(Z_{t1}, Z_{t2}, \ldots, Z_{tn})$. Jika P $(Z_{t1}, Z_{t2}, \ldots, Z_{tn})$ = P $(Z_{t1-k}, Z_{t2-k}, \ldots, Z_{tn-k})$ dimana k adalah selang waktu, maka proses $\{Z_t, t \in T\}$ disebut proses stokastik stasioner. (Cryer, hal. 14)

Untuk selanjutnya pada tugas akhir ini proses stokastik dituliskan sebagai proses. Pada proses ini mempunyai mean dan varian yang konstan, yaitu :

$$\text{Mean} = \mu = E[Z_t] = E[Z_{t-k}] \qquad (2.1.1)$$

$$\text{Varian} = \sigma^2 = E[Z_t - \mu]^2 = E[Z_{t-k} - \mu]^2 \qquad (2.1.2)$$

sedangkan taksiran untuk mean adalah :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t$$

dan taksiran untuk varian adalah

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{t=1}^{n}(Z_t - \bar{Z})^2$$

DEFINISI 2.3 (Fungsi Autokovarian)

Fungsi autokovarian proses $\{Z_t, t \in T\}$ dinyatakan sebagai berikut :

$\gamma(t_1,t_2) = \mathrm{Cov}(Z_{t1}, Z_{t2})$

$= E(Z_{t1} - \mu_{t1})(Z_{t2} - \mu_{t2}).$ (Wei, hal. 7)

Fungsi autokovarian bergantung pada selang waktu (lag) antara t_1 dan t_2, misalkan $t_1 = t$ dan $t_2 = t-k$, sehingga dituliskan

$\gamma(t,t-k) = \mathrm{Cov}(Z_t, Z_{t-k})$

$= E(Z_t - \mu_t)(Z_{t-k} - \mu_{t-k})$

$= E(Z_t Z_{t-k})$ (2.1.3)

untuk selanjutnya $\gamma(t,t-k)$ ditulis sebagai γ_k.

DEFINISI 2.4 (Fungsi Autokorelasi)

Fungsi autokorelasi pada proses $\{Z_t, t \in T\}$ untuk selang waktu k (lag k) dinyatakan sebagai berikut :

$\rho_k = \mathrm{Corr}(Z_t, Z_{t-k})$

$$= \frac{\mathrm{Cov}(Z_t, Z_{t-k})}{[\mathrm{Var}(Z_t)\,\mathrm{Var}(Z_{t-k})]^{1/2}}$$

$$= \frac{\gamma_k}{\sigma^2}$$ (Abraham-Ledolter, hal. 194) (2.1.4)

σ^2 adalah autokovarian dari Z_t dengan selang waktu untuk k = 0, yaitu :

$$\gamma_0 = \mathrm{Cov}(Z_t, Z_{t-0})$$
$$= E(Z_t - \mu_t)(Z_{t-0} - \mu_{t-0})$$
$$= E(Z_t - \mu_t)^2$$
$$= \sigma^2$$

sehingga $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$ (2.1.5)

sehingga taksiran autokorelasi sampel lag k adalah

$$\hat{\rho}_k = r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(Z_t - \bar{Z})(Z_{t-k} - \bar{Z})}{\sum_{t=1}^{n}(Z_t - \bar{Z})^2} \qquad k=0,1,2,\ldots \qquad (2.1.6)$$

Fungsi autokovarian γ_k dan fungsi autokorelasi ρ_k mempunyai sifat-sifat sebagai berikut :

1. $\gamma_0 = \mathrm{Var}(Z_t)$; $\rho_0 = 1$.
2. $|\gamma_k| \leq \gamma_0$; $|\rho_l| \leq 1$.
3. $\gamma_k = \gamma_{-k}$ dan $\rho_k = \rho_{-k}$.

DEFINISI 2.5 (White Noise)

Barisan variabel acak $\{a_t ; t = 0,\pm1,\pm2,...\}$ yang masing-masing tidak berkorelasi, dimana $a_t \infty (0, \sigma_a^2)$ dikatakan sebagai proses white noise, (Abraham-Ledolter, hal. 197).

Pada white noise, karena variabel acak a_t tidak berkorelasi, sehingga fungsi autokovariannya adalah sebagai berikut :

$$\gamma_k = \text{Cov}(a_t, a_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_a^2, k=0 \\ 0, k\neq 0. \end{cases}$$

Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut :

$$\text{Cov}(a_t, a_{t-k}) = E\,[(a_t - E(a_t))\,(a_{t-k} - E(a_{t-k}))]$$

$$= E\,[(a_t\, a_{t-k} - a_t\, E(a_{t-k}) - E(a_t)\, a_{t-k} + E(a_t)\ E(a_{t-k})].$$

Karena $E(a_t)=0$, sehingga

$$\text{Cov}(a_t, a_{t-k}) = E\,[a_t\, a_{t-k} - a_t\, E(a_{t-k})]$$

$$= E\,(a_t\, a_{t-k}) - E\,(a_t\ E(a_{t-k}))$$

$$= E\,(a_t\, a_{t-k})$$

untuk k=0

$$\text{Cov}(a_t, a_{t-0}) = E\,(a_t\, a_{t-0})$$

$$= E\,(a_t)^2$$

$$= \sigma_a^2$$

untuk $k \neq 0$

$$\text{Cov}(a_t, a_{t-k}) = E\,(a_t\, a_{t-k})$$

$$= 0.$$

DEFINISI 2.6 (Proses Autoregresi)

Misalkan Z_t dinyatakan dalam model :

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \ldots + \phi_p Z_{t-p} + a_t \qquad (2.1.7)$$

dimana $\phi_p \neq 0$ sehingga Z_t adalah proses autoregresi dengan orde p atau dituliskan sebagai AR(p).(Cryer, hal. 60)

Contoh :

Misalkan p=1 maka AR(1) berbentuk $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t$.

Jika p=2 maka AR(2) berbentuk $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t$.

DEFINISI 2.7 (Proses Moving Average)

Misalkan Z_t dinyatakan dalam model

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q} \qquad (2.1.8)$$

dimana $\theta_q \neq 0$ maka Z_t disebut proses moving average dengan orde q atau dituliskan sebagai MA(q).(Cryer, hal. 54)

Contoh :

Misalkan q=1 maka MA(1) dituliskan $Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$.

Dan untuk q=2 maka MA(2) dituliskan $Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$.

DEFINISI 2.8 (Proses ARMA)

Misalkan Z_t dinyatakan dalam model

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \ldots + \phi_p Z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}. \qquad (2..1.9)$$

Maka Z_t dinamakan proses autoregresi-moving average orde (p,q) atau ARMA(p,q).(Cryer, hal. 71)

Contoh :

Misalkan p=1 dan q=1 maka ARMA(1,1) berbentuk $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$.

Jika p=2 dan q=1 maka ARMA(2,1) berbentuk $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$.

DEFINISI 2.9 (Autokorelasi Parsial)

Autokorelasi parsial ϕ_{kk} untuk lag k didefinisikan sebagai berikut :

$\phi_{kk} = \mathrm{Corr}\,(Z_t, Z_{t-k} \mid Z_{t-1}, Z_{t-2}, \ldots, Z_{t-(k+1)})$.(Cryer, hal. 54) (2.1.10)

Misalkan model regresi dinyatakan dalam bentuk

$$Z_t = \phi_{k1} Z_{t-1} + \phi_{k2} Z_{t-2} + \ldots + \phi_{kk} Z_{t-k} + a_t \quad (2.1.11)$$

dengan ϕ_{ki} adalah parameter regresi ke-i. Dengan mengalikan kedua sisi dengan Z_{t-j} dan mengambil ekspektasinya sehingga diperoleh :

$$\gamma_j = \phi_{k1} \gamma_{j-1} + \phi_{k2} \gamma_{j-2} + \ldots + \phi_{kk} \gamma_{j-k} \quad (2.1.12)$$

dengan berdasarkan persamaan (2.1.5), didapatkan :

$$\rho_j = \phi_{k1} \rho_{j-1} + \phi_{k2} \rho_{j-2} + \ldots + \phi_{kk} \rho_{j-k} \,. \quad (2.1.13)$$

Untuk j = 1,2, ... ,k, diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\rho_1 = \phi_{k1}\rho_0 + \phi_{k2}\rho_1 + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-1}$$

$$\rho_2 = \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2}\rho_0 + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-2}$$

$$\rho_3 = \phi_{k1}\rho_2 + \phi_{k2}\rho_1 + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-3}$$

$$\vdots$$

$$\rho_k = \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_0 \,.$$

Berdasarkan metode Cramer untuk k = 1,2,... diperoleh nilai ϕ_{kk} yaitu :

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\vdots$$

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \rho_{k-4} & \cdots & 1 & \rho_{k-1} \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}} . \qquad (2.1.4)$$

2.2 ESTIMASI PARAMETER

2.2.1 Model Autoregresi (p)

Dari model umum proses AR (p) yaitu :

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \ldots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$$

kedua sisi dikalikan dengan Z_{t-k}, dimana k = 0,1 ,2, ... ,p, sehingga diperoleh :

$$Z_t Z_{t-k} = \phi_1 Z_{t-1} Z_{t-k} + \phi_2 Z_{t-2} Z_{t-k} + \ldots + \phi_p Z_{t-p} Z_{t-k} + a_t Z_{t-k} .$$

Nilai ekspektasi dari proses diatas adalah :

$$E(Z_t Z_{t-k}) = \phi_1 E(Z_{t-1} Z_{t-k}) + \phi_2 E(Z_{t-2} Z_{t-k}) + \ldots + \phi_p E(Z_{t-p} Z_{t-k}) + E(a_t Z_{t-k}) \quad (2.2.1)$$

Dari keterangan definisi 2.3 dan karena $E(a_t Z_{t-k}) = 0$, maka menjadi :

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \cdots + \phi_p\gamma_{k-p} \quad (2.2.2)$$

Kedua sisi dibagi dengan varian dari Z_t yaitu γ_0 sehingga persamaan (2.2.2) menjadi

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \cdots + \phi_p\rho_{k-p} \quad ; k = 1,2, \ldots ,p \quad (2.2.3)$$

karena nilai-nilai $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_p$ tidak diketahui, maka diganti dengan taksirannya yaitu r_1, r_2, ... , r_p, sehingga persamaan diatas dapat digunakan untuk mengetahui nilai-nilai $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p$.

2.2.2 Model Moving Average (q)

Model proses MA (q) ditulis :

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q} .$$

Kedua sisi dikalikan dengan Z_{t-k} kemudian dicari nilai ekspektasinya yaitu :

$$E(Z_t Z_{t-k}) = E[(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}) .$$

$$(a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1} - \theta_2 a_{t-k-2} - \ldots - \theta_q a_{t-k-q})]$$

atau dapat ditulis sebagai berikut :

$$\gamma_k = E(a_t a_{t-k} - \theta_1 a_t a_{t-k-1} - \theta_2 a_t a_{t-k-2} - \ldots - \theta_q a_t a_{t-k-q}$$

$$- \theta_1 a_{t-1} a_{t-k} + \theta_1^2 a_{t-1} a_{t-k-1} + \ldots + \theta_1 \theta_q a_{t-1} a_{t-k-q}$$

$$- \theta_2 a_{t-2} a_{t-k} + \theta_1 \theta_2 a_{t-2} a_{t-k-1} + \ldots + \theta_2 \theta_q a_{t-2} a_{t-k-q}$$

$$\vdots$$

$$- \theta_q a_{t-q} a_{t-k} + \theta_1 \theta_q a_{t-q} a_{t-k-1} + \ldots + \theta_q^2 a_{t-q} a_{t-k-q}). \qquad (2.2.4)$$

Untuk k= 0 persamaan (2.2.4) menjadi :

$$\gamma_0 = E(a_t a_{t-0}) + \theta_1^2 E(a_{t-1} a_{t-0-1}) + \theta_2^2 E(a_{t-2} a_{t-0-2}) + \ldots + \theta_q^2 E(a_{t-q} a_{t-0-q})$$

karena $E(a_t a_{t-i}) = \sigma_a^2$, untuk i = 0

$E(a_t a_{t-i}) = 0$, untuk $i \neq 0$

sehingga varian dari model MA(q) menjadi :

$$\gamma_0 = \sigma_a^2 + \theta_1^2 \sigma_a^2 + \theta_2^2 \sigma_a^2 + \cdots + \theta_q^2 \sigma_a^2$$

$$= \sigma_a^2 \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2\right). \qquad (2.2.5)$$

Untuk k = 1, persamaan (2.2.4) menjadi :

$$\gamma_1 = -\theta_1 E(a_{t-1}a_{t-1}) + \theta_1\theta_2 E(a_{t-2}a_{t-2}) + \theta_2\theta_3 E(a_{t-3}a_{t-3}) + \ldots + \theta_{q-1}\theta_q E(a_{t-q}a_{t-q})$$

$$= -\theta_1\sigma_a^2 + \theta_1\theta_2\sigma_a^2 + \theta_2\theta_3\sigma_a^2 + \cdots + \theta_{q-1}\theta_q\sigma_a^2$$

$$= \sigma_a^2\left(-\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3 + \cdots + \theta_{q-1}\theta_q\right) \quad (2.2.6)$$

untuk k = 2, persamaan (2.2.4) menjadi :

$$\gamma_2 = -\theta_2 E(a_{t-2}a_{t-2}) + \theta_1\theta_3 E(a_{t-3}a_{t-3}) + \theta_2\theta_4 E(a_{t-4}a_{t-4}) + \ldots + \theta_{q-2}\theta_q E(a_{t-q}a_{t-q})$$

$$= -\theta_2\sigma_a^2 + \theta_1\theta_3\sigma_a^2 + \theta_2\theta_4\sigma_a^2 + \ldots + \theta_{q-2}\theta_q\sigma_a^2$$

$$= \sigma_a^2(-\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_4 + \ldots + \theta_{q-2} \quad (2.2.7)$$

sehingga secara umum autokovarian proses MA adalah :

$$\gamma_k = -\theta_k\sigma_a^2 + \theta_1\theta_{k+1}\sigma_a^2 + \theta_2\theta_{k+2}\sigma_a^2 + \ldots + \theta_{q-k}\theta_q\sigma_a^2$$

$$= \sigma_a^2(-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_{k+2} + \ldots + \theta_{q-k} \quad (2.2.8)$$

dimana k≥1.

Jika persamaan (2.2.8) dibagi persamaan (2.2.5), maka :

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\sigma_a^2(-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_{k+2} + \ldots + \theta_{q-k}\theta_q)}{\sigma_a^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2)}$$

$$= \frac{(-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1}\theta_2\theta_{k+2} + \ldots + \theta_{q-k}\theta_q)}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2)} \quad (2.2.9)$$

2.2.3 Model ARMA (p,q)

Diberikan bentuk umum model ARMA (p,q) yaitu :

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \ldots + \phi_p Z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q} \quad (2.2.10)$$

dan mengalikan kedua sisinya dengan Z_{t-k} sehingga diperoleh

$$Z_t \, Z_{t-k} = \phi_1 Z_{t-1} Z_{t-k} + \phi_2 Z_{t-2} Z_{t-k} + \ldots + \phi_p Z_{t-p} Z_{t-k} + a_t Z_{t-k} - \theta_1 a_{t-1} Z_{t-k} - \theta_2 a_{t-2} Z_{t-k} - \ldots - \theta_q a_{t-q} Z_{t-k}.$$

Dengan mengambil ekspektasinya diperoleh

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \ldots + \phi_p \gamma_{k-p} + E(Z_{t-k} a_t) - \theta_1 E(Z_{t-k} a_{t-1}) - \theta_2 E(Z_{t-k} a_{t-2}) - \ldots - \theta_q E(Z_{t-k} a_{t-q}) \quad (2.2.11)$$

Karena $E(Z_{t-k} a_{t-1}) = 0$ untuk k>1,sehingga

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \ldots + \phi_p \gamma_{k-p}, \; k \geq (q+1) \quad (2.2.12)$$

dengan demikian

$$\rho_1 = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \ldots + \phi_p \rho_{k-p}, \; k \geq (q+1). \quad (2.2.13)$$

2.3 TEOREMA CAYLEY-HAMILTON

DEFINISI 2.10

Misalkan V adalah space vektor berdimensi berhingga pada field K dan diasumsikan n = dimensi V $\geq$ 1, dan A:V$\rightarrow$V adalah pemetaan linier. Misalkan W adalah subspace V, dan W disebut invarian subspace A atau A-invarian, jika A memetakan W ke W sendiri. Jika w$\in$W, maka Aw juga terdapat di dalam W atau dapat dituliskan AW$\subset$ W.

DEFINISI 2.11

Sebuah fan A (di dalam V) disebut barisan subspace { V_1, V_2, ..., V_n}yaitu V_i yang terdapat di dalam V_{i+1} untuk i = 1, 2, ..., n-1, sehingga dimensi V_i = i, yang akhirnya masing-masing V_i adalah A-invarian.

PROPOSISI 2.1

Misalkan V adalah ruang vektor berdimensi berhingga dari bilangan komplek, diasumsikan dimensi V $\geq$ 1, dan A:V$\rightarrow$V adalah pemetaan linier. Maka terdapat fan A di dalam V.

TEOREMA 2.1

Misalkan V adalah ruang vektor berdimensi berhingga dari bilangan komplek, dimensi V $\geq$ 1, dan A:V$\rightarrow$V adalah pemetaan linier, sedang P adalah polinomial karakteristiknya, maka P(A) = 0.

Bukti :

Berdasarkan proposisi 2.1, didapatkan fan A yang dimisalkan $\{V_1,\ldots,V_n\}$. Misalkan

$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ adalah matriks yang digabungkan dengan basis fan A yaitu

$\{v_1,\ldots,v_2\}$. Maka $Av_i = a_{ii}\, v_i$ + sebuah elemen dari V_{i-1}

atau $(A\text{-}a_{ii}I)v_i = Av_i - a_{ii}\, v_i$, terlihat bahwa $(A\text{-}a_{ii}I)v_i$ terletak di dalam V_{i-1}.

Polinomial karakteristik dari A diberikan sebagai berikut :

$$P(t) = (t\text{-}a_{11})\ldots(t\text{-}a_{nn})$$

sehingga $P(A) = (A\text{-}a_{11}I)\ldots(A\text{-}a_{nn}I)$.

Dibuktikan secara induksi bahwa

$$(A\text{-}a_{11}I)\ldots(A\text{-}a_{nn}I)v = 0 \text{ untuk semua } v \text{ di dalam } V_i, \text{ dengan } i=1,\ldots,n.$$

Misalkan n=1 maka $(A\text{-}a_{11}I)v_1 = Av_1\text{-}a_{11}v_1 = 0$.

Misalkan untuk n=i dimana i>1, dengan pembuktian benar untuk n=i-1. Sebarang elemen V_i, dapat ditulis sebagai $v'+cv_i$ dimana v' di dalam V_{i-1}, dengan sebarang skalar c. Dikatakan bahwa $(A\text{-}a_{11}I)v'$ terletak di dalam V_{i-1} sebab AV_{i-1} elemen dari V_{i-1}, demikian juga $a_{11}v'$. Melalui induksi diperoleh

$$(A\text{-}a_{11}I)\ldots(A\text{-}a_{i-1,i-1}I)\,(A\text{-}a_{ii}I)v' = 0.$$

Dikatakan $(A\text{-}a_{ii}I)cv_i$ terletak di dalam V_{i-1}, sehingga

$$(A\text{-}a_{11}I)\ldots(A\text{-}a_{i-1,i-1}I)\,(A\text{-}a_{ii}I)cv_i = 0.$$

Untuk v di dalam V_i diperoleh

$$(A\text{-}a_{11}I)\ldots(A\text{-}a_{ii}I)v = 0.$$

2.4 ANALISA KORELASI KANONIK

Misal X dan Y adalah dua himpunan variabel, berturut-turut disebut sebagai himpunan dari variabel bebas dan tak bebas. Masing-masing himpunan beranggotakan : $X_1, X_2, \ldots, X_p$ dan $Y_1, Y_2, \ldots, Y_q$, yakni ada p buah variabel dalam himpunan X dan q buah variabel dalam Y dengan $p \leq q$. Maka dengan n pengamatan pada masing-masing (p+q) variabel didapat data dalam bentuk matriks sebagai berikut :

objek	variabel bebas				variabel tak bebas			
	X_1	X_2	...	X_p	Y_1	Y_2	...	Y_q
1	X_{11}	X_{21}	...	X_{p1}	Y_{11}	Y_{21}	...	Y_{q1}
2	X_{12}	X_{22}	...	X_{p2}	Y_{12}	Y_{22}	...	Y_{q2}
3	X_{13}	X_{23}	...	X_{p3}	Y_{13}	Y_{23}	...	Y_{q3}
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮
n	X_{1n}	X_{2n}	...	X_{pn}	Y_{1n}	Y_{2n}	...	Y_{qn}

Masing-masing variabel saling berkorelasi satu dengan yang lainnya, sehingga menghasilkan matriks koefisien korelasi yang simetris berordo (p+q), dan disebut matriks korelasi P.

Analisa dari pola korelasi antara himpunan X dan himpunan Y dikerjakan dengan mengganti variabel asli dalam himpunan X dan himpunan Y dengan suatu pasangan-pasangan kombinasi linier dari variabel asli, yang disebut sebagai variabel kanonik.

Yang dimaksud variabel asli yaitu : $X_1, X_2, \ldots, X_p, Y_1, Y_2, \ldots, Y_q$, jadi variabel kanoniknya adalah : $U = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_pX_p$ dan $V = b_1Y_1 + b_2Y_2 + \ldots + b_qY_q$.

Dalam analisa korelasi kanonik dibentuk suatu kombinasi linier dari variabel dalam himpunan X, demikian juga dalam himpunan Y. Dari kombinasi linier yang mungkin untuk masing-masing himpunan, koefisien dipilih sedemikian sehingga kombinasi linier dari variabel dalam himpunan X berkorelasi maksimum dengan kombinasi linier dari variabel dalam himpunan Y.

Jika $\underline{U}$ dan $\underline{V}$ didefinisikan sebagai :

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_p \end{bmatrix} = \underline{L}\ \underline{X} \quad \text{dan} \quad \underline{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_q \end{bmatrix} = \underline{M}\ \underline{Y}$$

dimana $\underline{L}$ dan $\underline{M}$ berturut-turut dalah matriks ukuran pxp dan qxq. Maka analisa korelasi kanonik adalah memilih harga-harga untuk $\underline{L}$ dan $\underline{M}$ sedemikian sehingga korelasi antara $\underline{U}$ dan $\underline{V}$ maksimum. Jadi dapat dikatakan bahwa $\underline{U}$ menggambarkan kombinasi linier dari variabel dalam himpunan X yang mempunyai korelasi maksimum dengan setiap kombinasi linier dari variabel dalam himpunan Y, dan selanjutnya $\underline{V}$ adalah kombinasi linier dari variabel dalam himpunan Y yang mempunyai korelasi maksimum dengan setiap kombinasi linier dari variabel dalam himpunan X.

Dari kombinasi linier pada kedua himpunan variabel ini, dapat ditemukan pasangan yang sangat berkorelasi satu dengan yang lainnya. Langkah selanjutnya dalah menemukan pasangan kombinasi linier yang lain yang mempunyai korelasi maksimum kedua, tetapi tidak berkorelasi dengan pasangan pertama. Demikian selanjutnya, menemukan pasangan kombinasi linier yang berkorelasi maksimum dengan batasan tidak berkorelasi dengan pasangan sebelumnya.