BAB II

MATERI DASAR

Untuk menunjang dalam pembahasan mengenai metode Powell dengan arah konjugasi pada solusi program nonlinier tanpa kendala, maka diperlukan beberapa definisi dan teorema tentang vektor, matriks, dasar-dasar kalkulus, himpunan dan fungsi konveks, dan optimalisasi.

2.1. VEKTOR

Definisi 2.1.

Jika $V = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ adalah himpunan vektor, maka persamaan vektor :

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n = 0$$

mempunyai paling sedikit satu penyelesaian, yaitu :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$$

Jika harga skalar $\lambda, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah satu-satunya penyelesaian, maka V dikatakan bebas linier. Jika ada penyelesaian lain, maka V dikatakan tak bebas linier.

Contoh 2.1.

Misal diberikan vektor-vektor $X_1 = (1,0,0, \ldots ,0)$, $X_2 = (0,1,0, \ldots ,0), \ldots,$

$X_n = (0,0,0, \ldots ,1)$ dan skalar-skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots ,\lambda_n$, maka $V = \{ X_1, X_2, \ldots ,X_n \}$ dalam R^n adalah himpunan bebas linier sebab,

$$\lambda_1 (1,0,0, \ldots 0) + \lambda_2 (0,1,0, \ldots ,0) + \ldots + \lambda_n (0,0,0, \ldots ,1) = (0,0,0, \ldots ,0)$$

atau dengan cara yang sama dapat ditulis,

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots ,\lambda_n) = (0,0, \ldots ,0)$$

sedangkan apabila salah satu dari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots ,\lambda_n$ tidak sama dengan nol, maka $V = \{X_1 , X_2, \ldots ,X_n\}$ adalah tak bebas linier.

Definisi 2.2.

Misal V adalah himpunan vektor, sedemikian sehingga jika $X,Y,Z \in V$, dan $\lambda,\beta \in R$, maka memenuhi aksioma-aksioma pada operasi penjumlahan dan perkalian sebagai berikut :

Penjumlahan :

a. $X + Y \in V$

b. $X + Y = Y + X$

c. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$

d. Terdapat $0 \in V$, $X + 0 = 0 + X$, untuk setiap $X \in V$

e. Terdapat $0 \in V$, $X + (-X) = 0$

Perkalian :

f. $\lambda X \in V$

g. $\lambda (X + Y) = \lambda X + \lambda Y$

h. $(\lambda,\beta) X = \lambda (\beta X)$

i. $I X = X I = X$

maka V disebut ruang vektor dan elemen-elemennya disebut vektor.

Definisi 2.3.

Subhimpunan W dari sebuah ruang vektor V dikatakan subruang V apabila W itu sendiri adalah ruang vektor di bawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V.

Definisi 2.4.

Sebuah vektor W dikatakan kombinasi linier dari vektor-vektor $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jika vektor tersebut dapat dituliskan dalam bentuk :

$$W = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n$$

dimana $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ adalah skalar

Definisi 2.5.

Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah vektor-vektor pada ruang V dan jika masing-masing vektor pada V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $X_1, X_2, \ldots, X_n$, maka dikatakan vektor-vektor tersebut merentang V.

Teorema 2.1.

Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah vektor-vektor pada ruang vektor V, maka :

a. Himpunan W dari semua kombinasi linier $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah subruang V.

b. W adalah subruang terkecil dari V yang mengandung $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dengan kata lain bahwa setiap subruang lain dari V yang mengandung $X_1, X_2, \ldots, X_n$ harus mengandung W.

Bukti :

a. Untuk memperlihatkan bahwa W adalah subruang V, akan dibuktikan bahwa W tertutup di bawah penjumlahan dan perkalian skalar.

Jika Y dan Z adalah vektor-vektor pada W maka :

$$Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n$$

$$Z = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_n X_n$$

dimana $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ adalah skalar, maka :

Terhadap *penjumlahan* :

$$Y + Z = (\lambda_1 + \beta_1) X_1 + (\lambda_2 + \beta_2) X_2 + \ldots + (\lambda_n + \beta_n) X_n$$

dimana Y + Z adalah kombinasi linier yang terletak di W.

Terhadap *perkalian* :

$$\lambda Z = \lambda (\beta_1) X_1 + \lambda (\beta_2) X_2 + \ldots + \lambda (\beta_n) X_n$$

untuk sebarang skalar λ.

dimana λ Z adalah kombinasi linier yang terletak di W.

b. Setiap vektor X adalah kombinasi linier,

$X_m = 0\,X_1 + 0\,X_2 + \ldots + 1\,X_m + \ldots + 0\,X_n$

Oleh karena itu subruang W mengandung setiap vektor $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Misal diberikan W' adalah subruang lain yang mengandung $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Karena W' tertutup di bawah penjumlahan dan perkalian skalar, maka W' harus mengandung semua kombinasi linier,

$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n$ dari $X_1, X_2, \ldots, X_n$

Jadi W' mengandung setiap vektor W.

Definisi 2.6.

Jika V adalah sebarang ruang vektor dan $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ merupakan himpunan berhingga dari vektor-vektor pada V maka S dikatakan basis untuk V, jika:

a. S bebas linier

b. S merentang V

Contoh 2.2.

a. Dari contoh 2.1. telah diperlihatkan bahwa $V = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ dalam R^n. Dengan cara yang sama misal $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ dalam R^m, untuk $m < n$ maka S adalah himpunan bebas linier.

b. Misal diberikan untuk setiap vektor $L = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ pada R^m dapat ditulis,

$L = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_m X_m$

$S = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ adalah merentang V pada R^m. sehingga S adalah basis untuk V.

Definisi 2.7.

Hasil kali dalam (inner product) <X,Y> dari dua vektor X dan Y dari V adalah suatu bilangan riil yang memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

a. $\langle X,Y\rangle = \langle Y,X\rangle$

b. $\langle X+Z,Y\rangle = \langle X,Y\rangle + \langle Z,Y\rangle$, $Z \in V$

c. $\langle \lambda X,Y\rangle = \lambda \langle X,Y\rangle$, $\lambda \in R$

d. $\langle X,X\rangle > 0$ jika $X \neq 0$

$\langle X,X\rangle = 0$ jika $X = 0$

Definisi 2.8.

Jika $X = (x_1 , x_2 , ... ,x_n)$ dan $Y = (y_1 , y_2 , ... ,y_n)$ adalah sebarang vektor pada R^n , maka hasil kali dalam <X,Y> didefinisikan dengan

$$\langle X,Y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

dikatakan ruang euclid.

Definisi 2.9.

Jika V adalah sebuah hasil kali dalam, maka norma (atau panjang) vektor X, dinyatakan oleh $\| X \|$, definisikan sebagai $\| X \| = \langle X,X\rangle^{1/2}$

Definisi 2.10.

Misal diberikan vektor-vektor X, Y maka suatu bilangan riil $\| X \|$ sedemikian sehingga,

a. $\| X \| > 0$, untuk $X \in R^n$

b. $\| X \| = 0$, bila hanya bila $X = 0$.

c. $\| \lambda X \| = | \lambda | \; \| X \|$, untuk setiap $\lambda \in R$ dan $X \in R^n$

d. $\| X + Y \| \leqslant \| X \| + \| Y \|$, untuk setiap $X, Y \in R^n$

merupakan suatu norma dari X.

2.2. MATRIKS

Definisi 2.11.

Jika A adalah matriks kuadratik dan jika dapat dicari matriks B sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (invertible) dan B dikatakan invers dari A.

Teorema 2.2.

Jika A dan B adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dan yang ukurannya sama, maka

a. AB dapat dibalik

b. $(AB) = B^{-1} A^{-1}$

Bukti :

$$(AB)(B^{-1} A^{-1}) = A(B B^{-1}) A^{-1} = A I A^{-1} = A A^{-1} = I \qquad (2.1)$$

$$(B^{-1} A^{-1})(AB) = B^{-1} (A^{-1} A) B = B^{-1} I B = B^{-1} B = I \qquad (2.2)$$

dari (2.1) dan (2.2) di atas dapat dibentuk, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ menunjukkan bahwa AB dapat dibalik dan $(B^{-1}A^{-1})$ adalah invers dari AB atau dapat ditulis, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$,

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)(AB)^{-1} = I(AB)^{-1}$$
$$(B^{-1}A^{-1})((AB)(AB)^{-1}) = I(AB)^{-1}$$
$$(B^{-1}A^{-1})\,I = I(AB)^{-1}$$
$$(AB)^{-1} = (B^{-1}A^{-1})$$

TM

Teorema 2.3.

Jika A adalah matriks n x n yang dapat dibalik, maka untuk setiap matriks B berukuran n x 1, sistem persamaan AX = B mempunyai persis satu penyelesaian, yaitu $X = A^{-1}B$

Bukti :

$AA^{-1} = I$, $IB = (AA^{-1})B = A(A^{-1}B) = B$, maka $X = A^{-1}B$ adalah penyelesaian $AX = B$. Untuk memperlihatkan bahwa $X = A^{-1}B$ adalah satu-satunya penyelesaian, maka misal diambil X_0 adalah sebarang penyelesaian, sehingga

$$AX_0 = B.$$

Dengan mengalikan kedua ruas dengan A^{-1} diperoleh :

$$A^{-1}(AX_0) = A^{-1}B$$
$$(A^{-1}A)X_0 = A^{-1}B$$
$$IX_0 = A^{-1}B$$

Jadi $X_0 = A^{-1}B$ adalah satu-satunya penyelesaian.

Definisi 2.12.

Jika A adalah matriks n x n, maka X vektor tak nol dalam R^n dikatakan vektor eigen dari A jika AX adalah kelipatan skalar dari X yaitu,

$$AX = \lambda X$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan X vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Contoh 2.3.

Vektor $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 3$, sebab

$$AX = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3X$$

Definisi 2.13.

Bentuk kuadratik pada $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah ekspresi yang dapat ditulis sebagai :

$$[X_1 \;\; X_2 \;\; \ldots \;\; X_n] \; A \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

dengan A adalah matriks n x n

Definisi 2.14.

Bentuk kuadrat $X^T A X$ disebut definit positif jika $X^T A X > 0$, untuk semua $X \neq 0$, sedangkan matriks simetrik A disebut matriks definit positif jika X A X adalah bentuk kuadrat definit positif.

Contoh 2.4.

$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ mempunyai nilai eigen sebagai berikut;

$AX = \lambda X = \lambda IX$

$[\lambda I - A]\, X = 0,\ X \neq 0$

maka, det $[\lambda I - A]\, X = 0$ atau dapat diuraikan sebagai berikut :

$$\begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$(l\text{-}4)((l\text{-}4)^2 - 4) - (-2)((8\text{-}2\lambda) - 4) + (-2)\,(4 - (8\text{-}2\lambda) = 0$$

$$(\lambda - 4)\,(\lambda^2 - 8\lambda + \lambda 2) + 8 - 4\lambda + 8 - 4\lambda = 0$$

$$(\lambda - 4)\,(\lambda^2 - 8\lambda + \lambda 2) + \lambda 6 - 8\lambda = 0$$

$$(\lambda - 4)\,(\lambda^2 - 8\lambda + \lambda 2) + 8\,(\lambda - 2) = 0$$

$$(\lambda - 4)\,(\lambda - 6)\,(\lambda - 2) - 8\,(\lambda - 2) = 0$$

$$(\lambda - 2)^2\ (\lambda - 8) = 0$$

diperoleh $\lambda = 2$ dan $\lambda = 8$. Karena kedua nilai eigen tersebut positif, maka matriks A adalah definit positif, dan untuk $X \neq 0$.

2.3. DASAR-DASAR KALKULUS

Misal X adalah suatu vektor dalam V, dan $V \subseteq R^n$, sedemikian sehingga dapat diberikan fungsi berharga riil sebagai berikut :

Definisi 2.15.

Jika untuk setiap X terdapat suatu bilangan riil f(X) tunggal, maka f(X) dikatakan fungsi berharga riil dari X.

Dengan kata lain terdapat suatu pemetaan dari V into R. V adalah daerah asal dari fungsi f. (dinotasikan $f : V \subseteq R^n \rightarrow R$)

Definisi 2.16.

f(X) adalah kontinu pada X_0, jika untuk setiap bilangan riil $\eta > 0$, terdapat suatu bilangan riil $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga,

$$\| X - X_0 \| < \varepsilon \Rightarrow \| f(X) - f(X_0) \| < \eta.$$

Pada fungsi kuadratik yang diperoleh melalui deret Taylor terdapat derivative order satu dan order dua dari fungsi yang diberikan dalam bentuk matriks Gradien dan Matriks Hessian sebagai berikut :

Definisi 2.17.

Derivative parsial dari f(X) terhadap komponen x_j dari X didefinisikan sebagai,

$$\lim_{\delta x_j \to 0} \frac{f(X + \Delta X_j) - f(X)}{\delta x_j}$$

dan dinotasikan sebagai $\partial f/\partial x_j$

dimana $\Delta X = [0\ 0 \ldots \delta x_j \ldots 0\ 0]^T$, $j = 1, 2, \ldots, n$ vektor yang komponenannya terdiri dari n derivative parsial dari f(X) dikatakan gradien dari f(X) atau dapat ditulis dalam bentuk matriks n x 1,

$$\text{grad } f = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T \tag{2.3}$$

Definisi 2.18.

Apabila f(X) mempunyai derivative parsial kontinu terhadap masing-masing variabelnya, maka dikatakan diferensiabel.

Misal f(X) adalah fungsi diferensial berharga riil dari X dalam R^n. Misal $X + \Delta X$ adalah suatu titik persekitaran dari X dalam R^n sedemikian sehingga,

$$\Delta X = [\delta x_1 \quad \delta x_2 \quad \ldots \delta x_n]^T \quad \text{dan}$$

$$X + \Delta X = [x_1 + \delta x_1 \quad x_2 + \delta x_2 \quad \ldots \quad x_n + \delta x_n]^T$$

Deret Taylor untuk suatu fungsi dari n variabel dapat ditulis :

$$f(x_1 + \delta x_1 \quad x_2 + \delta x_2 \ \ldots \ x_n + \delta x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots +$$

$$\left(\delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \delta x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) + \tfrac{1}{2} \left(\delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 +$$

(suku-suku ketiga dan tingkat lebih tinggi dari δx_j, untuk $j = 1, 2, \ldots, n$) (2.4)

Dari persamaan (2.4) di atas dapat didefinisikan matriks Hessian dari fungsi n x n sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} = H(X) \qquad (2.5)$$

Dengan memandang bentuk (2.3) dan (2.5), maka persamaan (2.4) dapat ditulis,

$$f(X+\Delta X) = f(X) + (\Delta X)^T \nabla f(X) + 1/2\,(\Delta X)^T\, H(X)\,(\Delta X) + e(X,\Delta X)\,\|\Delta X\|^2,$$

dimana $e(X,\Delta X) \to 0$ untuk $\|\Delta X\| \to 0$.

Definisi 2.19.

Diferensial ke-r dari f, jika semua derivative parsial dari fungsi f memenuhi orde $r \geq 1$ ada dan kontinu pada titik X^*, maka polinomial

$$d^r f(X^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_i\, \delta_j \cdots \delta_k \frac{\partial^r f(X^*)}{\delta x_i\, \delta x_j \cdots \delta x_k}$$

disebut diferensial ke-r dari f pada X^*, sehingga ekspansi deret Taylor dari f(X) disekitar X^* diberikan :

$$f(X) = f(X^*) + (1/2)\, d^2 f(X^*) + \ldots + (1/n!)\, d^n f(X^*) + R_n(X^*,\delta)$$

dimana $R_n(X^*,\delta) = (1/n!)\, d^{(n+1)} f(X^* + \lambda\delta)$, untuk $0 < \lambda < 1$ dan $\delta = X - X^*$

2.4. HIMPUNAN DAN FUNGSI KONVEKS

2.4.1. Himpunan Konveks

Definisi 2.20.

Misal diberikan titik X_1 dan X_2 dalam $S \subseteq R^n$, himpunan L,

dimana : $L = \{X \mid X = (1-\lambda)X_1 + \lambda X_2\}$, $\lambda \in R$, adalah suatu garis dalam R^n yang melewati titik X_1 dan X_2.

Definisi 2.21.

Titik $X = (1-\lambda)X_1 + \lambda X_2$, untuk $0 \le \lambda \le 1$, disebut sebagai kombinasi linier konveks dari titik X_1 dan X_2 .

Definisi 2.22.

Himpunan $K \subseteq R$ dikatakan sebagai himpunan konveks jika setiap kombinasi linier konveks dari dua titik dalam K adalah anggota K. Dengan kata lain setiap titik X_1 ,$X_2 \in K$ dan $\lambda \in R$, untuk $0 \le \lambda \le 1$, berlaku $X = (1-\lambda)X_1 + \lambda X_2 \in K$.

Definisi 2.23.

Misal diberikan $X_i \in R^n$ dan λ_i adalah bilangan nonnegatif sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, maka

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_m X_m \tag{2.6}$$

disebut kombinasi linier konveks dari titik-titik X_i , untuk $i = 1,2, \ldots ,m$

Teorema 2.4.

Irisan dari dua himpunan konveks dari titik-titik adalah himpunan konveks.

Bukti :

Ambil K_1 dan K_2 adalah dua himpunan konveks, ambil $X_1, X_2 \in K_1 \cap K_2$, dengan memandang $X = (1-\lambda)X_1 + \lambda X_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$. sedemikian sehingga :

Jika $X_1, X_2 \in K_1$ maka $X \in K_1$ dan jika $X_1, X_2 \in K_2$ maka $X \in K_2$ sehingga $X_1, X_2 \in K_1 \cap K_2$ maka $X \in K_1 \cap K_2$.

Teorema 2.5.

Misal K himpunan tertutup dalam R^n , dan titik $X_0 \notin K$, maka ada hyperplane. Dimana hyperplane adalah pemisah yang memuat X sedemikian sehingga K termuat dalam salah satu setengah ruang yang dihasilkan dari hyperplane itu. $(CX = \alpha)$, $X \in K$, $CX < \alpha$, $CX < \alpha$.

Bukti :

Ambil W titik tunggal terdekat dalam K terdekat menuju X_0 sedemikian sehingga $|W - X_0| \leq |X - X_0|$, X suatu titik dalam K. Untuk setiap titik X K, terdapat $Y = \lambda X + (1-\lambda)W$, $0 \leq \lambda \leq 1$. adalah dalam K. Oleh karena itu,

$$|W - X_0| \leq |Y - X_0|$$

$$|W - X_0| \leq |\lambda X + (1 - \lambda) W - X_0|$$

$$|W - X_0|^2 \leq |\lambda(X - W) + (W - X_0)|^2$$

$$(W - X_0)\ (W - X_0) \leq \lambda^2\ (X - W)^T\ (X - W) + 2\ \lambda\ (W - X_0)^T\ (X - W) + (W - X_0)^T (W - X_0)$$

$$\lambda^2\ (X - W)^T\ (X - W) \geq - 2\ \lambda\ (W - X_0)^T(X - W)$$

$$\lambda\ (X - W)^T\ (X - W) \geq - 2\ (W - X_0)^T\ (X - W)$$

$$\lambda\ (X - W)^T\ (X - W) \geq - 2\ C\ (X - W)$$

dimana $C = (W - X_0)^T$ adalah vektor konstan sebab X_0 ditentukan dan W adalah tunggal dalam K.

Apabila $\lambda \to 0$, maka dalam limit $C\ (X - W) \geq 0$ atau $CX \geq CW$. tetapi selama $C\ (W- X_0) = C\ C^T > 0$ atau $CW > CX_0$ selanjutnya $CX \geq CW > CX = \alpha$. Jadi untuk sebarang titik $X \in K$, $CX > \alpha$, yaitu K bergantung dalam suatu setengah bidang yang dihasilkan oleh hyperplane $CX = \alpha$.

2.4.2. Fungsi Konveks

Definisi 2.24.

Misalkan $K \subseteq R^n$ adalah suatu himpunan konveks, f(X) terdefinisi di K untuk setiap X_1 dan $X_2 \in K$, $\lambda \in R$, $0 \leq \lambda \leq 1$ fungsi f(X) disebut fungsi konveks jika,

$$f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda\ f(X_1) + (1-\lambda)\ f(X_2)$$

Jadi $f((1-\lambda) X_0 + \lambda X_1) = Z_0$ untuk setiap $0 \leq \lambda \leq 1$.

Hal ini menunjukkan bahwa $(1-\lambda) X_0 + \lambda X_1 \in K$ dan K adalah konveks.

2.5. OPTIMALISASI

Pada masalah mengoptimalkan (optimalisasi) suatu fungsi pada metode Powell diberikan dalam masalah meminimalkan fungsi dari variabel bebas tanpa kendala yang dioptimalkan, sehingga diperlukan definisi dan teorema sebagai berikut :

Definisi 2.25.

Misalkan f(X) terdefinisi pada interval I, maka

a. Jika $X_1 < X_2$, maka $f(X_1) < f(X_2)$, untuk setiap $X_1, X_2 \in I$ dan f dikatakan fungsi monoton naik pada interval I.

b Jika $X_1 < X_2$, maka $f(X_1) > f(X_2)$, untuk setiap $X_1, X_2 \in I$ dan f dikatakan fungsi monoton turun pada I.

Definisi 2.26.

Fungsi $f \in R$ dikatakan mempunyai harga minimum lokal pada $X = X^*$ jika terdapat persekitaran $N(X^*, \varepsilon)$ yang memuat X^* sedemikian sehingga $f(X) \leq f(X^*)$ untuk setiap X dalam persekitaran $N(X^*, \varepsilon)$.

Selama $d^2 f(X^* + \lambda(\Delta X))$ adalah orde $(\Delta X)_i^2$, suku dari orde r akan mendominasi suku orde yang lebih tinggi untuk (ΔX) kecil. Jadi $f(X^* + (\Delta X)) - f(X^*)$ ditentukan oleh $(\Delta X)_r$.

Misalkan, $\partial f(X^*)/\partial x_r > 0$, maka $f(X^* + (\Delta X)) - f(X^*) > 0$, $(\Delta X)_r > 0$

maka $f(X^* + (\Delta X)) - f(X^*) < 0$, $(\Delta X)_r < 0$

Hal ini berarti X^* bukan titik ekstrim.

Demikian juga secara analogi dapat dicapai jika diasumsikan $\partial f(X^*)/\partial x_r < 0$ maka terjadi kontradiksi dengan pernyataan bahwa X^* adalah titik ekstrim, katakanlah $\partial f(X^*)/\partial x_r = 0$ pada $X = X^*$.

Akibat 2.1.

Misalkan $F : R^n \rightarrow R$ adalah diferensial pada X^* . Jika X^* adalah minimal lokal, maka $\nabla f(X^*) = 0$.

Bukti :

Misalkan $\nabla f(X^*) \neq 0$, Ambil $(\Delta X) = - \nabla f(X^*)$, didapatkan $\nabla f(X^*)\ (\Delta X) = -|\nabla f(X^*)|^2 < 0$, maka terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $f(X^* + \lambda(\Delta X)) < f(X^*)$ untuk $\lambda \in (0, \varepsilon)$. Kontradiksi dengan asumsi bahwa X^* adalah minimal lokal. Jadi $\nabla f(X^*) = 0$.

Definisi 2.27.

Fungsi f dikatakan mempunyai harga minimum global pada $X = X^*$, jika $f(X^*) \le f(X)$ untuk setiap $X \in R^n$.

Definis 2.28.

Misal terdapat $f \in R$, jika $f(X^*) < f(X)$ untuk setiap $X \in N(X^*, \varepsilon)$, $X^* \neq X$, untuk suatu $\varepsilon > 0$, maka X^* disebut minimum lokal terbatas.

Teorema 2.8.

Jika f(X) mempunyai titik ekstrim (maksimum/minimum) pada $X = X^*$ dan jika derivative parsial pertama dari f(X) ada pada X^*, maka

$$\frac{\partial f(X^*)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(X^*)}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial f(X^*)}{\partial x_n} = 0 \text{ atau } \nabla f(X^*) = 0$$

Bukti :

Misalkan bahwa ada satu dari derivative parsial pertama, katakanlah ke-r yang tidak hilang pada X^*, maka dengan menggunakan deret Taylor :

$$f(X^* + \Delta X) = f(X^*) + \sum_{i=1}^{n} (\Delta X)_i \frac{\partial f(X^*)}{\partial x_i}$$

diperoleh :

$$f(X^* + \Delta X) = f(X^*) + (\Delta X)_r \frac{\partial f(X^*)}{\partial x_r} + 1/2\ d^2 f(X^* + \lambda(\Delta X))$$

, untuk $0 < \lambda < 1$.

Teorema 2.9.

Andaikan fungsi $f : Q \subseteq R^n \rightarrow R$ adalah diferensialbel kedua pada X^*. Jika $\nabla f(X^*) = 0$ dan $H(X^*)$ adalah definit positif, maka X^* adalah minimum lokal terbatas.

Bukti :

Pandang f adalah diferensiabel kedua pada X^*, maka untuk setiap $X \in R^n$,

$$f(X) = f(X^*) + \nabla f(X^*)^T (X - X^*) + (1/2)(X - X^*)^T H(X)(X - X^*) +$$

$$\| X - X^* \|^2 N(X ; \lambda(\Delta X)) \qquad (2.9)$$

dimana $N(X^* ; X - X^*) \rightarrow 0$, untuk $X \rightarrow X^*$.

Misalkan dengan pengandaian, bahwa X^* tidak minimum lokal terbatasi yaitu misalkan terdapat barisan $\{X_r\}$ konvergen menuju X^* sedemikian sehingga $f(X_r) < f(X^*)$, $X = X^*$, untuk setiap r.

Pandang barisan tersebut, dengan catatan bahwa $\nabla f(X_r) = 0$ dan $\nabla f(X_r) \leq \nabla f(X^*)$ dan dinotasikan :

$$(\Delta X)_r = \frac{X_r - X^*}{\|X_r - X^*\|}$$

Persamaan (2.8) mengakibatkan bahwa,

$$(1/2)(\Delta X)^T H(X^*)(\Delta X) + N(X^* ; X - X^*) \leq 0, \forall r. \qquad (2.10)$$

Tetapi $\| (\Delta X)_r \| = 1$, untuk setiap r; sehingga $\{X_r\}$ konvergen menuju (ΔX), dimana $\| \Delta X \| = 1$, maka $(\Delta X)^T H(X^*)(\Delta X) \leq 0$

Kontradiksi dengan asumsi bahwa $H(X^*)$ adalah definit positif. Sedemikian sehingga X^* merupakan minimum lokal terbatas.