BAB II

MATERI PENUNJANG

2. 1. ALJABAR BOOLEAN

Aljabar Boolean yang merupakan suatu penurunan dari ide aljabar himpunan adalah suatu bentuk struktur aljabar dari himpunan B terhadap operasi gabungan, irisan serta komplemen.

Definisi 1

Suatu Aljabar Boolean $(B, \cup, \bullet, -)$ adalah himpunan B dengan dua operasi biner disjungsi ($\cup$) dan konjungsi ($\bullet$) serta satu operasi uner komplemen (-) yang memenuhi aksioma-aksioma untuk x,y,z elemen B sebagai berikut :

1. Sifat Assosiatif

   $x(yz) = (xy)z$ dan

   $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$

2. Sifat Komutatif

   $x.y = y.x$ dan

   $x \cup y = y \cup x$

3. Sifat Distributif

   $x(y \cup z) = x.y \cup x.z$ dan

   $x \cup (y.z) = (x \cup y)(x \cup z)$

4. Ada elemen nol (0) dalam B sedemikian sehingga $x \cup 0 = x$, dan ada elemen unit 1 dalam B sedemikian sehingga $x.1 = x$ dimana $0 \neq 1$.

5. $x.\overline{x} = 0$ dan $x \cup \overline{x} = 1$

2.1.1 ELEMEN ALJABAR BOOLEAN

Definisi 2

Pada umumnya dua elemen Aljabar Boolean adalah himpunan $B_2 = \{0, 1\}$ yang terdiri angka nol dan 1 (satu) yang mempunyai sifat bersama dengan operasi disjungsi ($\cup$), konjungsi ($\bullet$) dan negasi (-).

Dalam kaitannya dengan aljabar boolean B_2 diberikan aksioma dasar serta sifat dasar dari aljabar boolean dengan mengambil $x,y,z \in B_2$ sebagai berikut :

1. $0 \cup 0 = 0,\ 0 \cup 1 = 1 \cup 0 = 1 \cup 1 = 1$
2. $\overline{0} = 1,\ \overline{1} = 0$
3. $0.0 = 0.1 = 1.0 = 0,\ 0.0 = 0.\ 1.1 = 1$
4. Untuk $x \in B_2$ maka berlaku

   $x \cup 0 = x \qquad x.\overline{x} = 0$

   $x.0 = 0 \qquad 1.x = x$

   $x \cup \overline{x} = 1 \qquad x.1 = 1$
5. $0 \neq 1$
6. Sifat komutatif untuk $x, y \in B_2$

   $x \cup y = y \cup x$

   $xy = yx$
7. Sifat-sifat assosiatif untuk $x, y, z \in B_2$

   $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$

   $(xy)z = x(yz)$

8. Sifat Idempotensy

$x \cup x = x$

$x.x = x$

Bukti : $x = x.1$ $\qquad$ $x = x \cup 0$

$= x(x \cup \bar{x})$ $\qquad$ $= x \cup x.\ \bar{x}$

$= (x.x) \cup (x \cup \bar{x})$ $\qquad$ $= (x \cup x) \cup (x \cup \bar{x})$

$= x.x \cup 0$ $\qquad$ $= x \cup x\ .1$

$= x.x$ $\qquad$ $= x \cup x$

9. Sifat keunikan komplemen

Jika $x \cup y = 1$ dan $x.y = 0$ maka $y = \bar{x}$

Bukti

(1) $y = y \cup 0$

$= y \cup (x\bar{x})$

$= (y \cup x)(y \cup \bar{x})$

$= 1\ (y \cup \bar{x})$

$y = y \cup \bar{x}$

(2) $\bar{x} = \bar{x} \cup 0$

$= \bar{x} \cup (xy)$

$= (x \cup \bar{x}) \cup (\bar{x} \cup y)$

$= 1\ (\bar{x} \cup y)$

$= y$

10. Sifat absorsi

$x \cup xy = x$

$x(x \cup y) = x$

Bukti :

Ambil $x \neq y$ sehingga $\overline{x} = y$

$x \cup xy = x \cup x\overline{x}$

$= x \cup 0$

$= x$

kemudian dibuktikan untuk $x = y$ sehingga

$x \cup xy = x \cup xx$

$= x \cup x$

$= x$ terbukti.

11. Sifat absorsi Boolean

$x \cup \overline{x}y = x \cup y$

$x(\overline{x} \cup y) = xy$

untuk x, y, z adalah elemen-elemen pada B_2

Bukti

a. Ambil $x \neq y$ maka $\overline{x} = y$ sehingga

$x \cup \overline{x}y = x \cup yy$

$x \cup \overline{x}y = x \cup y$

Kemudian jika $x = y$ maka $x \cup \overline{x}y = x \cup y = \overline{x} \cup \overline{x}x = x \cup 0$

$x \cup 0 = x$ dan dari sifat Idempotensy

$= x \cup x = x \cup y$

b. $x(\overline{x} \cup xy) = x\overline{x} \cup xy$ (dari sifat distribusi)

$= 0 \cup xy$

$= xy$

12. Sifat Demorgan

1. $\overline{(x \cup y)} = x\bar{x} \cup \bar{x} \;\; \bar{y}$

2. $\overline{xy} = \bar{x} \cup \bar{y}$

Bukti :

$\overline{(x \cup y)} = \bar{x} \;\; \bar{y}$

Dari sifat keunikan komplemen dan diasumsikan bahwa $\overline{(x \cup y)} = \bar{x} \;\; \bar{y}$

adalah benar. Sehingga harus dibuktikan:

1. $(x \cup y) \cup (\overline{x \cup y}) = 1$

   $(x \cup y) \cup \bar{x}\,\bar{y} = 1$

   $((x \cup y) \cup \bar{x})\,((x \cup y) \cup \bar{y}) = 1$

   $(x \cup y \cup \bar{x})\,(x \cup y \cup \bar{y}) = 1$

   $(1 \cup y)\,(x \cup 1) = 1$

   $1.1 = 1$

2. $(x \cup y)\,(\overline{x \cup y}) = 0$

   $(x \cup y)\;\bar{x}\,\bar{y} = 0$

   $(x\,\bar{x}\,\bar{y} \cup y\bar{x}\,\bar{y}) = 0$

   $0 \quad \cup 0 = 0$

Jadi terbukti bahwa $\overline{(x \cup y)} = \bar{x} \;\; \bar{y}$

Untuk bukti $\overline{xy} = \bar{x} \cup \bar{y}$ digunakan analogi dari bukti diatas.

Definisi 3

Dalam Aljabar Boolean B_2 didefinisikan

$x \leq y$ jika dan hanya jika $x \cup y = y$

Theorema 1

Untuk sembarang aljabar boolean B_2 maka berlaku

$x \leq y$ jika dan hanya jika $x . y = y$

Bukti $\Rightarrow$

Jika $x \leq y$ maka $x.y = y$

Diasumsikan bahwa $x \leq y$ maka dari definisi 3

$x.y = x(x \cup y)$

$= x.x \cup x.y$

$= x \cup x.y$ (berdasar sifat absorbsi boolean)

$= x$

Jadi terbukti bahwa $x.y = x$

$\Leftarrow$

Jika $x.y = x$ maka $x \leq y$

Diasumsikan $x.y = x$ maka dari definisi 3

$x \cup y = x.y \cup y$ (berdasarkan sifat absorbsi boolean)

$= y$

Karena $x \cup y = y$ maka menurut definisi 3 berlaku $x \leq y$

Terbukti

Keistemawaan dari B_2 adalah dapat dinyatakan dalam bentuk aritmatika yaitu:

$x \cup y = x + y - xy$ .... 1)

$\overline{x} = 1 - x$ .... 2)

Persamaan 1) dan 2) membawa akibat sebagai berikut :

$\overline{xy} = 1 - xy$ .... 3)

$\overline{x \cup y} = \overline{x}\,\overline{y} = (1 - x)(1 - y)$ .... 4)

2.1.2. FUNGSI BOOLEAN

Definisi 4

Suatu fungsi Boolean f didefinisikan sebagai suatu pemetaan

$$f : B_2^n = \underbrace{B_2 \times \ldots\ldots\ldots \times B_2}_{n} \rightarrow B_2$$

Yaitu suatu fungsi yang setiap variabel dan harganya pada B_2.

Contoh 1

Diberikan fungsi Boolean dengan 3 tupel $f(x, y, z) = x \cup y\overline{z}$ dapat dinyatakan dengan daftar berikut :

Daftar 1

x	y	z	f(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Definisi 5

Misalkan B_2 adalah suatu aljabar boolean, suatu pernyataan boolean E didalam B_2 didefinisikan :

1. 0 dan 1 adalah pernyataan boolean.
2. $x_1^1, x_1^0, \ldots\ldots, x_n^1, x_n^0$ adalah pernyataan boolean
3. Jika E_1 dan E_2 adalah pernyataan boolean maka $E_1 \cup E_2$, $E_1.E_2$ dan $\overline{E}_1.\overline{E}_2$ juga merupakan pernyataan Boolean.

Contoh 2

Dengan menggunakan notasi Boolean $x^0 = \overline{x}$ dan $x^1 = x$ didapatkan pernyataan Boolean untuk daftar 1 (baris 1, 3, dan 5) sebagai berikut :

$$x^0y^0z^0 = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$$

$$x^0y^1z^0 = \overline{x}\,y\,\overline{z}$$

$$x^1y^0z^0 = x\,\overline{y}\,\overline{z}$$

Theorema 2

Setiap fungsi Boolean f dapat dituliskan dalam bentuk

$$f(x_1 \ldots x_n) = \bigcup_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 5)$$

Dengan $\bigcup_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ merupakan disjungsi yang meliputi 2^n nilai $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B_2^n$ yang mungkin.

Bukti :

Dengan menggunakan rumus $x^0 = \overline{x}$, dan $x^1 = x$ dan $\overline{0} = 1$ dan $\overline{1} = 0$ maka untuk

$\alpha, \beta \in B_2^n$

$$\alpha^{\beta} = \begin{cases} 1 & \text{jika} \quad \alpha = \beta \\ 0 & \text{jika} \quad \alpha \neq \beta \end{cases}$$

sehingga $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in B_2$ maka didapatkan

$$x_1^{\alpha_1},\ldots, x_n^{\alpha_n} \begin{cases} 1 & \text{jika} \quad x_1 = \alpha_1,\ldots,x_n = \alpha_n \\ 0 & \text{yang} \quad \text{lain} \end{cases}$$

karena $\alpha=\beta$ maka didapatkan $x_1 = \beta_1,\ldots,$ $x_n = \beta_n$ dan disubstitusikan pada persamaan (5) diperoleh

$f(\beta_1,\ldots,\beta_n)\ \beta_1^{\beta_1},\ldots,\beta_n^{\beta_n} = f(\beta_1,\ldots,\beta_n)$

Terbukti.

2.1.3. FUNGSI PSEUDO BOOLEAN

Pada prinsipnya fungsi Pseudo Boolean adalah Identik denga fungsi Boolean, yaitu nilai dari setiap variabelnya berupa Boolean, tetapi harga dari fungsinya berupa Real.

Definisi 6

Misal R adalah himpunan bilangan Real, suatu fungsi Pseudo Boolean didefinisikan sebagai suatu fungsi

$$F : B_2^n \rightarrow R$$

Yaitu suatu fungsi berharga real dengan variabel Bivalent.

Theorema 3.

Setiap fungsi Boolean f dapat dituliskan dalam bentuk

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\alpha_1\ldots\alpha_n} C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\; x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 6)$$

Dengan $\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ meliputi 2^n nilai $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in B_2^n$ dan koefisien

$C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = f((\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$

Bukti :

Dengan menggunakan rumus $x^0 = \overline{x}$, dan $x^1 = x$ dan $\overline{0} = 1$ dan $\overline{1} = 0$ maka untuk

$\alpha, \beta \in B_2^n$

$$\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \text{jika} \quad \alpha = \beta \\ 0 & \text{jika} \quad \alpha \neq \beta \end{cases}$$

sehingga $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in B_2$ maka didapatkan

$$x_1^{\alpha_1},\ldots, x_n^{\alpha_n} \begin{cases} 1 & \text{jika} \quad x_1 = \alpha_1,\ldots,x_n = \alpha_n \\ 0 & \quad\quad \text{yang} \quad \text{lain} \end{cases}$$

karena $\alpha = \beta$ maka didapatkan $x_1 = \beta_1,\ldots, x_n = \beta_n$ dan disubstitusikan pada persamaan (6) sehingga

$C_{\beta_1,\ldots,\beta_n}.\ \beta_1^{\beta_1},\ldots,\beta_n^{\beta_n} = f(\beta_1,\ldots,\beta_n)$

Terbukti.

Contoh 3

Diberikan fungsi Pseudo Boolean $f(x_1, x_2, x_3)$ yang didefinisikan seperti pada daftar 2 sebagai berikut :

Daftar 2

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	-5
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	-3
1	0	1	8
1	1	0	1
1	1	1	6

Dari daftar 2 dan theorema 3 maka dapat dituliskan fungsi pseudo boolean sebagai berikut :

$f(x_1, x_2, x_3) = -5\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 - 3x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + 8\,x_1\overline{x}_2x_3 + 6\,x_1x_2x_3$

Atau dengan mengingat $\overline{x} = 1 - x$ fungsi pseudo boolean diatas dapat juga dituliskan sebagai berikut :

$f(x_1, x_2, x_3) = -5\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 - 3x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + 8\,x_1\overline{x}_2x_3 + 6\,x_1x_2x_3$

$= -5((1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)) - 3(x_1(1-x_2)(1-x_3)) + (x_1(1-x_2)x_3) + 6\,x_1x_2x_3$

$= -5(1-x_2-x_3+x_2x_3-x_1+x_1x_2+x_1x_3-x_1x_2x_3) - 3(x_1-x_1x_2-x_1x_3+x_1x_2x_3)$

$+8(x_1x_3-x_1x_2x_3) + 6\,x_1x_2x_3$

$= -5+5x_2+5x_3-5x_2x_3+5x_1-5x_1x_2-5x_1x_3+5x_1x_2x_3-3x_1+3x_1x_2+3x_1x_3$

$-3x_1x_2x_3+8x_1x_3-8x_1x_2x_3 + 6\,x_1x_2x_3$

$=-5+5x_2+5x_3-5x_2x_3+2x_1-2x_1x_2+6x_1x_3$

$= -5(1-x_2-x_3+x_2x_3)+2x_1(1-x_2)+ 6x_1x_3$

$= -5\,((1-x_2)(1-x_3))+ 2x_1(1-x_2)+ 6x_1x_3$

$=-5\overline{x}_2\overline{x}_3 + 2\,x_1\overline{x}_2 + 6x_1x_3$

Sehingga fungsi Pseudo Boolean diatas dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut :

$f(x_1, x_2, x_3) = 2\, x_1\overline{x}_2 + 6x_1x_3 - 5\overline{x}_2\overline{x}_3$

2.2. PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINIER PSEUDO BOOLEAN

2.2.1. PERSAMAAN LINIER PSEUDO BOOLEAN

Bentuk umum dari persamaan linier Pseudo Boolean adalah :

$$a_1z_1 + b_1\overline{z}_1 + a_2z_2 + b_2\overline{z}_2 + \ldots + a_nz_n + b_n\overline{z}_n = k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7)$$

dengan a_i, b_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) dan k adalah konstanta, merupakan bentuk umum dari persamaan linier pseudo boolean dengan $z_1 \ldots z_n$ sembarang.

Untuk menyelesaikan persamaan (7) tersebut diberikan langkah penyelesaian sebagai berikut :

Untuk masing-masing i diberikan

$$x_i = \begin{cases} z_i & \text{jika} \quad a_i > b_i \\ \overline{z}_i & \text{jika} \quad a_i < b_i \end{cases} \quad \ldots\ldots..(8)$$

kemudian $a_iz_i + b_i\overline{z}_i$ diubah menjadi

$$a_iz_i + b_i\overline{z}_i = \begin{cases} (a_i - b_i)x_i + b_i & \text{jika} \quad a_i > b_i \\ (b_i - a_i)x_i + a_i & \text{jika} \quad a_i < b_i \end{cases} \quad \ldots\ldots..(9)$$

maka persamaan (7) menjadi

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ \ldots + c_nc_n \ = d \quad \ldots\ldots\ldots(10)$$

dengan $c_1, c_2, \ \ldots \ c_n$, d adalah konstanta $c_i > 0$ ($i = 1,\ldots,n$)

Dan dengan mernurutkan secara menurun diasumsikan bahwa

$$c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq c_4 \ldots \geq c_n > 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (10) dan dengan melihat bahwa

$c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq c_4 \ldots \geq c_n > 0$ maka digunakan sistematika penyelesaian sebagai berikut :

No	Masalah	Kesimpulan
1	$d < 0$	Tidak mempunyai penyelesaian
2	$d = 0$	Penyelesaian tunggal $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$
3	$d > 0$ dan $c_1 \geq \ldots \geq c_p > d \geq c_{p+1} \geq \ldots \geq c_n$	$x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$ dan $\sum_{j=p+1}^{n} c_j x_j = d$
4	$d > 0$ dan $c_1 = \ldots = c_p = d > c_{p+1} \geq \ldots \geq c_n$	1. Untuk setiap $k = 1,2,\ldots,p$; $x_k = 1$ $x_1 = \ldots = x_{k-1} = x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$ 2. Penyelesaian lainnya (jika ada) $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$ dan $\sum_{j=p+1}^{n} c_j x_j = d$
5	$d > 0,\ c_i < d(i = 1,2,\ldots,n)$ dan $\sum_{i=1}^{n} c_i < d$	Tidak mempunyai penyelesaian
6	$d > 0,\ c_i < d(i = 1,2,\ldots,n)$ dan $\sum_{i=1}^{n} c_i = d$	Penyelesaian tunggal $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$
7	$d > 0,\ c_i < d(i = 1,2,\ldots,n)$ dan $\sum_{i=1}^{n} c_i > d$ dan $\sum_{i=2}^{n} c_i < d$	Penyelesaiannya adalah $x_1 = 1$ dan $\sum_{j=2}^{n} c_j x_j = d - c_i$
8	$d > 0,\ c_i < d(i = 1,2,\ldots,n)$ dan $\sum_{i=1}^{n} c_i > d$ dan $\sum_{i=2}^{n} c_i \geq d$	Penyelesaiannya $x_1 = 1$ dan $\sum_{j=2}^{n} c_j x_j = d - c_i$ atau $x_1 = 0$ dan $\sum_{j=2}^{n} c_j x_j = d$

Tabel 1

(Dikutip dari buku Boolean Methods in Operations Research, Peter L. Hammer, 1968)

2.2.2. PERTIDAKSAMAAN LINIER PSEUDO BOOLEAN

Bentuk umum dari pertidaksamaan linier pseudo-boolean adalah :

$$a_1 z_1 + b_1 \bar{z}_1 + \ldots + a_n z_n + b_n \bar{z}_n > h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

atau

$$a_1 z_1 + b_1 \bar{z}_1 + \ldots + a_n z_n + b_n \bar{z}_n \geq k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

dengan a_i, b_i, h, k = konstanta, $i = 1,2,\ldots,n$ untuk setiap i serta diasumsikan bahwa $a_i \neq b_i$.

Jika pertidaksamaannya berbentuk < dan ≤ maka masing-masing pertidaksamaannya dikalikan dengan (-1). Pada dasarnya penyelesaian pertidaksamaan linier pseudo-boolean adalah sama dengan persamaan linier pseudo-boolean. Yaitu tidak mengikuti semua kemungkinan 2^n yang ada, tetapi mengikuti sistematika yang akan didefinisikan seperti pada persamaan linier pseudo-boolean. Dalam hal ini hanya dibatasi untuk pertidaksamaan (13), dan penyelesaian yang dihasilkan akan dikelompokkan kedalam "Keluarga Penyelesaian".

Definisi 7

Misalkan $S=(z_1^*,\ldots,z_n^*)$ sebagai penyelesaian dari (13) dan I sebagai kumpulan indek $I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$. Misalkan juga $\sum(S,I)$ sebagai kumpulan semua nilai $(z_1,\ldots,z_n) \in B_2^n$ yang memenuhi $z_i = z_i^*$, untuk setiap $i \in I$, variabel lainnya $z_j (j \notin I)$ sebagai variabel sembarang. Jika semua nilai $(z_1,\ldots,z_n) \in \sum(S,I)$ memenuhi pertidaksamaan (13), maka $\sum(S,I)$ dikatakan sebagai keluarga penyelesaian dari pertidaksamaan (13). Dapat dikatakan juga bahwa keluarga ini dibentuk oleh pasangan (S,I), dan variabel z_i untuk $i \in I$ disebut variabel tetap.

Misalkan $S \in \sum(S, I)$ berlaku untuk setiap pasangan (S,I), jika I = (1,2,…,n) maka $\sum(S, I)$ merupakan keluarga degenerate yang memuat penyelesaian tunggal yang disebut S. Untuk lebih umumnya, jika kumpulan I terdiri dari indek r maka $\sum(S, I)$ memuat 2^{n-r} elemen, untuk r<n, maka keluarga tersebut dinamakan keluarga non-degenerate. Tidak mudah untuk mendapatkan keluarga penyelesaian yang non-degenerate langsung dari pertidaksamaan (13). Untuk mengurangi kesulitan tersebut langkah pertama dengan memasukkan ke dalam bentuk standard, untuk setiap z_i ditranformasikan pada (8) dan (9).

Kemudian didapatkan bentuk kamoniknya :

$$C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n \geq d \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Dengan $c_1, c_2, \ldots, c_n, d$ = konstanta, dan $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_n > 0$

Selanjutnya akan diberikan prosedur untuk mendapatkan kelompok penyelesaian dari (14) kedalam beberapa penyelesaian non-degenerate dan pasangan keluarga penyelesaian yang terpisah. Kemudian dengan mentranformasikan ke bentuk semula akan didapatkan keluarga penyelesaian dari (13).

Definisi 8

Suatu nilai $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ yang memenuhi pertidaksamaan (14) disebut penyelesaian dasar (14), jika untuk setiap indek i berlaku $x_i^* = 1$, maka nilai $(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, 0, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*)$ bukan penyelesaian dari (14).

Kemudian untuk meyelesaikan pertidaksamaan (14) digunakan langkah-langkah penyelesaian sebagai berikut :

No	Masalah	Kesimpulan
1	$d \le 0$	Penyelesaian tunggal $x_1 = .. = x_n = 0$
2	$d > 0$ dan $c_1 \ge ... \ge c_p > d \ge c_{p+1} \ge ... \ge c_n$	1. Untuk setiap $k=1,2,..,p$; $x_k=1$, $x_1=..=x_{k-1}=x_{k+1}=..=x_n=0$ 2. Penyelesaian lainnya (jika ada), yaitu $x_1=..=x_p=0$ dan $x_{p+1},...,x_n$ adalah solusi dasar dari $$\sum_{j=p+1}^{n} c_j x_j \ge d$$
3	$d > 0$, $c_i<d(i=1,2,...,n)$ dan $\sum_{i=1}^{n} c_i < d$	Tidak mempunyai penyelesaian
4	$d > 0$, $c_i<d(i=1,2,...,n)$ dan $\sum_{i=1}^{n} c_i = d$	Penyelesaian tunggal $x_1=..=x_n=1$
5	$d > 0$, $c_i < d(i = 1,2,...,n)$ dan $\sum_{i=1}^{n} c_i > d$ dan $\sum_{j=2}^{n} c_j < d$	Penyelesaian dasar (jika ada) dikarakteristikkan dengan sifat $x_1=1$ dan $x_2,...,x_n$ adalah solusi dasar dari $\sum_{j=2}^{n} c_j x_j \ge d - c_1$
6	$d > 0$, $c_i < d(i = 1,2,...,n)$ dan $\sum_{i=1}^{n} c_i > d$ dan $\sum_{j=2}^{n} c_j \ge d$	Penyelesaian dasar (jika ada) dikarakteristikkan dengan sifat $x_1=1$ dan $x_2,...,x_n$ adalah solusi dasar dari $\sum_{j=2}^{n} c_j x_j \ge d - c_1$ atau $x_1=0$ dan $x_2,...,x_n$ adalah solusi dasar dari $\sum_{j=2}^{n} c_j x_j \ge d$

Tabel 2

(Dikutip dari buku Boolean Methods in Operations Research, Peter L. Hammer, 1968)

Untuk setiap penyelesaian dasar S = $(x_1^*,...,x_n^*)$ dikelompokkan ke dalam keluarga penyelesaian $\sum$ (S, J_s) yang didefinisikan sebagai berikut :

JIka i_0 merupakan indek terakhir, dengan $x_i^* = 1$ (yaitu $x_{i_0}^* = 1$ dan $x_i^* = 0$ untuk setiap $i > i_0$) dan J_s merupakan himpunan dari setiap indek $i \leq i_0$. Maka menurut definisi 7 $\sum$ (S, J_s) merupakan himpunan semua nilai $(x_1, ..., x_n)$ yang memenuhi

$$x_i = \begin{cases} x_i^*, \text{ untuk } i \leq i_0. \\ \\ \text{sembarang, untuk } i > i_0. \end{cases} \qquad ....(15)$$

Theorema 4

Jika $S_1,...,S_m$ adalah semua penyelesaian dasar dari (14) dan $\sum_k = \sum(S_k,J_k)$, (k=1, 2,...,m) maka setiap penyelesaian $(x_1,...,x_n)$ dari (14) termasuk salah satu keluarga penyelesaian.

Bukti :

Misalkan $(x_1,...,x_n)$ merupakan suatu nilai pada $\sum_k$, maka $x_i^* = 0$ untuk semua $i > i_0$.

Hubungan (2.11) menunjukkan bahwa untuk setiap i berlaku $x_i^* \leq x_i$., maka $d \leq \sum_{i=1}^{n} c_i\ x_i \leq \sum_{i=1}^{n} c_i\ x_i^*$, yaitu setiap $\sum_k$ adalah keluarga penyelesaian. Jika $S^1 = (x_1^1, ..., x_n^1)$ dan $S^{11} = (x_1^{11}, ..., x_n^{11})$ merupakan penyelesaian dasar, maka terdapat $i \in J_{s^1} \cup J_{s^{11}}$ sedemikian hingga $x_i^1 \neq x_i^{11}$, sehingga $\sum_k$, merupakan pasangan yang terpisah. Hal ini membuktikan bahwa setiap penyelesaian merupakan salah satu $\sum_k$.

Telah ditunjukan bahwa $(x_1,\dots\dots,x_n)$ merupakan penyelesaian dari (14) dan mempertimbangkan rangkaian nilai : $(x_1,\dots\dots,x_n)$, $(x_1,\dots\dots,x_{n-1},0)$, $(x_1,\dots\dots,x_{n-2},0,0)$, ... $(x_1,\dots\dots,x_i,0,\dots\dots\dots,0)$,...........diberikan $S=(x_1,\dots\dots,x_p,0,\dots\dots,0)$ merupakan nilai terakhir dari rangkaian nilai yang merupakan penyelesaian dari persamaan (14) dan diambil nilai $x_p=1$ serta $(x_1,\dots\dots,x_{p-1},0,\dots\dots,0)$ bukan merupakan solusi. Juga untuk $c_1x_1+\dots\dots\dots+c_{p-1}x_{p-1} < d$ dengan menganggap indek q dan $x_q=1$ $(q \leq p)$ maka $(x_1,\dots\dots,x_{q-1},0,x_{q+1},\dots\dots\dots,x_p,0,\dots\dots\dots,0)$ bukan merupakan penyelesaian. Untuk $c_q \geq c_p$ dan selanjutnya

$c_1x_1+\dots\dots\dots+c_{q-1}x_{q-1}+c_{q+1}x_{q+1}+\dots\dots\dots+c_{p-1}x_{p-1}+c_px_p$

$= c_1x_1+\dots\dots\dots+c_qx_q+\dots\dots\dots+c_{p-1}x_{p-1}+(c_p-c_q)$

$\leq c_1x_1+\dots\dots\dots+c_qx_q+\dots\dots\dots+c_{p-1}x_{p-1} < d$

dengan melihat bahwa S merupakan solusi dasar dari (14) terlihat bahwa penyelesaian asli $(x_1,\dots\dots,x_n)$ dimiliki oleh $\sum$ (S, J_s). Terbukti.