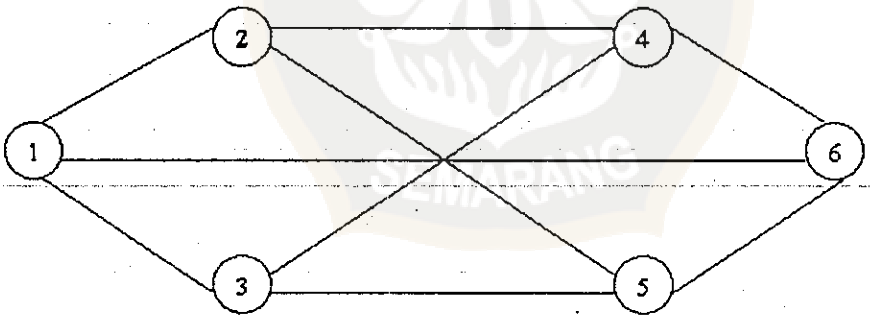
BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Graph

Definisi 2.1.1.

Graph terdiri dari himpunan berhingga titik tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dan suatu pasangan tidak terurut elemen-elemen itu yang disebut garis. Graph G(V,E) terdiri dari himpunan titik dinotasikan V yang terdiri atas elemen-elemen yang disebut titik dan himpunan garis yang dinotasikan dengan E dan E berupa (i,j) atau (j,i) dengan $i,j \in V$ yang disebut garis.

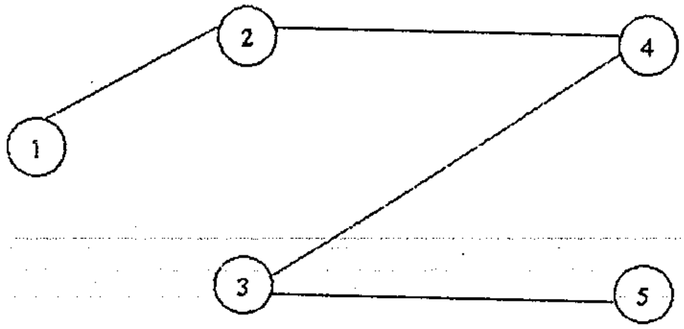


Gambar 2.1. Bentuk umum graph

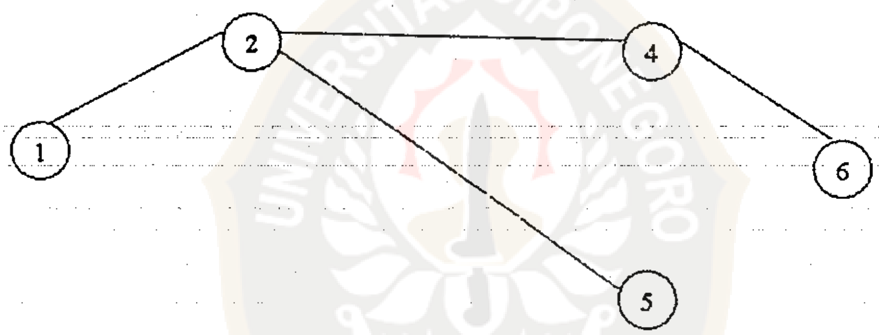
Definisi 2.1.2. Subgraph

Sebuah subgraph dari graph G(V,E) adalah sebuah graph $G_S(V_s,E_s)$, dimana V_s dan E_s adalah subset tidak kosong dari V dan E. Jika V_S atau E_S adalah subset sejati, maka subgraphnya disebut subgraph sejati.

a)



b)

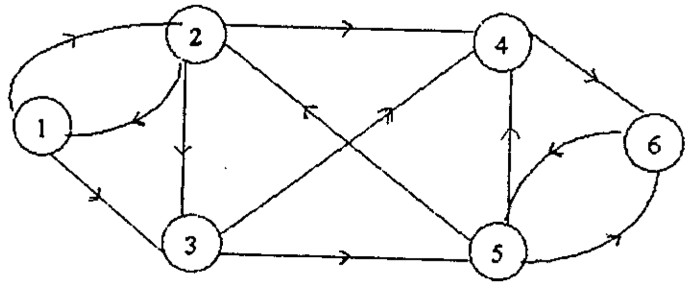


Gambar 2.2. Dua subgraph a) G_1 dan b) G_2

Definisi 2.1.3. Graph Berarah

G_d adalah *directed graph* (graph berarah) terdiri dari himpunan berhingga titik tidak kosong V dari elemen-elemen yang disebut titik dan himpunan E yang terdiri dari pasangan terurut elemen - elemen itu yang berbentuk (i,j) atau (j,i) dengan $i,j \in V$ yang disebut garis berarah.

Contoh :

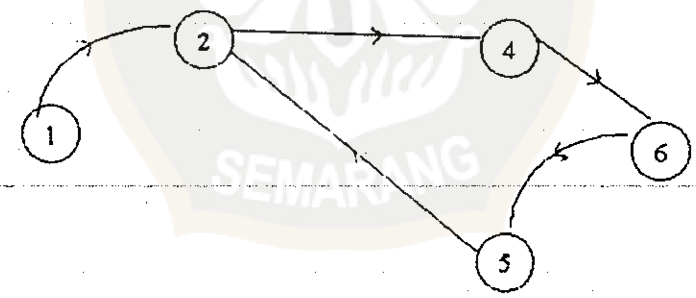


Gambar 2.3. Graph berarah $G_d(V,E)$

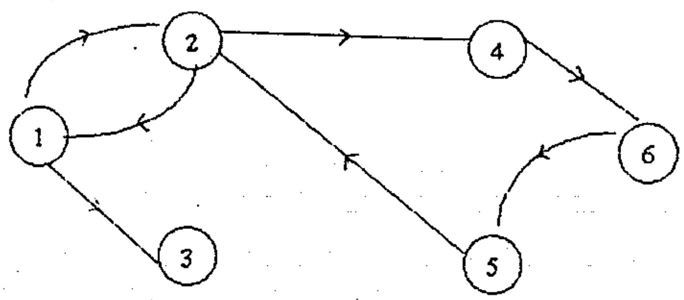
2. 2. Operasi pada Graph

Untuk definisi subgraph, dan operasi graph berlaku sama untuk graph berarah G_d .

a)



b)



Gambar 2.4. Dua subgraph G_1 dan G_2 pada Graph G_d : a) G_1 b) G_2

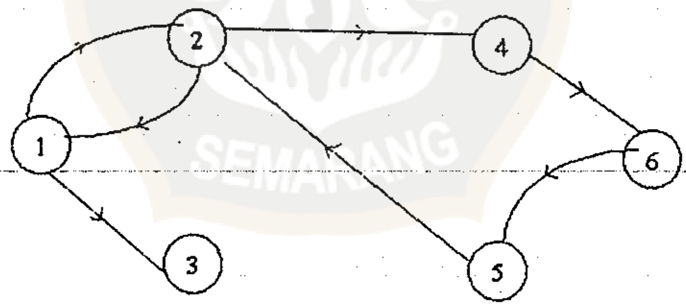
Definisi 2.2.1.Gabungan

$G_1(V_1,E_1)$ dan $G_2(V_2,E_2)$ adalah dua subgraph pada graph $G(V,E)$, maka $G_1 \cup G_2$ menggambarkan subgraph G dengan himpunan titik $V_1 \cup V_2$ dan himpunan garis $E_1 \cup E_2$. $G_1 \cup G_2$ disebut juga jumlahan graph (*sum graph*) dari G_1 dan G_2 pada G.

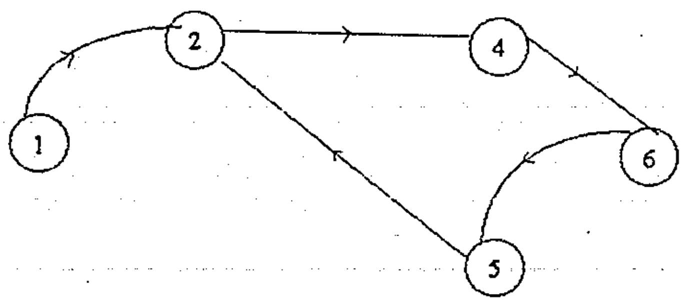
Definisi 2.2.2. Irisan

$G_1 \cap G_2$ adalah subgraph pada G dengan himpunan titik $V_1 \cap V_2$ dan himpunan garis $E_1 \cap E_2$.

Dua subgraph G_1 dan G_2 pada graph G (gambar 2.3) terlihat pada gambar 2.4. Untuk $G_1 \cup G_2$ pada G diperlihatkan pada gambar 2.5. Dan $G_1 \cap G_2$ digambarkan pada gambar 2.6.



Gambar 2.5. $G_1 \cup G_2$ pada subgraph gambar 2.4.



Gambar 2.6. $G_1 \cap G_2$ pada subgraph gambar 2.4.

2.3 Aliran Dalam Jaringan

Suatu jaringan digambarkan sebagai graph berarah $G_d(V,E)$. Untuk setiap garis berarah (x,y) memiliki bobot tidak negatif $c(x,y)$ yang disebut kapasitas pada garis berarah. Kapasitas ini merupakan fungsi c dari himpunan garis berarah E berupa bilangan riil tidak negatif. Demikian juga untuk setiap garis berarah $(x,y) \in E$ memiliki bobot tidak negatif $f(x,y)$ yang disebut aliran pada garis berarah (x,y). Sehingga nilai aliran dalam $G_d(V,E)$ adalah fungsi f dari E berupa bilangan riil tidak negatif. Jaringan akan dituliskan $G(V,E,c,f)$ yang terdiri dari himpunan titik V, himpunan garis berarah E, fungsi kapasitas c, dan fungsi aliran f. Himpunan aliran pada E dinotasikan $\{f(x,y)\}$ disebut pola aliran. Selanjutnya garis akan dimaksudkan garis berarah. Berikut ini diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan aliran dalam suatu jaringan.

Definisi 2.3.1.

Pola aliran $\{f(x,y)\}$ dikatakan mempunyai nilai fisibel dalam $G(V,E,c,f)$ dari titik s ke titik t, jika memenuhi persamaan

$\forall x \in V$

$$\sum f(x,y) - \sum f(y,x) = f_{st} \qquad x = s \qquad (2.1)$$

$$\sum f(x,y) - \sum f(y,x) = 0 \qquad x \neq s,t \qquad (2.2)$$

$$\sum f(x,y) - \sum f(y,x) = -f_{st} \qquad x = t \qquad (2.3)$$

$$c(x,y) \geq f(x,y) \geq 0 \qquad (x,y) \in E \qquad (2.4)$$

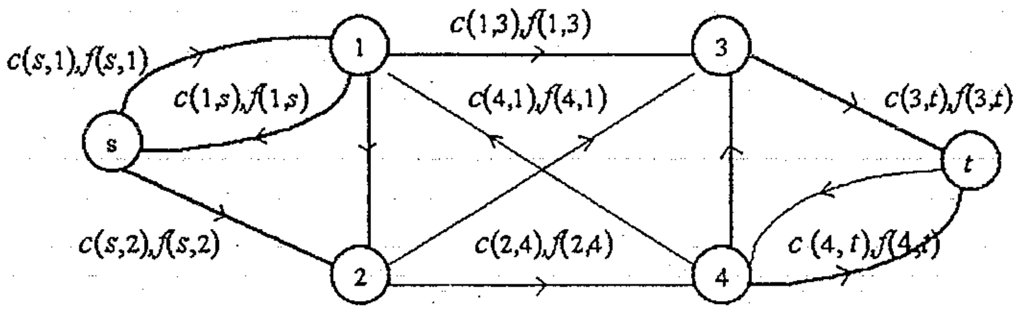
Jadi untuk mendefinisikan pola aliran yang mungkin, dua titik s dan t harus dibedakan. Berdasarkan persamaan (2.1) s.d. (2.4) diatas, titik pusat sumber s mempunyai nilai aliran f_{st}, titik perantara mempunyai nilai aliran nol, sedangkan titik pusat terminal t mempunyai nilai aliran $-f_{st}$. (menerima aliran sebesar f_{st}). Aturan tersebut di atas disebut aturan konservasi. Misalkan (X,Y) adalah himpunan semua garis berarah dari beberapa titik yang menghubungkan dalam X ke beberapa titik dalam Y, maka besarnya nilai aliran f atau kapasitas fungsi c dalam jaringan G didefinisikan

$$f(X,Y) = \sum_{(x,y)\in(X,Y)} f(x,y) \qquad (2.5)$$

$$c(X,Y) = \sum_{(x,y)\in(X,Y)} c(x,y) \qquad (2.6)$$

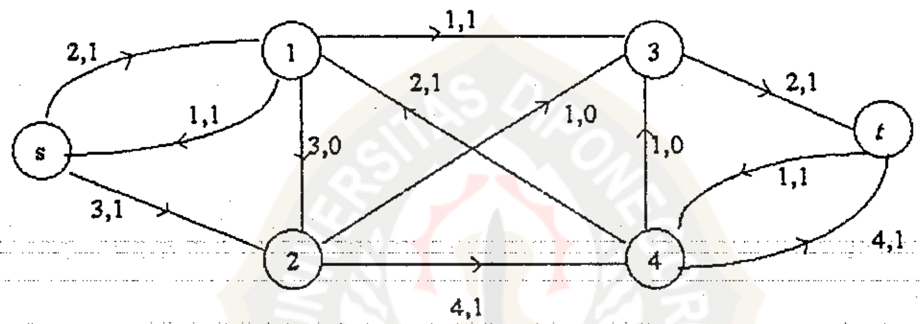
contoh 2.1 :

Diberikan suatu Jaringan G(V,E,c,f) dengan titik - titik s,1,2,3,4,t yang menunjukkan pusat sumber, perantara, dan pusat terminal. Seperti terlihat pada gambar 2.7. Medium aliran akan dituliskan sebagai pasangan terurut $c(x,y),f(x,y)$



Gambar 2.7. Jaringan dengan kapasitas dan aliran pada garis

Dari gambar di atas dapat diberikan kapasitas dan aliran pada setiap garis. Nilai kapasitas ditunjukkan oleh angka pertama, sedangkan nilai aliran ditunjukkan oleh angka kedua dari pasangan bilangan yang ditulis dalam jaringan tersebut. Gambar jaringan tersebut dapat dilihat pada gambar di bawah ini :



Gambar 2.8. Jaringan G(V,E,c,f)

Dari Gambar 2.8. terlihat bahwa :

$c(s,1) = 2$ $\quad$ $f(s,1) = 1$

$c(1,2) = 3$ $\quad$ $f(1,2) = 0$

Contoh 2.2 :

Diberikan suatu jaringan G (V,E,c,f) yang mempunyai aliran dan kapasitas, seperti terlihat pada gambar 2.8

Hitunglah $f(X,Y)$ dan $c(X,Y)$, jika :

a) $X = \{s,1,2,3\}$ $\quad$ $Y = \{4,t\}$

b) $X = \{3,4,t\}$ $\quad$ $Y = \{s,1,2\}$

Penyelesaian :

a) Jika $X = \{s,1,2,3\}$ dan $Y = \{4,t\}$

$(X,Y) = \{(2,4), (3,t)\}$ sehingga

$f(X,Y) = f\{(2,4), (3,t)\}$

$= f(2,4) + f(3,t) = 1+1 = 2$

$c(X,Y) = c\{(2,4), (3,t)\}$

$= c(2,4) + c(3,t) = 4 + 2 = 6$

b) Jika $X = \{3,4,t\}$ dan $Y = \{s,1,2\}$

$(X,Y) = \{(4,1)\}$

$f(X,Y) = f(4,1) = 1$

$c(X,Y) = c(4,1) = 2$

2.4. Potongan dan Kapasitas

Ambil (X,Y) adalah subset dari titik set V dalam $G(V,E,c,f)$. menunjukkan himpunan dari semua garis berarah dari $x \in X$ ke $y \in Y$. Untuk sebarang fungsi g dari himpunan garis E, ditulis

$$g(X,Y) = \sum_{(x,y) \in (X,Y)} g(x,y) \qquad (2.7)$$

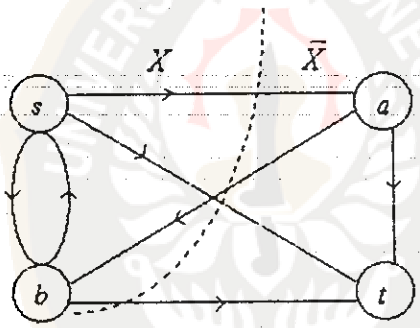
Demikian juga, jika digunakan fungsi h dari titik set V dapat ditulis

$$h(X) = \sum_{x \in X} h(x) \qquad (2.8)$$

Dengan $h(x)$ adalah bobot untuk x. Untuk lebih mudahnya, digunakan himpunan yang hanya berisi satu elemen. Jadi jika X hanya berisi titik tunggal x, ditulis (x,Y), $g(x,Y)$, atau $h(x)$ sebagai pengganti dari $(\{x\},Y)$, $(g\{x\},Y)$ atau $h(\{x\})$.

Definisi 2.4.1. ***s-t Cut*** **(potongan *s-t*).**

Potongan dari s ke t (*s-t cut*) pada graph adalah himpunan dari garis $(X, \bar{X})$ dalam G dengan $s \in X$ dan $t \in \bar{X}$, dengan X adalah subset dari V dan $\bar{X} = V - X$.



Gambar 2.9. Ilustrasi *s-t Cut*

Definisi 2.4.2

Kapasitas dari *s-t cut* $(X, \bar{X})$ dalam jaringan $G(V,E,c,f)$ didefinisikan sebagai

$$c(X,\bar{X}) = \sum_{(x,y)\in(X,\bar{X})} c(x,y) \qquad (2.9)$$

Definisi 2.4.3

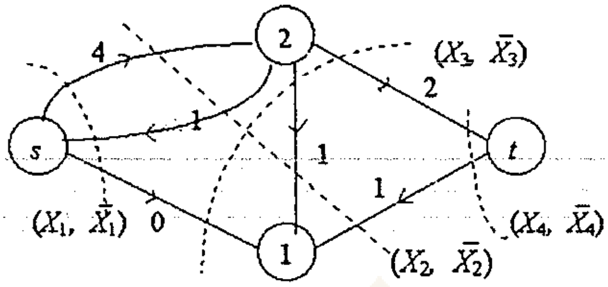
Minimum *s-t* cut (C min) adalah *s-t* cut dengan kapasitas minimum dari semua *s-t* cut :

$$c(C\min) = \min\{c(X,\bar{X})\} \qquad (2.10)$$

dengan $(X, \bar{X})$ adalah *s-t* cut dalam G.

Contoh 2.3:

Diberikan jaringan G(V,E,c,f), tentukan potongan minimumnya



Gambar 2.10.Potongan-potongan pada jaringan

Penyelesaian :

Pada jaringan di atas terdapat 4 s-t cut

$(X_1, \bar{X}_1) = (s,\{1,2,t\}) = \{(s,1),(s,2)\}$

$(X_2, \bar{X}_2) = (\{s,1\},\{2,t\}) = \{(s,2)\}$

$(X_3, \bar{X}_3) = (\{s,2\},\{1,t\}) = \{(2,t),(2,1),(s,1)\}$

$(X_4, \bar{X}_4) = (\{s,1,2\},t) = \{(2,t)\}$

Dengan kapasitasnya

$c(X_1, \bar{X}_1) = c(s,1) + c(s,2) = 0 + 4 = 4$

$c(X_2, \bar{X}_2) = c(s,2) = 4$

$c(X_3, \bar{X}_3) = c(2,t) + c(2,1) + c(s,1) = 2 + 1 + 0 = 3$

$c(X_4, \bar{X}_4) = c(2,t) = 2$

Teorema 2.4.1.

Misal $(X, \bar{X})$ adalah potongan dari s-t (s-t cut) pada jaringan G(V,E,c,f). Nilai aliran f_{st} dari s ke t dalam G yaitu

$$f_{st} = f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X) \le c(X, \bar{X}) \qquad (2.11)$$

Bukti :

Dengan melihat pola aliran $\{f(x,y)\}$ pada definisi 2.3.1. Jika f adalah aliran dalam G maka akan memenuhi persamaan di atas jika :

$x \in X$ maka

$$f_{st} = \sum_{x \in X} [f(x,V) - f(V,x)] = f(X,V) - f(V,X) \qquad (2.12)$$

Jika $V = X \cup \bar{X}$, maka :

$$f_{st} = f(X, X \cup \bar{X}) - f(X \cup \bar{X}, X)$$

$$= f(X,X) + f(X, \bar{X}) - f(X, X) - f(\bar{X}, X)$$

$$= f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X)$$

Jika $f(X, \bar{X}) \ge 0$ dan $f(X, \bar{X}) \le c(X, \bar{X})$ maka terlihat bahwa

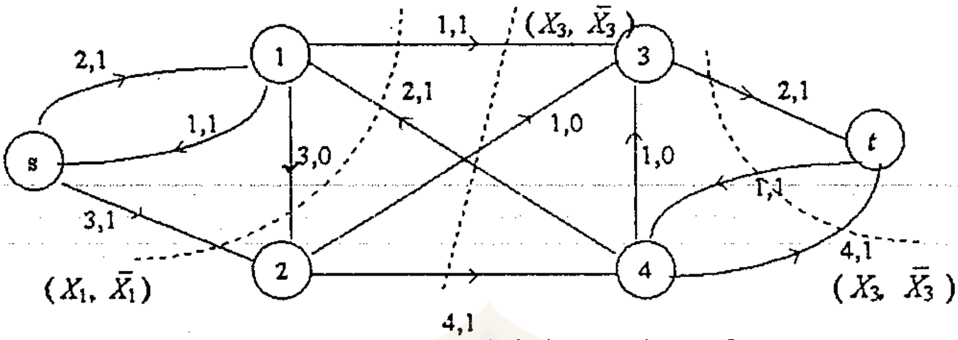
$$f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X) \le c(X, \bar{X}) \qquad \square$$

Dari definisi 2.3.1, didapatkan $f(X, \bar{X}) \le c(X, \bar{X})$ dan $f(X, \bar{X}) \ge 0$, sehingga nilai aliran $f_{st} \ge 0$.

Contoh 2.4: Diberikan jaringan G(V,E,c,f), dengan mengambil beberapa potongan pada jaringan. Tunjukkan bahwa :

$$f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X) \le c(X, \bar{X}), \text{ pada}$$

a) $(X_1, \bar{X_1})$ b) $(X_2, \bar{X_2})$ c) $(X_3, \bar{X_3})$



Gambar 2.11.Beberapa potongan pada jaringan $G(V,E,c,f)$

Penyelesaian :

Berdasarkan Gambar 2.11, maka :

a) $X_1 = \{s,1\}$ $\quad \bar{X}_1 = \{2,3,4,t\}$

$f(X_1, \bar{X}_1) - f(\bar{X}_1, X_1) = f(s,2) + f(1,2) + f(1,3) - f(4,1)$

$= 1 + 0 + 1 - 1 = 1$

$c(X_1, X_1) = c(s,2) + c(1,2) + c(1,3)$

$= 3 + 3 + 1 = 7$

$f(X_1, \bar{X}_1) - f(\bar{X}_1, X_1) \leq c(X_1, \bar{X}_1)$

b) $X_2 = \{s,1,2\}$ $\quad \bar{X}_2 = \{3,4,t\}$

$f(X_2, \bar{X}_2) - f(\bar{X}_2, X_2) = f(1,3) + f(2,3) + f(2,4) - f(4,1)$

$= 1 + 0 + 1 - 1 = 1$

$c(X_2, \bar{X}_2) = c(1,3) + c(2,3) + c(2,4)$

$= 1 + 1 + 4 = 6$

$f(X_2, \bar{X}_2) - f(\bar{X}_2, X_2) \leq c(X_2, \bar{X}_2)$

c) $X_3 = \{s,1,2,3,4\}$ $\quad \bar{X}_3 = \{t\}$

$$f(X_3, \overline{X_3}) - f(\overline{X_3}, X_3) = f(3,t) + f(4,t) - f(t,4)$$

$$= 1 + 1 - 1 = 1$$

$$c(X_3, \overline{X_3}) = c(3,t) + c(4,t)$$

$$= 2 + 4 = 6$$

$$f(X_3, \overline{X_3}) - f(\overline{X_3}, X_3) \leq c(X_3, \overline{X_3})$$

Sesuai dengan teorema yang menyatakan bahwa nilai aliran dari s ke t akan sama dengan nilai aliran yang melalui potongan dari s ke t. Dalam hal ini nilai aliran dari s ke t adalah 1, akan sama dengan nilai aliran yang melalui ketiga potongan dari s ke t .

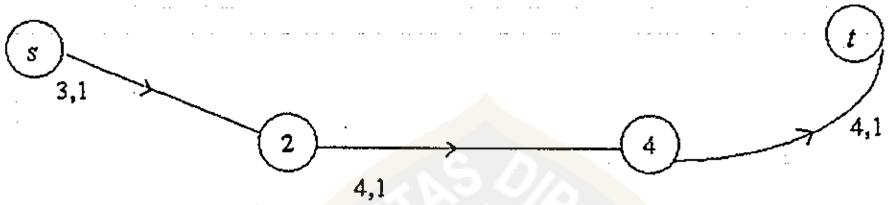
2.5. Aliran Maksimum

Dalam jaringan berarah pada graph G(V,E,c,f) dimana setiap e $\in E$ terdapat $c \geq 0$ yang disebut kapasitas garis. Pada graph berarah G yang terdiri dari garis-garis berhingga, kapasitas garisnya juga berhingga. Sehingga alirannya yang dialirkan dari pusat sumber s ke pusat terminal t pun berhingga jumlahnya. Sedangkan aliran maksimum yang mengalir dinotasikan dengan f_{maks}.

Definisi 2.5.1. Lintasan Aliran Tambahan (*Flow Augmenting Path*)

Lintasan (path) P_{st} antara titik s dan t yang diberikan oleh jaringan G(V,E,c,f) dikatakan aliran tambahan (*flow augmenthing path*) pada aliran f jika semua garis maju (x,y) pada P_{st} tidak jenuh, $f(x,y) < c(x,y)$ dan semua garis balik (y,x) tidak kosong, $f(y,x) > 0$, dalam lintasan dari s ke t pada P_{st}..

Lintasan antara titik s dan titik t pada jaringan $G(V,E,c,f)$ diilustrasikan pada gambar 2.12



Gambar 2.12. Ilustrasi *flow augmenting path*

Dari gambar 2.11 dapat dilihat bahwa salah satu flow augmenthing path-nya disajikan pada gambar 2.12. Aliran f dikatakan maksimum jika dan hanya jika tidak ada aliran tambahan dalam f yang akan menambah nilai aliran f. Dapat dilihat bahwa s-t cut $(X, \bar{X})$ dikatakan minimum jika dan hanya jika untuk setiap aliran maksimum f, semua garis $(X, \bar{X})$ adalah jenuh dan semua garis $(\bar{X}, X)$ adalah kosong.

Teorema 2.5.1. Teorema aliran maksimum-potongan minimum

(*Max Flow - Min Cut*)

Nilai aliran maksimum f_{maks} dari s ke t dalam jaringan $G(V,E,c,f)$ adalah sama dengan kapasitas minimum potongan dari s ke t .

$$f_{maks} = \text{maks}\{f_{st}\} = \min\{c(X_i, \bar{X}_i)\} \qquad (2.13)$$

dimana $(X_i, \bar{X}_i)$ adalah potongan dari s ke t dan maksimum $\{f_{st}\}$ memenuhi semua pola aliran G.

Bukti :

Misal $(X_i, \bar{X}_i)$ adalah sebarang potongan dari s ke t. Dari teorema 2.4.1. nilai f_{st} dari aliran f ditentukan dari kapasitas s-t cut.

$$f_{st} \leq f(X_i, \bar{X}_i) - f(\bar{X}_i, X_i) \leq c(X_i, \bar{X}_i) \qquad (2.14)$$

Nilai aliran maksimum f maks ditentukan dari kapasitas minimum potongan dari s ke t (s-t cut) atau

$$f_{maks} = \text{maks}\,\{f_{st}\} \;\leq\; \min\,\{c(X_i, \bar{X}_i)\} \qquad (2.15)$$

Dengan demikian untuk membuktikan teorema 2.5.1.harus dipenuhi

$$f(X, \bar{X}) = c(X, \bar{X}) \qquad (2.16a)$$

$$f(\bar{X}, X) = 0, \qquad (2.16b)$$

yang equivalen dengan

$$f_{maks} = \text{maks}\,\{f_{st}\} = f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X) = f(X, \bar{X})$$

$$= c(X_i, \bar{X}_i) = \min\,\{c(X_i, \bar{X}_i)\} \qquad (2.17)$$

Untuk menunjukkan bahwa syarat pada persamaan (2.16) terpenuhi, diasumsikan f aliran maksimum dalam $G(V,E,c,f)$. Kemudian didefinisikan suatu subset X pada himpunan titik V sebagai berikut

1. $s \in X$
2. Jika $x \in X$ dan $f(x,y) < c(x,y)$, maka $y \in X$
3. Jika $x \in X$ dan $f(y,x) > 0$, maka $y \in X$

sehingga $t \in \bar{X} = V - X$.

Andai $t \notin \bar{X}$ maka terdapat path di antara titik-titik s dan t

$$P_{st} = (s,x_2)\,(x_2,x_3)\,(x_3,x_4)\,\ldots\,(x_{k-1},t) \qquad (2.18)$$

Untuk semua garis maju $(x_\alpha,x_{\alpha+1})$ pada P_{st} tidak jenuh,

$$f(x_\alpha,x_{\alpha+1}) < c(x_\alpha,x_{\alpha+1}).$$

Dan untuk semua garis balik $(x_{\alpha+1},x_\alpha)$ pada P_{st} tidak kosong,

$$f(x_{\alpha+1},x_\alpha) > 0.$$

Ambil sebuah garis $(x_\alpha,x_{\alpha+1})$ pada P_{st} dikatakan menjadi garis maju pada P_{st} jika dalam jaringan dari s ke t pada P_{st} garis $(x_\alpha,x_{\alpha+1})$ berarah dari x_α ke $x_{\alpha+1}$. Jika tidak dikatakan garis balik pada P_{st} dan dapat menjadi garis balik dari t ke s pada P_{st}. Dikatakan bahwa sebuah garis (x,y) adalah jenuh dengan mengikuti aliran f jika

$$f(x, y) = c(x, y)$$

dan dikatakan aliran kosong pada aliran f jika

$$f(x, y) = 0.$$

Misal diambil suatu besaran :

$$w_1 = \min\{c(x_\alpha,x_{\alpha+1}) - f(x_\alpha,x_{\alpha+1})\} \qquad (2.19)$$

Untuk semua garis maju $(x_\alpha,x_{\alpha+1})$ pada P_{st}

$$w_2 = \min\{f(x_{\alpha+1}, x_\alpha)\} \qquad (2.20)$$

Untuk semua garis balik $(x_{\alpha+1}, x_\alpha)$ pada P_{st} dan,

$$w = \min(w_1,w_2).$$

Maka dapat didefinisikan aliran baru f^* berdasarkan aliran awal f yang memenuhi

$$f^*(x_\alpha,x_{\alpha+1}) = f(x_\alpha,x_{\alpha+1}) + w \qquad (2.21)$$

Untuk semua garis maju

$$f^*(x_{\alpha+1}, x_\alpha) = f(x_{\alpha+1}, x_\alpha) - w \tag{2.22}$$

Untuk semua garis balik $(x_\alpha, x_{\alpha+1})$ pada P_{st} dan

$$f^*(x,y) = f(x,y) \tag{2.23}$$

Untuk semua garis lain (x,y) pada G. Hal ini membuktikan bahwa fungsi aliran baru f^* yang didefinisikan tersebut adalah pola aliran fisibel yang mempunyai nilai f_{st} + w dari s ke t, dimana f_{st} adalah nilai awal aliran f. Hal ini menunjukkan bahwa f bukan aliran maksimum, kontradiksi dengan asumsi bahwa f aliran maksimum, sehingga t harus dalam $\bar{X}$ dan $(X, \bar{X})$ adalah ptongan dari s ke t . Maka diperoleh :

$$f(x, y) = c(x, y) \tag{2.24}$$

Untuk $(x, y) \in (X, \bar{X})$, $x \in X$ dan $y \in \bar{X}$,

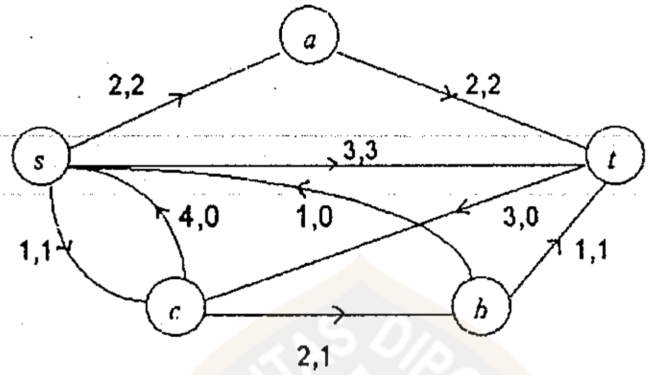
$$f(y, x) = 0$$

Untuk $(y, x) \in (\bar{X}, X)$, $y \in \bar{X}$ dan $x \in X$, sehingga diperoleh

$$f(X, \bar{X}) = c(X, \bar{X}) \text{ dan } f(\bar{X}, X) = 0 \tag{2.25}$$ □

Contoh 2.5 :

Diberikan jaringan G(V,E,c,f), tentukan potongan potongan yang ada dan berapa aliran maksimumnya?



Gambar 2.13. Jaringan G(V,E,c,f)

Penyelesaian :Potongan-potongan yang ada antara lain :

X	$\bar{X}$	$c(X, \bar{X})$	$f(X, \bar{X})$	$f(\bar{X}, X)$
$\{s\}$	$\{a,b,c,t\}$	$2 + 1 + 3 = 6$	$2 + 1 + 3 = 6$	0
$\{s,a\}$	$\{b,c,t\}$	$2 + 3 + 1 = 6$	$2 + 3 + 1 = 6$	0
$\{s,b\}$	$\{c,a,t\}$	$2 + 3 + 1 + 1 = 7$	$2 + 3 + 1 + 1 = 7$	0
$\{s,c\}$	$\{a,b,t\}$	$2 + 3 + 2 = 7$	$2 + 3 + 1 = 6$	0
$\{s,a,b\}$	$\{c,t\}$	$1 + 3 + 2 + 1 = 7$	$1 + 3 + 2 + 1 = 7$	0
$\{s,a,c\}$	$\{b,t\}$	$3 + 2 + 2 = 7$	$3 + 2 + 1 = 6$	0
$\{s,c,b\}$	$\{a,t\}$	$2 + 3 + 1 = 6$	$2 + 3 + 1 = 6$	0
$\{s,a,b,c\}$	$\{t\}$	$2 + 3 + 1 = 6$	$2 + 3 + 1 = 6$	0

Berdasarkan definisi 2.5.1 dan teorema 2.5.1 aliran pada jaringan dikatakan maksimum jika $c(X, \bar{X}) = f(X, \bar{X})$ dan $f(\bar{X}, X) = 0$, sehingga dari gambar 2.13 dihasilkan $c(X, \bar{X}) = f(X, \bar{X}) = 6$ dan $f(\bar{X}, X) = 0$

2.6. Algoritma Ford Fulkerson

Algoritma ini menunjukkan pelabelan untuk titik-titik pada jaringan G(V,E,c,f), yang disajikan dalam bentuk (x,+,w) atau (x,-,w) dimana $x \in V$ dan w adalah bilangan positif atau ∞.

Algoritma Ford-Fulkerson dipakai untuk menyelesaikan aliran maksimum pada jaringan G(V,E,c,f). Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut :

A. Labelling Routine

langkah 1 : Dibentuk label s dengan $(s,+,\infty)$

langkah 2 : Pilih label lain dalam titik x yang memenuhi

a. $\forall y$, $(x,y) \in E$, $(f(x,y) < c(x,y))$ label y dengan $(x,+,w(y))$,dan

$w(y) = \min\,[w(x), c(x,y) - f(x,y)]$, dengan $w(x)$ adalah bobot pada titik x dan $w(y)$ adalah bobot pada titik y

b. $\forall y$, $(y,x) \in E$, $(f(y,x) > 0$ label y dengan $(x,-,w(y))$,dan

$w(y) = \min\,[w(x), f(y,x)]$

Rubah label pada x dengan melingkari + atau –. Sehingga x menjadi terlabel dan ter*scan*.

Langkah 3 : Kembali ke langkah 2 sampai t berlabel lalu ke augmentation routine atau roses berhenti, jika tidak ada label yang dapat ditandai dan t tidak berlabel.

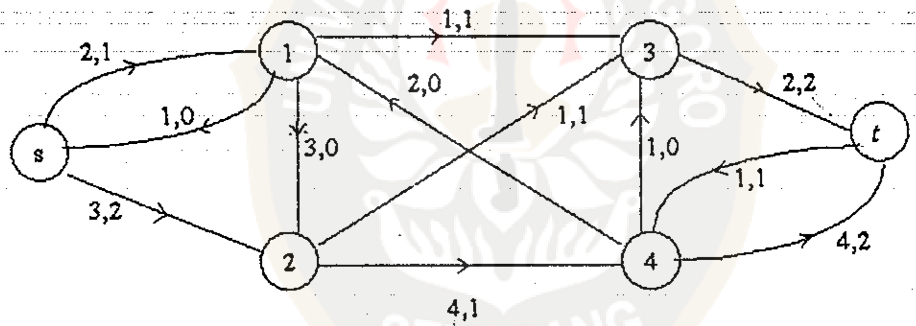
B. Augmentation Routine

langkah 1 : ambil $z = t$ dan ke langkah 2 langkah 2: Jika label dari z adalah (q,+,w(z)), maka menambah aliran $f(q,z)$ dengan w(t) adalah bobot pada titik t. Jika label dari z adalah (q,-,w(+)), maka mengurangi aliran $f(z,q)$ dengan w(t).

langkah 3 : Jika $q = s$ kembali ke langkah 1 pada labelling routine, tetapi jika z=q kembali ke langkah 2 pada augmentation routine.

Contoh 2.6 :

Diberikan jaringan G(V,E,c,f), tentukan aliran maksimum dengan menggunakan algoritma Ford-Fulkerson.



Gambar 2.14. Jaringan G(V,E,c,f) yang belum terisi penuh oleh aliran.

Penyelesaian :

Iterasi 1

A. Labelling Routine

langkah 1: beri titik s dengan label (s,+,∞)

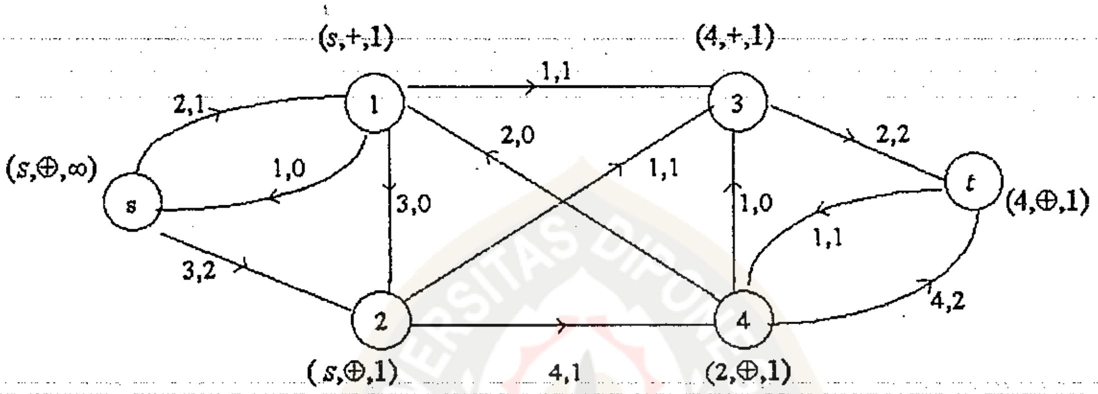
langkah 2: beri titik 1 dengan label (s,+,1) dan titik 2 dengan (s,+,1), ubah (s,+,∞) menjadi (s,⊕, ∞)

langkah 3: kembali ke langkah 2

langkah 2: beri titik 4 dengan label (2,+,1), ubah (s,+,1) menjadi (s, ⊕, 1) langkah 3: kembali ke langkah 2

langkah 2:beri titik 3 dan t dengan label (4,+,1),ubah (2,+,1) menjadi (2, ⊕, 1)

langkah 3: ke Augmentation Routine



Gambar 2.15a. Titik-titik pada jaringan G(V,E,c,f) yang terkena labelling routine

B. Augmentation Routine

langkah 1 : ambil $z = t$

langkah 2 : menambah aliran $f(4,t)$ dengan w(t) = 1

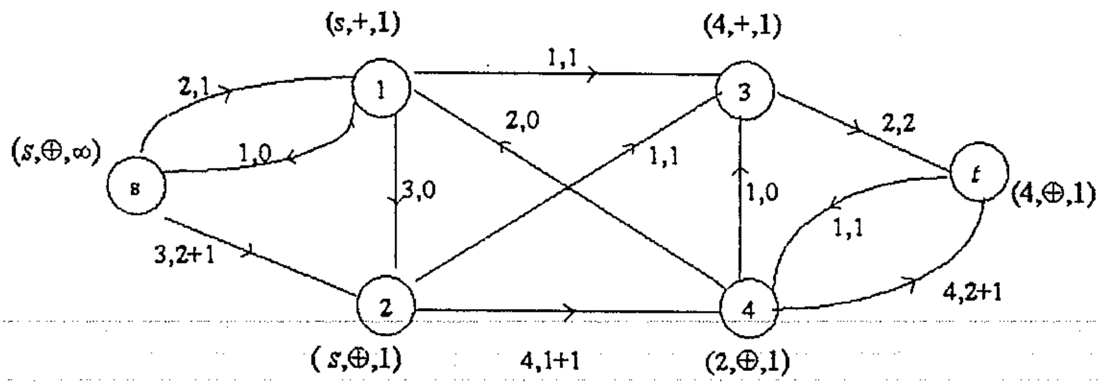
langkah 3 : ambil z = 4

langkah 2 : menambah aliran $f(2,4)$ dengan 1

langkah 3 : ambil z = 2

langkah 2 : menambah aliran $f(s,2)$ dengan 1

langkah 3 : kembali ke langkah 1 pada Labelling Routine



Gambar 2.15b. Titik-titik pada jaringan G(V,E,c,f) yang terkena labelling routine dan augmenting routine

Iterasi 2

A. Labelling Routine

langkah 1: beri titik s dengan label $(s,+,\infty)$

langkah 2: beri titik 1 dengan label $(s,+,1)$ dan titik 2 dengan $(1,+,1)$, ubah $(s,+,\infty)$ menjadi $(s,\oplus,\infty)$

langkah 3: kembali ke langkah 2

langkah 2: beri titik 4 dengan label $(2,+,1)$, ubah $(s,+,1)$ menjadi $(s,\oplus,1)$

langkah 3: kembali ke langkah 2

langkah 2: beri titik 3 dan t dengan label $(4,+,1)$, ubah $(2,+,1)$ menjadi $(2,\oplus,1)$ dan $(1,+,1)$ menjadi $(1,\oplus,1)$

langkah 3 : ke Augmentation Routine

B. Augmentation Routine

langkah 1 : ambil $z = t$

langkah 2 : menambah aliran $f(4,t)$ dengan $w(t) = 1$

langkah 3 : ambil $z = 4$

langkah 2 : menambah aliran $f(2,4)$ dengan 1

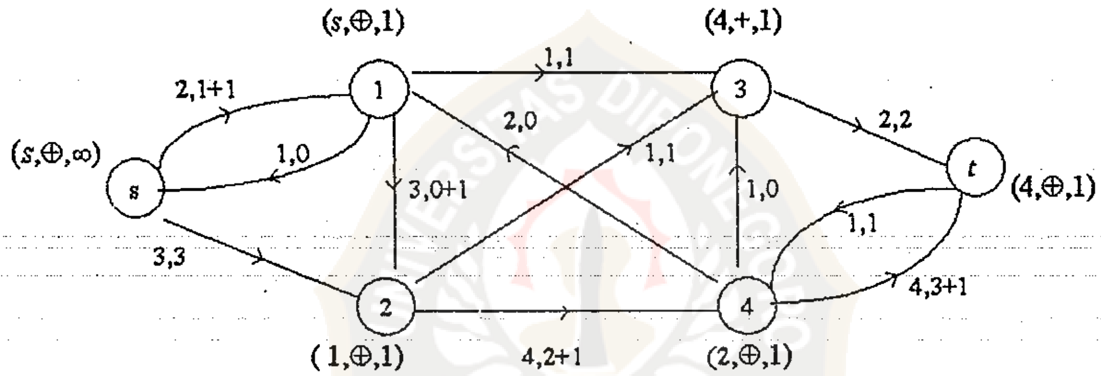
langkah 3 : ambil $z = 2$

langkah 2 : menambah aliran $f(1,2)$ dengan 1

langkah 3 : ambil $z = 1$

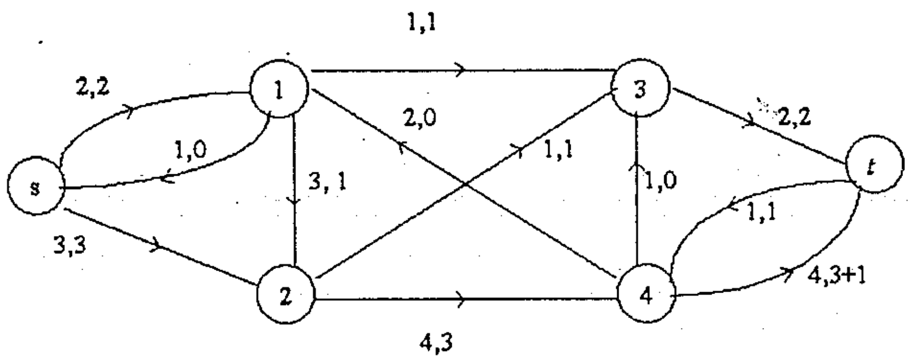
langkah 2 : menambah aliran $f(s,1)$ dengan 1

langkah 3 : kembali ke langkah 1 pada Labelling Routine



Gambar 2.16.Titik-titik pada jaringan G(*V,E,c,f*) yang terkena labelling routine dan agmentation routine

Perhitungan selesai karena sudah ditemukan aliran maksimum sebagai berikut :



Gambar 2.17.Jaringan G(*V,E,c,f*) yang sudah berisi aliran maksimum

Aliran maksimumnya adalah 5. Apabila kita ambil potongan minimumnya

$$(X, \bar{X}) = (s, \{1,2,3,4,t\})$$

$$= \{(s,1),(s,2)\}$$

maka kapasitas minimumnya adalah

$$c(X, \bar{X}) = c(s,1) + c(s,2)$$

$$= 2 + 3 = 5$$