BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Ruang Sampel

Dalam teori peluang, akan digunakan terminologi atau istilah himpunan berikut : Ruang sampel, hasil eksperimen, dan peristiwa. Untuk membahas peluang perlu kiranya mengingat definisi-definisi berikut ini :

Definisi (2.1.1).

Keseluruhan dari semua anggota disebut ruang sampel dan dinotasikan dengan Ω, dan ω menotasikan suatu anggota atau elemen dalam Ω.

contoh (2.1).

Diberikan $\Omega = \mathbb{R}^2$, dimana $\mathbb{R}^2$ adalah koleksi dari elemen-elemen ω dan $\omega = (x,y)$ adalah pasangan dari bilangan real x dan y.

Definisi (2.1.2).

Suatu peristiwa adalah himpunan bagian dari ruang sampel. Kelas dari semua peristiwa didefinisikan sebagai ruang peristiwa.

Ruang peristiwa akan dinotasikan dengan huruf latin, dan biasanya $\mathcal{A}$. $\mathcal{B}$ dan $\mathcal{F}$ adalah simbol serupa yang lain, digunakan untuk menotasikan kelas dari semua peristiwa.

Peristiwa adalah himpunan bagian Ω dimana ditetapkan peluangnya.

2.2. Lapangan dan Lapangan Sigma

2.1.1. *Closure (tutupan)*

Anggaplah $\mathscr{A}$ adalah kelas dari semua himpunan bagian Ω. Jika dengan operasi satu atau beberapa elemen $\mathscr{A}$, diperoleh suatu elemen dari kelas yang sama, maka kelas ini tertutup dibawah operasi. Sebagai contoh

jika $A \in \mathscr{A}$, maka $A^c \in \mathscr{A}$, maka $\mathscr{A}$ dikatakan tertutup dibawah komplemennya.

jika $A, B \in \mathscr{A}$, maka $A \cup B \in \mathscr{A}$, maka $\mathscr{A}$ dikatakan tertutup dibawah gabungannya.

Selanjutnya jika $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$, maka $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$, $\forall n < \infty$. Sehingga $\mathscr{A}$ tertutup dibawah gabungan berhingga.

Demikian pula, jika

$$A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{A}$$

maka $\qquad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}, \forall n < \infty$

karenanya $\mathscr{A}$ tertutup dibawah irisan berhingga.

Contoh (2.2).

Misalkan $\mathscr{C}$ adalah kelas dari semua interval pada (x,∞), $x \in R$.

$$(x,\infty) \cup (y,\infty) = (u,\infty),$$

$$(x,\infty) \cap (y,\infty) = (v,\infty),$$

dimana $u = \min(x,y)$ dan $v = \max(x,y)$.

Karenanya $\mathscr{C}$ adalah tertutup dibawah gabungan berhingga dan irisan berhingga. Tetapi $\mathscr{C}$ tidak tertutup dibawah komplemennya karena

$$(x,\infty)^c = (-\infty,x] \notin \mathscr{C}.$$

2.2.2. *Lapangan*

Bila A dan B adalah peristiwa maka $A \cup B$ dan $A \cap B$ juga peristiwa. Dimana juga akan dicari nilai peluangnya. Hal ini membawa pada konsep suatu lapangan.

Definisi (2.2.1).

Diambil Ω adalah suatu ruang sampel yang tidak kosong. Suatu kelas $\mathscr{F}$ yang terdiri dari himpunan bagian-himpunan bagian Ω disebut suatu lapangan jika kelas tersebut memuat Ω dan tertutup dibawah komplemennya dan gabungan berhingga :

(i) $\Omega \in \mathscr{F}$;

(ii) jika $A \in \mathscr{F}$ maka $A^c \in \mathscr{F}$;

(iii) jika $A, B \in \mathscr{F}$ maka $A \cup B \in \mathscr{F}$.

Dengan Hukum De Morgan, $A \cap B = (A^c \cap B^c)^c$ dan $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$. Jika $\mathscr{F}$ tertutup dibawah komplemennya, karena itu, $\mathscr{F}$ tertutup dibawah gabungan berhingga jika hanya jika tertutup dibawah irisan berhingga. Selanjutnya (iii) dapat diganti dengan

(iii′) jika $A, B \in \mathscr{F}$ maka $A \cap B \in \mathscr{F}$.

Lemma (2.2.2).

Suatu lapangan adalah tertutup dibawah gabungan berhingga. Sebaliknya, suatu kelas yang tertutup dibawah komplemennya dan gabungan berhingga adalah suatu lapangan.

Bukti :

Misalnya $\mathscr{A}$ adalah suatu lapangan. Maka

(i) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$,

(ii) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}, \ \forall n < \infty$

Sehingga

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A} \Rightarrow A_1^c, A_2^c, \ldots, A_n^c \in \mathscr{A}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \in \mathscr{A}$$

$$\Rightarrow \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \right)^c \in \mathscr{A}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}, \text{ (hukum De Morgan)}$$

karenanya $\mathscr{A}$ adalah tertutup dibawah gabungan berhingga.

Sebaliknya, misalnya $\mathscr{A}$ adalah kelas sedemikian hingga tertutup dibawah komplemennya dan

(iii) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$

dengan proses yang sama diatas dan dengan hukum de Morgan, didapat

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A} \Rightarrow A_1^c, A_2^c, \ldots, A_n^c \in \mathscr{A}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c \in \mathscr{A}$$

$$\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c \right)^c \in \mathscr{A}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$$

karenanya $\mathscr{A}$ tertutup dibawah irisan berhingga, sehingga $\mathscr{A}$ adalah lapangan.

Setiap lapangan memuat himpunan kosong $\emptyset$ dan ruang sampel Ω. Kelas yang hanya memuat $\emptyset$ dan Ω juga disebut lapangan. Ini adalah lapangan terkecil dan termuat dalam setiap lapangan yang lain. Sedangkan lapangan terbesar dalam Ω memuat semua himpunan bagian dari Ω.

Dari contoh (2.2), dengan mempertimbangkan kelas-kelas $\mathscr{C}$ yang lain dari himpunan-himpunan, lapangan terkecil yang memuat $\mathscr{C}$ disebut minimal lapangan atau lapangan yang terbentuk oleh $\mathscr{C}$, dinotasikan dengan $\sigma(\mathscr{C})$.

Contoh (2.3).

Misalkan Ω terdiri dari empat elemen a,b,c,d dan $\mathscr{C}$ terdiri dari himpunan {a} dan {b}. Dengan menambahkan pada $\mathscr{C}$ komplemen {a} dan {b} dan gabungan serta irisannya, didapatkan kelas $\mathscr{C}$ terdiri dari himpunan-himpunan

$\emptyset$ {a} {b} {a,b} {c,d} {b,c,d} {a,c,d} Ω

adalah tertutup dibawah komplementasi dan gabungan berhingga, karena itu $\mathscr{C}$ adalah suatu lapangan. Dan ini adalah merupakan lapangan terkecil yang memuat {a} dan {b}.

2.2.3. *Lapangan-σ dan Lapangan Borel*

Suatu kelas yang tertutup dibawah operasi-operasi berhingga tidak berarti tertutup dibawah operasi-operasi terhitung. Dalam contoh (2.2) terlihat bahwa kelas $\mathscr{C}$ dari semua interval pada (x,∞), $x \in R$ tertutup dibawah irisan berhingga. Tetapi tidak tertutup dibawah irisan terhitung, sebab

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(x - \frac{1}{n},\infty) = [x,\infty) \notin \mathscr{C}.$$

Definisi (2.2.3).

Suatu kelas $\mathscr{F}$ dari himpunan bagian-himpunan bagian Ω sebarang yang tidak kosong adalah suatu lapangan-σ jika kelas tersebut adalah suatu lapangan dan tertutup dibawah gabungan terhitung :

$$\text{jika } A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F} \text{ maka } A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathscr{F}.$$

Definisi (2.2.4).

Misalkan A_1, A_2, ... , A_n, ... adalah barisan tak berhingga himpunan anggota $\mathscr{F}$. Bila gabungan terhitung dan irisan terhitung dari himpunan tersebut juga ada dalam $\mathscr{F}$, maka $\mathscr{F}$ disebut lapangan Borel.

Contoh (2.4).

Misalkan $\mathscr{C}$ adalah kelas dari semua interval pada $(-\infty,x)$, $x \in \mathbb{R}$ sebagai himpunan bagian dari garis real $\mathbb{R}$. Kelas ini tertutup dibawah irisan berhingga, tetapi tidak tertutup dibawah komplemennya dan atau dibawah irisan terhitung. Misalkan $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}$ adalah lapangan-σ terkecil yang memuat $\mathscr{C}$. Maka $\mathscr{B}$ memuat interval-interval dari $[x,\infty)$, dimana komplemen dari $(-\infty,x)$. Lapangan ini memuat interval-interval sebagai berikut

$(-\infty,a] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty,a+1/n)$, (oleh irisan terhitung),

$(a,\infty) = \{(-\infty,a]\}^{c}$, (oleh komplemen)

$(a,b) = (-\infty,b) \cap (a,\infty)$, $a < b$,

$(a,b]$, $[a,b)$, dan seterusnya untuk $a,b \in \mathbb{R}$.

$\mathscr{B}$ disebut lapangan Borel dari himpunan bagian - himpunan bagian garis real. Himpunan-himpunan dari $\mathscr{B}$ disebut himpunan Borel.

2.3. Ruang Peluang

Definisi (2.3.1).

Ω sebarang himpunan, $\mathscr{F}$ lapangan-σ dalam Ω, dan P adalah fungsi himpunan berharga real yang didefinisikan pada $\mathscr{F}$, memenuhi :

(i) $0 \leq P(F) \leq 1$, untuk setiap $F \in \mathcal{F}$

(ii) jika $F_n \in \mathcal{F}$ sedemikian hingga $F_i \cap F_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$ dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}$, maka $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n)$

(iii) $P(\Omega) = 1$

maka triple $(\Omega,\mathcal{F},P)$ disebut ruang probabilitas. Anggota dari $\mathcal{F}$ disebut peristiwa dan harga fungsi P pada setiap $F \in \mathcal{F}$ disebut peluang dari peristiwa.

Definisi (2.3.2).

Diberikan suatu ruang peluang $(\Omega,\mathcal{A},P[.])$, andaikan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah n peristiwa dalam $\mathcal{A}$. Peristiwa $A_1, A_2, \ldots, A_n$ didefinisikan saling bebas jika hanya jika

$$P[A_i \cap A_j] = P[A_i]\,P[A_j] \text{ untuk } i \neq j$$

$$P[A_i \cap A \cap {}_j A_k] = P[A_i]\,P[A_j]\,P[A_k] \text{ untuk } i \neq j,\ j \neq k,\ i \neq k$$

$$\vdots$$

$$P[\bigcap_{i=1}^{n} A_i] = \prod_{i=1}^{n} P[A_i].$$

2.4. Peubah Acak

Definisi (2.4.1).

Diberikan ruang peluang $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Suatu peubah acak diberi notasi X atau X(.) adalah suatu fungsi dengan domain Ω dan kodomain himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{R}$ disebut garis real yang memenuhi persyaratan bahwa untuk setiap bilangan real r terdapatlah peristiwa $F_r = \{\omega \ ; \ X(\omega) \leq r \} \in \mathcal{F}$.

Contoh (2.5).

Sebuah mata uang dilempar, $\Omega = \{H,T\}$

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, dengan

$H. \longrightarrow 1$

$T. \longrightarrow 0$

dimana $X(\omega) = 1$ jika $\omega = H$

$X(\omega) = 0$ jika $\omega = T$

Tunjukkan bahwa X merupakan peubah acak.

Bukti :

X merupakan fungsi sebab tiap anggota Ω mempunyai kawan tunggal. Untuk setiap bilangan real r terdapatlah peristiwa

$F_r = \{\omega \ ; \ X(\omega) \leq r \} \in \mathcal{F}$

- ambil $r < 0$

$F_r = \{\omega \ ; \ X(\omega) = r$ atau $X(\omega) < r \}$

$= \{\omega \; ; \; X(\omega) = r \} \cup \{\omega \; ; \; X(\omega) < r \}$

$= \{\omega \; ; \; X(\omega) < 0 \} = \emptyset \in \mathscr{F}$

- ambil $r = 0$

$$F_r = \{\omega \; ; \; X(\omega) \leq r \} = \{\omega \; ; \; X(\omega) < 0 \} \cup \{\omega \; ; \; X(\omega) = 0 \} = \emptyset \cup \{T\} = \{T\} \in \mathscr{F}$$

- ambil $0 < r < 1$

$$F_r = \{\omega \; ; \; X(\omega) = r \text{ atau } X(\omega) < r \}$$
$$= \{\omega \; ; \; X(\omega) = r \} \cup \{\omega \; ; \; X(\omega) < r \}$$
$$= \{\omega \; ; \; X(\omega) = r \} \cup \{\omega \; ; \; X(\omega) = 0 \text{ atau } x(\omega) < 0 \text{ atau } 0 < X(\omega) < r \}$$
$$= \emptyset \cup \{T\} \cup \emptyset \cup \emptyset = \{T\} \in \mathscr{F}$$

- ambil $r = 1$

$$F_r = \{\omega \; ; \; X(\omega) \leq 1 \}$$
$$= \{\omega \; ; \; X(\omega) = 1 \} \cup \{\omega \; ; \; X(\omega) < 1 \} \cup \{\omega \; ; \; X(\omega) = 0 \} \cup \{\omega \; ; \; X(\omega) < 0 \}$$
$$= \{H\} \cup \emptyset \cup \{T\} \cup \emptyset = \{H,T\} \in \mathscr{F}$$

- ambil $r > 1$

$$F_r = \{\omega \; ; \; X(\omega) \leq r \} = \{\omega \; ; \; X(\omega) \leq 1 \} \cup \{\omega \; ; \; 1 < X(\omega) < \infty \} = \Omega \cup \emptyset = \Omega \in \mathscr{F}$$

terbukti untuk setiap r, F_r adalah peristiwa sedemikian hingga $F_r \in \mathscr{F}$. Jadi X adalah peubah acak.

2.5. Fungsi Distribusi dan Nilai Harapan

Definisi (2.5.1).

Fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak X dinyatakan dengan $F_X(.)$ didefinisikan sebagai suatu fungsi dengan domain $\mathbb{R}$ dan kodomain [0,1] yang memenuhi untuk setiap bilangan X :

$$F_X(x) = P[X \le x] = P[\{\omega ; X(\omega) \le x\}].$$

Definisi (2.5.2).

Peubah acak X dikatakan kontinu jika terdapat fungsi F_X sedemikian hingga $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du$ untuk setiap bilangan real x, dimana f_X disebut fungsi densitas. Peubah acak X disebut deskrit jika daerah hasil fungsi x adalah terhitung.

Definisi (2.5.3).

Setiap fungsi f dengan domain $\mathbb{R}$ dan kodomain $[0,\infty)$ disebut fungsi densitas jika hanya jika $f(x) \ge 0$ untuk $\forall x$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ (kontinu). Setiap fungsi f dengan domain $\mathbb{R}$ dan kodomain (0,1) medefinisikan fungsi densitas diskrit jika untuk himpunan terhitung $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots$ dipenuhi :

(i) $f(x_j) > 0$ untuk $j = 1,2,\ldots$

(ii) $f(x) = 0$ untuk $x \ne x_j$, $j = 1,2,\ldots$

(iii) $\sum_j f(x_j) = 1$.

Distribusi Normal

Definisi (2.5.4).

Suatu peubah acak kontinu X dikatakan berdistribusi normal jika fungsi densitas peluangnya mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\,[-(x-\mu)^2/2\sigma^2], \; -\infty < x < \infty$$

dengan μ dan σ^2 masing-masing merupakan parameter rata-rata dan varians dari distribusi normal, yang bernilai :

$-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma^2 < \infty$

$X \sim N\ (\mu,\sigma^2)$ maksudnya adalah peubah acak kontinu X berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan varians σ^2.

$X_i \sim DNI\ (0,\sigma^2)$, $i = 1,2,\ \ldots,n$ maksudnya adalah peubah acak X berdistribusi normal independen dengan rata-rata 0 dan varians σ^2.

Definisi (2.5.5).

Nilai harapan dari peubah acak kontinu X dinotasikan dengan E[X] didefinisikan sebagai :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\ dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx$$

F(x) adalah fungsi distribusi kumulatif dan f(x) adalah fungsi densitas kontinu. Jika X peubah acak diskrit maka $E[X] = \Sigma_i\ x_i\ p(x_i)$ dengan $f(x) = \Sigma_i\ p(x_i)$ fungsi densitas diskrit. Sedangkan varians dari x didefinisikan sebagai

$$\text{var}\ [X] = E\ [(X-E[X])^2].$$

Theorema (2.5.6).

X adalah peubah bebas kontinu. Jika diketahui fungsi g(x) dan h(x) saling bebas dan konstanta a,b, maka

(i) $E\ [a] = a$

(ii) $E\ [a\ g(x)] = a\ E\ [g(x)]$

(iii) $E\ [a\ g(x) + b\ h(x)] = a\ E[g(x)] + b\ E[h(x)]$.

Bukti :

(i) $E[a] = \int_{-\infty}^{\infty} a\ f(x)\ dx = a \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = a$

(ii) $E\ [a\ g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} a\ g(x)\ f(x)\ dx$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ f(x)\ dx$$

$$= a\ E\ [g(x)]$$

(iii) $E\,[a\,g(x) + b\,h(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \{a\,g(x) + b\,h(x)\}\, f(x)\, dx$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx + b \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, f(x)\, dx$$

$$= a\,E\,[g(x)] + b\,E\,[h(x)]$$

Definisi (2.5.7).

Fungsi karakteristik $\psi(.)$ dari peubah acak x didefinisikan oleh :

$$\psi(t) = E\,[\exp\, itx] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x) \quad (-\infty < t < \infty) \text{ (kontinu)}$$

$$= \Sigma_j\, e^{itx_j}\, p(x_j) \text{ (diskrit).}$$

Jika X berdistribusi normal dengan varians σ^2 dan mean μ

$f_x(x) = 1/\sigma\sqrt{2\pi}\, \exp\,(-1/2\,(x-\mu/\sigma)^2)$ $-\infty < x < \infty$ maka

$$E[e^{itx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, 1/\sigma\sqrt{2\pi}\, \exp(-1/2(x-\mu/\sigma)^2)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(x-\mu)} e^{it\mu}\, 1/\sigma\sqrt{2\pi}\, \exp(-1/2(x-\mu/\sigma)^2)dx$$

$$= e^{it\mu}\, 1/\sigma\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(x-\mu)}\, \exp\,(-1/2\,(x-\mu/\sigma)^2)\, dx$$

$$= e^{it\mu}\, 1/\sigma\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i2t\sigma^2(x-\mu)-(x-\mu)^2)/2\sigma^2} dx$$

$$= e^{it\mu}\, 1/\sigma\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-([(x-\mu)\, -\, it\sigma^2]^2 + t^2\sigma^2)/2\sigma^2} dx$$

$$= e^{it\mu}\, e^{-t^2\sigma^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} 1/\sigma\sqrt{2\pi}\, e^{-[(x-\mu)\, -\, it\sigma^2]^2/2\sigma^2} dx$$

$$= e^{it\mu - (1/2)\, t^2\sigma^2}$$

Jadi $\psi(t) = E[\exp itx] = e^{it\mu - 1/2\, t^2\sigma^2}$

Definisi (2.5.8).

Peubah acak $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ adalah peubah acak berdimensi k jika terdapat fungsi $F_{x_1, x_2, \ldots, x_k}(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ sedemikian hingga :

$$F_{x_1, x_2, \ldots, x_k}(X_1, X_2, \ldots, X_k)$$
$$= \int_{-\infty}^{x_k} \ldots \int_{-\infty}^{x_1} f_{x_1, x_2, \ldots, x_k}(X_1, X_2, \ldots, X_k)\, dx_1 \ldots dx_k$$

untuk setiap $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$.

Definisi (2.5.9).

Fungsi karakteristik bersama dari peubah acak X_1, X_2, ..., X_n didefinisikan sebagai berikut :

$$\psi x(t) = E[\exp(i \textstyle\sum_{k=1}^{n} t_k x_k)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i \textstyle\sum_{k=1}^{n} t_k X_k)\, dF_{x_1, \ldots, x_n}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Jika $X_1, X_2 \ldots, X_n$ adalah peubah acak berdistribusi normal yang saling berdiri sendiri maka fungsi karakteristik bersama $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah :

$$\psi x(t) = \psi x_1(t)\, \psi x_2(t) \ldots \psi x_n(t)$$

$$= e^{it\mu_1 - 1/2 t\sigma_1^2}\, e^{it\mu_2 - 1/2 t\sigma_2^2} \ldots e^{it\mu_n - 1/2 t\sigma_n^2}$$

$$= \exp \{ \Sigma_{k=1}^{n} (it_k\mu_k - 1/2\ t_k^2\ \sigma_k^2)\}$$

2.6. Proses Stokastik

Proses stokastik adalah himpunan peubah acak yang merupakan fungsi waktu atau sering pula disebut proses acak.

Contoh (2.6).

Seandainya peubah acak X_n = hasil lemparan ke n, n > 1. Maka $\{X_n, n > 1\}$ merupakan himpunan peubah acak yang berbeda X_n, ini membentuk proses stokastik.

Contoh (2.7).

Pandang peubah acak yang menyatakan banyaknya kecelakaan mobil dalam suatu kota selama interval waktu [0,t] menimbulkan suatu himpunan peubah acak $\{ X_t ;\ t \in T \}$ yang merupakan proses stokastik.

Himpunan harga-harga yang mungkin untuk suatu peubah acak X_n dari suatu proses stokastik $\{ X_n ;\ n \geq 1 \}$ disebut ruang state. Pada contoh (2.6), X_n mempunyai ruang state {1, 2, 3, 4, 5, 6} sama untuk setiap n. Ruang state ini tidak hanya untuk himpunan yang terhitung, juga untuk himpunan peubah acak yang kontinu, seperti pada contoh (2.7), setiap harga t akan menghasilkan suatu peubah acak

X(t) dan mempunyai ruang statenya sendiri.

Proses stokastik adalah suatu model matematika untuk suatu kejadian pada suatu waktu setelah waktu awal, dari suatu peritiwa acak. Keacakan adalah ditawarkan oleh pengertian dari suatu ruang $(\Omega,\mathcal{F})$ yang terukur, disebut ruang sampel, yang mana ukuran peluangnya dapat dicari. Demikianlah, suatu proses stokastik X(t) adalah keluarga dari peubah-peubah acak $X = \{X_t ; 0 \le t < \infty\}$ pada $(\Omega,\mathcal{F})$, yang mana mengambil nilainya dalam ruang terukur $(S,\mathcal{S})$, disebut ruang state. Untuk maksud ini, ruang state $(S,\mathcal{S})$ adalah ruang Euclid dimensi d yang akan dilengkapi dengan lapangan-σ dari himpunan - himpunan Borel yaitu $S = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, dimana $\mathcal{B}(U)$ akan digunakan untuk menotasikan lapangan-σ terkecil yang memuat semua himpunan buka dari suatu ruang topologi U. Indeks $t \in [0,\infty)$ dari peubah acak X_t memungkinkan dipakai suatu waktu.

Ruang sampel $(\Omega,\mathcal{F})$ akan dilengkapi dengan suatu filtrasi, yaitu suatu keluarga tidak menurun $\{\mathcal{F}_t ; t \ge 0\}$ dari sub lapangan-σ dari $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ untuk $0 \le s < t < \infty$. Diambil $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t \ge 0} \mathcal{F}_t)$.

Definisi (2.6.1).

Dua proses stokastik X(t) dan Y(t) yang didefinisikan pada ruang peluang $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Saat dipandang sebagai fungsi t dan ω, $X(t)$ dan $Y(t)$ dikatakan sama jika dan hanya jika $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ untuk semua $t \geq 0$ dan semua $\omega \in \Omega$.

Definisi (2.6.2).

Y adalah merupakan modifikasi dari X jika untuk setiap $t \geq 0$, mempunyai $P[X_t = Y_t] = 1$.

Definisi (2.6.3).

X dan Y berdistribusi dimensi hingga yang sama jika untuk beberapa bilangan bulat $n \geq 1$, bilangan real $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$, dan $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{nd})$, dipunyai :

$$P[(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}) \in A] = P[(Y_{t_1},\ldots,Y_{t_n}) \in A]$$

Definisi (2.6.4).

X dan Y disebut tidak dapat dibedakan jika hampir semua sampel bagiannya sesuai dengan :

$$P[\,X_t = Y_t\ ;\ \forall\ 0 \leq t < \infty\,] = 1.$$

Definisi (2.6.5).

Bila dua proses $X(t)$ dan $Y(t)$ adalah sedemikian hingga peubah $X(t_1)$, ..., $X(t_n)$ dan $Y(t_1')$, ..., $Y(t_n')$ saling bebas, maka kedua proses tersebut saling bebas.

Definisi (2.6.6).

Proses dengan penambahan stasioner X(t) adalah proses dengan penambahan stasioner bila penambahannya $Y(t)=X(t+h)-X(t)$ membentuk proses stasioner untuk setiap h.

Definisi (2.6.7).

Jika untuk semua $t_1, \ldots, t_n$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, peubah acak $X(t_2)-X(t_1)$, $X(t_3)-X(t_2)$, ..., $X(t_n)-X(t_{n-1})$ adalah saling bebas, maka $\{X(t), t \in T\}$ adalah dikatakan sebagai suatu proses dengan penambahan bebas.

Lemma Borel Cantelli

Misalkan A_1, A_2, ... adalah barisan dari peristiwa, maka

$P(\limsup A_n) = 1$ jika $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ dan $\{A_n\}$ saling bebas.

Bukti :

Misalkan $Sn = \sum_{j=1}^{n} A_j$ dan $S = \sum_{j=1}^{\infty} A_j$, maka
$E(Sn) = \sum_{j=1}^{n} p_j$, $var(Sn) = \sum_{j=1}^{n} p_j(1-p_j) \leq \sum_{j=1}^{n} p_j$
dimana $p_j = P(A_j)$. Ambil $\mu_n = p_1 + \ldots + p_n$. Karena $Sn \leq S$, dengan ketidaksamaan Chebysev dipunyai

$P(S < \mu_n/2) \leq P(Sn \leq \mu_n/2) = P(Sn - \mu_n \leq -\mu_n/2)$

$\leq P(|Sn - \mu_n| \geq \mu_n/2) \leq 4\,\mu_n^{-2}\, var(Sn) \leq 4\,\mu_n^{-1}$

Dengan asumsi bahwa $\mu_n \longrightarrow \infty$, sehingga $\mu_n^{-1} \longrightarrow 0$. Selanjutnya, dengan $n \longrightarrow \infty$, diperoleh $P(S < \infty) = 0$. Jadi $P(S = \infty) = 1$ dan karena $\{S = \infty\} = \limsup A_n$, lemma diatas terbukti.