BAB II

DESKRIPSI TEORITIS

2.1. Analisis Varian Univariat Satu Arah untuk Model Tetap

Analisis varian (ANOVA) satu arah adalah analisis varian satu faktor yang terdiri dari sejumlah taraf yang sering disebut perlakuan, digunakan untuk melihat ada atau tidaknya perbedaan yang nyata tentang pengaruh perlakuan terhadap variabel respon.

Model linier untuk ANOVA satu arah adalah

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,k \\ j = 1,2,\ldots,n \end{array} \tag{2.1.1}$$

di mana

y_{ij} : pengamatan ke-j yang diberi perlakuan ke-i

μ : rata-rata keseluruhan

τ_i : pengaruh perlakuan ke-i

ε_{ij} : komponen error

Model yang diambil pada persamaan (2.1.1) adalah model tetap. Disebut model tetap karena sejumlah k perlakuan diambil secara khusus oleh pelaku percobaan (*Montgomery*, D.C.,1984), artinya perlakuan ditentukan terlebih dahulu oleh pelaku percobaan. Asumsi yang diperlukan pada ANOVA satu arah untuk model tetap adalah

1. ε_{ij} independen dan berdistribusi $N(0,\sigma^2)$
2. Varian σ^2 konstan untuk semua perlakuan

3. $\sum_{i=1}^{k} \tau_i = 0$

Data untuk ANOVA satu arah dapat disusun pada tabel 2.1.1

Tabel 2.1.1. Data untuk ANOVA Satu Arah

Perlakuan	Pengamatan 1 2 ...... n
1	y_{11} y_{12} ...... y_{1n}
2	y_{21} y_{22} ...... y_{2n}
.	.
.	.
k	y_{k1} y_{k2} ...... y_{kn}

Data pada tabel 2.1.1 diambil dalam susunan acak sehingga satuan percobaan mempunyai peluang yang sama untuk diambil. Penyusunan ini disebut rancangan acak lengkap (RAL). Rancangan acak lengkap digunakan bila satuan percobaannya homogen artinya keragaman antar satuan percobaan kecil dan mengelompokan ke dalam kelompok tidak memberi manfaat (*Steel, R.G.D., Torrie, J.H.*,1995).

Misalkan $y_{i.}$ menyatakan total pengamatan ke-i, $\bar{y}_{i.}$ menyatakan rata-rata pengamatan ke-i, $y_{..}$ menyatakan total keseluruhan semua pengamatan dan $\bar{y}_{..}$ menyatakan rata-rata semua pengamatan. Dinyatakan secara matematika

$$y_{i.} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \qquad \bar{y}_{i.} = \frac{y_{i.}}{n}$$

$$y_{..} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \qquad \bar{y}_{..} = \frac{y_{..}}{kn}$$

Untuk menguji ada atau tidaknya perbedaan nyata tentang pengaruh perlakuan menggunakan hipotesis sebagai berikut

H_0 : $\tau_i = 0$

H_0 : $\tau_i \neq 0$, untuk sedikitnya satu i, i = 1,2,...,k (2.1.3)

Jumlah kuadrat total terkoreksi yang diukur dari total variabilitas dalam data dapat ditulis sebagai

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\bar{y}_{..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(y_{ij}-\bar{y}_{i.}\right)+\left(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}\right)\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\bar{y}_{i.}\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\bar{y}_{i.}\right)\left(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}\right)^2 \qquad (2.1.4)$$

Susunan produk silang pada persamaan (2.1.4) adalah nol karena

$$2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\bar{y}_{i.}\right)\left(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}\right) = 2\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij} - \sum_{j=1}^{n}\bar{y}_{i.}\right)\left(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}\right)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{k}\left(n\bar{y}_{i.} - n\bar{y}_{i.}\right)\left(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}\right)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{k}(0)\left(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}\right)$$

$$= 0$$

persamaan(2.1.4) menjadi

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\bar{y}_{..}\right)^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\bar{y}_{i.}\right)^2+n\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}\right) \qquad (2.1.5)$$

dinotasikan

$$JKT=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\bar{y}_{..}\right)^2$$

$$JKE=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\bar{y}_{i.}\right)^2$$

$$JKP=n\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}\right)^2$$

di mana

JKT : jumlah kuadrat total

JKE : jumlah kuadrat error

JKP : jumlah kuadrat perlakuan

Persamaan (2.1.5) secara simbolik dapat ditulis sebagai

$$JKT = JKE + JKP \qquad (2.1.6)$$

Statistik uji untuk hipotesis pada persamaan (2.1.2) adalah

$$F_0=\frac{JKP/k-1}{JKE/kn-k}=\frac{KTP}{KTE} \qquad (2.1.7)$$

di mana

KTP : kuadrat tengah perlakuan

KTE : kuadrat tengah error

$$\hat{\delta} = c_1\bar{y}_{1.} + c_2\bar{y}_{2.} + \ldots + c_k\bar{y}_{k.} \tag{2.2.2}$$

Hipotesis untuk kontras adalah

$$H_0 \quad : \delta = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \ldots + c_k\mu_k = 0$$

$$H_1 \quad : \delta = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \ldots + c_k\mu_k \neq 0 \tag{2.2.3}$$

Hipotesis pada persamaan (2.2.3) dapat diuji dengan

$$t = \frac{\hat{\delta}}{s_{\hat{\delta}}} \tag{2.2.4}$$

di mana $s_{\hat{\delta}}^2 = \frac{KTE}{n}\sum_{i=1}^{k} c_i^2$

yang mengikuti distribusi t_{kn-k}. Selain itu hipotesis pada persamaan (2.2.3) dapat diuji dengan bentuk kuadrat persamaan (2.2.4)

$$F = t^2 = \frac{\hat{\delta}^2}{s_{\hat{\delta}}^2} = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{k} c_i\bar{y}_{i.}\right)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{k} c_i^2}{KTE} \tag{2.2.5}$$

yang mengikuti distribusi $F_{1;kn-k}$. Pengambilan keputusan yaitu dengan menolak H_0 : $\delta = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \ldots + c_k\mu_k = 0$ jika $F > F_{\alpha;1:kn-k}$.

2.3. Matrik

Definisi 2.3.1.: Vektor p×1 adalah bilangan riil yang disusun dalam bentuk kolom. Vektor dinotasikan dengan huruf kecil yang tebal

Contoh 2.3.1

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_p \end{bmatrix} \tag{2.3.1}$$

Definisi 2.3.2. : Matrik m×p adalah susunan elemen-elemen berbentuk persegi panjang yang mempunyai m baris dan p kolom. Matrik dinotasikan dengan huruf besar yang tebal. Jika m = p, maka disebut matrik bujursangkar.

Contoh 2.3.2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2p} \\ . & \\ . & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mp} \end{bmatrix} \tag{2.3.2}$$

Definisi 2.3.3. : Matrik bujursangkar **A** dikatakan :

1. Matrik simetris jika $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$
2. Matrik diagonal jika elemen-elemen selain elemen diagonal utamanya sama dengan nol. Matrik diagonal **A** dinotasikan dengan diag(**A**).

Contoh 2.3.3

$$\text{diag}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.3.3}$$

Definisi 2.3.4. : Misalkan **A** adalah matrik bujursangkar berukuran p×p. Trace dari matrik **A** ditulis tr(**A**) adalah jumlahan dari elemen-elemen diagonalnya, sehingga

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{p} a_{ii} \tag{2.3.4}$$

sifat-sifat dari trace adalah sebagai berikut, misalkan **A** dan **B** matrik bujursangkar berukuran p×p dan **x** vektor berukuran p×1

1. $\text{tr}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) \pm \text{tr}(\mathbf{B})$ (2.3.5)
2. $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$ (2.3.6)
3. Untuk **A** dan **B** matrik simetris ,

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{ij} \tag{2.3.7}$$

4. $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \text{tr}(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}) = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{x}\,\mathbf{x}')$ (2.3.8)

Definisi 2.3.5. : Vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ dikatakan tidak bebas linier jika terdapat konstanta $c_1, c_2, \dots, c_n$ (tidak semua nol) sehingga

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \tag{2.3.9}$$

jika tidak demikian vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ adalah bebas linier.

Definisi 2.3.6. : Rank dari matrik **A** yang dinotasikan dengan R(**A**) didefinisikan sebagai jumlah maksimum baris atau kolom yang bebas linier.

Contoh 2.3.4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Pandang matrik **A** sebagai vektor-vektor kolom, karena

$$2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kolom 1, 2, 3 tidak bebas linier, tetapi kolom 1 dan kolom 2 bebas linier karena tidak berkelipatan sehingga tidak dapat dibuat kombinasi linier yang menghasilkan vektor nol. Oleh sebab itu R(**A**) = 2 karena jumlah maksimum vektor yang bebas linier adalah dua.

Definisi 2.3.7. : Matrik bujursangkar **A** dikatakan non singular jika R(**A**) sama dengan banyaknya baris atau kolom (full rank atau rank penuh).

Definisi 2.3.8. : Matrik bujursangkar **B** dikatakan invers dari matrik bujursangkar **A** yang dinotasikan dengan $\mathbf{A}^{-1}$ jika **AB** = **BA** = **I** di mana **I** adalah matrik identitas.

Contoh 2.3.5

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.3.9. : Misalkan **A** Matrik simetris berukuran p×p dan **x** adalah vektor berukuran p×1

1. Matrik **A** dikatakan definit positif jika $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ untuk semua $\mathbf{x} \neq 0$.
2. Matrik **A** dikatakan semidefinit positif jika $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ untuk semua $\mathbf{x} \neq 0$.

Contoh 2.3.6

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
$$= 4x_1^2 + x_2^2$$

$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, untuk $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, sehingga matrik **A** definit positif

Contoh 2.3.7

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2$$

$$= \left(\sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2\right)^2$$

untuk $x_1 = x_2$, $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$

untuk $x_1 \neq x_2$, $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, oleh karena itu $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ untuk semua $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, sehingga matrik **A** semidefinit positif

Definisi 2.3.10. : Misalkan **A** matrik bujursangkar berukuran p×p

1. $\mathbf{M}_{ij}$ adalah submatrik dari matrik **A** berukuran (p-1)×(p-1) yang diperoleh dengan menghapus baris ke-i dan kolom ke-j dari matrik **A**
2. Determinan matrik **A** dinotasikan dengan $|\mathbf{A}|$ adalah skalar yang didefinisikan sebagai

$$|\mathbf{A}| = a_{11} \qquad \text{jika } p = 1 \qquad (2.3.10)$$

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad \text{jika } p = 2 \qquad (2.3.11)$$

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} |\mathbf{M}_{ij}| (-1)^{i+j} \qquad \text{jika } p > 2 \qquad (2.3.12)$$

Sifat-sifat determinan adalah sebagai berikut, misalkan matrik **A** berukuran p×p

1. Untuk matrik definit positif **A**

$$|\mathbf{A}| > 0 \qquad (2.3.13)$$

2. untuk matrik bujursangkar **A** dan **B** berukuran p×p

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \tag{2.3.14}$$

3. untuk matrik nonsingular **A**

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \tag{2.3.15}$$

4. untuk c skalar

$$|c\mathbf{A}| = c^p|\mathbf{A}| \tag{2.3.16}$$

Definisi 2.3.11. : Matrik bujursangkar P dikatakan ortogonal jika $\mathbf{P'P} = \mathbf{PP'} = \mathbf{I}$

Contoh 2.3.8

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P'P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{PP'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

didapat $\mathbf{P'P} = \mathbf{PP'} = \mathbf{I}$

Definisi 2.3.12 : 1. Misalkan $u = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ adalah fungsi skalar dari variabel $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Differensial parsial tingkat satu u terhadap vektor **x** didefinisikan sebagai

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ . \\ . \\ \frac{\partial u}{\partial x_p} \end{bmatrix} \qquad (2.3.17)$$

2. Misalkan $u = f(\mathbf{A}) = f(a_{11},\ldots,a_{pp})$, di mana **A** matrik simetris. Differensial parsial tingkat satu u terhadap matrik **A** di definisikan sebagai

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial a_{11}} & \frac{\partial u}{\partial a_{12}} \cdots \frac{\partial u}{\partial a_{1p}} \\ \frac{\partial u}{\partial a_{21}} & \frac{\partial u}{\partial a_{22}} \cdots \frac{\partial u}{\partial a_{2p}} \\ . & \\ . & \\ \frac{\partial u}{\partial a_{p1}} & \frac{\partial u}{\partial a_{2p}} \cdots \frac{\partial u}{\partial a_{pp}} \end{bmatrix} \qquad (2.3.18)$$

Sifat-sifat derivatif parsial tingkat satu pada vektor dan matrik adalah sebagai berikut, misalkan **x**, **a** vektor berukuran $p\times 1$ dan **A**, **B** matrik simetris berukuran $p\times p$

1. misalkan $u = \mathbf{a}'\mathbf{x} = \mathbf{x}'\mathbf{a}$

$$\frac{\partial(\mathbf{a}'\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{a})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a} \qquad (2.3.19)$$

2. misalkan u = $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$

$$\frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x} \qquad (2.3.20)$$

3. $$\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{AB})}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{B} - \text{diag}(\mathbf{B}) \qquad (2.3.21)$$

4. $$\frac{\partial \ln|\mathbf{A}|}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{A}^{-1} - \text{diag}(\mathbf{A}^{-1}),\ \mathbf{A} \text{ non singular} \qquad (2.3.22)$$

Contoh 2.3.9

Misalkan $\mathbf{x}$ vektor berukuran 2×1 dan $\mathbf{A}$ matrik simetris berukuran 2×2

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1^2 a_{11} + 2x_1x_2a_{12} + x_2^2 a_{22}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_1} = 2x_1a_{11} + 2x_2a_{12}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_2} = 2x_1a_{12} + 2x_2a_{22}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1a_{11} + 2x_2a_{12} \\ 2x_1a_{12} + 2x_2a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$$

2.4. Distribusi Normal Multivariat

Kebanyakan prosedur inferensial multivariat didasarkan pada distribusi normal multivariat, yang merupakan generalisasi dari distribusi normal univariat. Meskipun kebanyakan data yang sebenarnya tidak pernah tepat normal multivariat, distribusi normal multivariat sering digunakan untuk aproksimasi distribusi yang sebenarnya.

Definisi 2.4.1. : Suatu vektor random **y** berukuran p×1, dikatakan berdistribusi normal p-variat dengan vektor rata-rata μ dan matrik kovarian Σ yang dinotasikan dengan $N_p(\mu,\Sigma)$, jika mempunyai fungsi densitas probabilitas sebagai berikut

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^p |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-(\mathbf{y}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\mu)/2} \qquad (2.4.1)$$

di mana Σ definit positif dan $-\infty < \mathbf{y} < \infty$

Untuk mempermudah penulisan vektor y berukuran p×1 selanjutnya ditulis dengan **y**.

Theorema 2.4.1

Jika **y** berdistribusi $N_p(\mu,\Sigma)$, fungsi pembangkit momen dari **y** adalah

$$M_{\mathbf{y}}(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{t}'\mu + \mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t}/2} \qquad (2.4.2)$$

Bukti

Fungsi pembangkit momen dari **y** adalah

$$M_{\mathbf{y}}(\mathbf{t}) = E\left(e^{\mathbf{t}'\mathbf{y}}\right)$$

$$M_{\mathbf{y}}(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{t}'\mathbf{y}} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{p} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-(\mathbf{y}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\mu)/2} d\mathbf{y}$$

di mana $d\mathbf{y} = dy_1 dy_2 \ldots dy_p$

$$M_{\mathbf{y}}(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{p} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{\mathbf{t}'\mathbf{y}-(\mathbf{y}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\mu)/2} d\mathbf{y}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{p} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{\mathbf{t}'\mu+\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t}/2-(\mathbf{y}-\mu-\Sigma\mathbf{t})'\Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\mu-\Sigma\mathbf{t})/2} d\mathbf{y}$$

$$= e^{\mathbf{t}'\mu+\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t}/2} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{p} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-(\mathbf{y}-\mu-\Sigma\mathbf{t})'\Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\mu-\Sigma\mathbf{t})/2} d\mathbf{y}$$

$$= e^{\mathbf{t}'\mu+\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t}/2}$$

Pada distribusi normal multivariat ada dua parameter yang nilainya tidak diketahui yaitu μ, Σ, untuk itu nilai dari parameter harus diestimasi. Metode yang sering digunakan untuk menentukan estimator dari parameter adalah metode maksimum likelihood. Densitas bersama dari $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ disebut fungsi likelihood. Estimator maksimum likelihood adalah nilai parameter yang memaksimalkan fungsi likelihood. Berikut ini akan ditentukan estimator maksimum likelihood dari μ dan Σ untuk suatu sampel random dari distribusi normal multivariat .

Theorema 2.4.2

Jika $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ vektor random yang independen berdistribusi $N_p(\mu,\Sigma)$, maka estimator maksimum likelihood dari μ dan Σ adalah

$$\hat{\mu} = \bar{\mathbf{y}} \tag{2.3.4}$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' = \frac{1}{n}\mathbf{W} \tag{2.4.4}$$

di mana $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})'$

Bukti

Fungsi likelihood (densitas bersama) dari $\mathbf{y}_i$ adalah hasil kali densitas dari masing-masing $\mathbf{y}_i$

$$L(\mu, \Sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^p |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-(\mathbf{y}_i - \mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{y}_i - \mu)/2}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{np} |\Sigma|^{\frac{n}{2}}} e^{-\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i - \mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{y}_i - \mu)/2} \tag{2.4.5}$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai dari μ dan Σ yang memaksimalkan persamaan (2.4.5). Berdasarkan persamaan (2.3.5) dan (2.3.8) diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i - \mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{y}_i - \mu) = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{tr}(\mathbf{y}_i - \mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{y}_i - \mu)$$

$$= \operatorname{tr}\left(\Sigma^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i - \mu)(\mathbf{y}_i - \mu)'\right) \tag{2.4.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i - \mu)(\mathbf{y}_i - \mu)' = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{y}} - \mu)(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{y}} - \mu)'$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' + \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\bar{\mathbf{y}} - \mu)'$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}(\bar{\mathbf{y}} - \mu)(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' + \sum_{i=1}^{n}(\bar{\mathbf{y}} - \mu)(\bar{\mathbf{y}} - \mu)'$$

karena, $\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i-\bar{\mathbf{y}})(\bar{\mathbf{y}}-\mu)'=\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{y}_i-\sum_{i=1}^{n}\bar{\mathbf{y}}\right)(\bar{\mathbf{y}}-\mu)'=(n\bar{\mathbf{y}}-n\bar{\mathbf{y}})(\bar{\mathbf{y}}-\mu)'=\mathbf{0}$

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i-\mu)(\mathbf{y}_i-\mu)'=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i-\bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i-\bar{\mathbf{y}})'+n(\bar{\mathbf{y}}-\mu)(\bar{\mathbf{y}}-\mu)'$$

$$=\mathbf{W}+n(\bar{\mathbf{y}}-\mu)(\bar{\mathbf{y}}-\mu)' \qquad (2.4.7)$$

Substitusi persamaan (2.4.7) ke dalam persamaan (2.4.6) kemudian substitusikan ke dalam persamaan (2.4.5), sehingga diperoleh

$$L(\mu,\Sigma)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{np}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}}e^{-\mathrm{tr}\Sigma^{-1}\left(\mathbf{W}+n(\bar{\mathbf{y}}-\mu)(\bar{\mathbf{y}}-\mu)'\right)/2} \qquad (2.4.8)$$

Karena logaritma natural adalah fungsi naik, maksimum dari lnL akan terjadi pada titik yang sama dengan maksimum L. Pengoperasian dengan ln pada L untuk mempermudah dalam pendifferensialan. Dengan pengoperasian ln pada L diperoleh

$$\ln L(\mu,\Sigma)=-np\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)-\frac{n}{2}\ln|\Sigma|-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Sigma^{-1}\left(\mathbf{W}+n(\bar{\mathbf{y}}-\mu)(\bar{\mathbf{y}}-\mu)'\right) \qquad (2.4.9)$$

berdasarkan persamaan (2.3.5) dan (2.3.8) diperoleh

$$\ln L(\mu,\Sigma)=-np\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)-\frac{n}{2}\ln|\Sigma|-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\Sigma^{-1}\mathbf{W}\right)-\frac{n}{2}\left((\bar{\mathbf{y}}-\mu)'\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{y}}-\mu)\right)$$

$$=-np\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)-\frac{n}{2}\ln|\Sigma|-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\Sigma^{-1}\mathbf{W}\right)$$

$$-\frac{n}{2}\left(\bar{\mathbf{y}}'\Sigma^{-1}\bar{\mathbf{y}}-\mu'\Sigma^{-1}\bar{\mathbf{y}}-\bar{\mathbf{y}}'\Sigma^{-1}\mu+\mu'\Sigma^{-1}\mu\right)$$

Karena Σ^{-1} simetris maka $\left(\Sigma^{-1}\right)' = \Sigma^{-1}$, sehingga

$$\ln L(\mu, \Sigma) = -np \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) - \frac{n}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\Sigma^{-1}\mathbf{W}\right)$$
$$-\frac{n}{2}\left(\overline{\mathbf{y}}'\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{y}} - \mu'\left(\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{y}}\right) - \left(\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{y}}\right)'\mu + \mu'\Sigma^{-1}\mu\right) \quad (2.4.10)$$

Untuk menentukan estimator maksimum likelihood untuk μ, $\ln L(\mu,\Sigma)$ didefferensialkan ke μ dan menyamakannya dengan nol. Berdasarkan persamaan (2.3.19) dan (2.3.20) diperoleh

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\Sigma)}{\partial \mu} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} - \frac{n}{2}\left(\mathbf{0} - \Sigma^{-1}\overline{\mathbf{y}} - \Sigma^{-1}\overline{\mathbf{y}} + 2\Sigma^{-1}\hat{\mu}\right) = \mathbf{0}$$
$$\left(\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{y}} - \Sigma^{-1}\hat{\mu}\right) = \mathbf{0}$$
$$\Sigma^{-1}\hat{\mu} = \Sigma^{-1}\overline{\mathbf{y}}$$
$$\hat{\mu} = \overline{\mathbf{y}} \quad (2.4.11)$$

Sebelum pendifferensialan $\ln L(\mu,\Sigma)$ untuk mendapatkan $\hat{\Sigma}$, substitusikan persamaan (2.4.11) ke dalam persamaan (2.4.9) dan berdasarkan persamaan (2.3.15), $\left|\Sigma^{-1}\right| = \frac{1}{|\Sigma|}$ dengan pengoperasian ln pada kedua ruas diperoleh

$\ln\left|\Sigma^{-1}\right| = -\ln|\Sigma|$, sehingga persamaan (2.4.9) dapat ditulis

$$\ln L(\hat{\mu}, \Sigma) = -np \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) + \frac{n}{2}\ln\left|\Sigma^{-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\Sigma^{-1}\mathbf{W}\right) \quad (2.4.12)$$

Persamaan (2.4.12) didifferensialkan terhadap Σ^{-1} dan menyamakannya dengan nol, berdasarkan persamaan (2.3.21) dan (2.3.22) diperoleh

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\mu}, \Sigma)}{\partial \Sigma^{-1}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{0} + n\hat{\Sigma} - \frac{n}{2}\operatorname{diag}(\hat{\Sigma}) - \mathbf{W} + \frac{1}{2}\operatorname{diag}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}$$

$$\hat{\Sigma} - \frac{1}{2}\operatorname{diag}(\hat{\Sigma}) = \frac{1}{n}\left(\mathbf{W} - \frac{1}{2}\operatorname{diag}(\mathbf{W})\right) \qquad (2.4.13)$$

dinotasikan

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11} & \hat{\sigma}_{12} \ldots \hat{\sigma}_{1p} \\ \hat{\sigma}_{21} & \hat{\sigma}_{22} \ldots \hat{\sigma}_{2p} \\ . & \\ . & \\ \hat{\sigma}_{p1} & \hat{\sigma}_{p2} \ldots \hat{\sigma}_{pp} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \ldots w_{1p} \\ w_{21} & w_{22} \ldots w_{2p} \\ . & \\ . & \\ w_{p1} & w_{p2} \ldots w_{pp} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{diag}(\hat{\Sigma}) = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11} & 0 \ldots. & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{22} \ldots. & 0 \\ . & & \\ . & & \\ 0 & 0 \ldots & \hat{\sigma}_{pp} \end{bmatrix} \qquad \operatorname{diag}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} w_{11} & 0 \ldots & 0 \\ 0 & w_{22} \ldots & 0 \\ . & & \\ . & & \\ 0 & 0 \ldots & w_{pp} \end{bmatrix}$$

Perhatikan untuk selain elemen diagonal diperoleh

$$\hat{\sigma}_{jk} = \frac{1}{n} w_{jk}, \quad j \neq k \qquad (2.4.14)$$

Perhatikan untuk elemen diagonal

$$\hat{\sigma}_{jj} - \frac{\hat{\sigma}_{jj}}{2} = \frac{w_{jj}}{n} - \frac{w_{jj}}{2n}$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{jj}}{2} = \frac{w_{jj}}{2n}$$

$$\hat{\sigma}_{jj} = \frac{w_{jj}}{n} \tag{2.4.15}$$

dari persamaan (2.4.14) dan (2.4.15) dapat disimpulkan bahwa

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\mathbf{W} \tag{2.4.16}$$

Sehingga estimator maksimum likelihood untuk Σ adalah $\hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\mathbf{W}$.

Sifat-sifat fungsi pembangkit momen distribusi normal multivariat adalah sebagai berikut, misalkan y_i independen berdistribusi $N_p(\mu,\Sigma)$ dan **b** vektor konstanta dan a konstanta

1. $M_{\mathbf{y}+\mathbf{b}}(\mathbf{t}) = M_{\mathbf{y}}(\mathbf{t})e^{\mathbf{t}'\mathbf{b}}$ (2.4.17)

2. $M_{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{y}_i}(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{t}'n\mu + \mathbf{t}'n\Sigma\mathbf{t}/2}$ (2.4.18)

3. $M_{a\mathbf{y}}(\mathbf{t}) = M_{\mathbf{y}}(a\mathbf{t}) = e^{\mathbf{t}'a\mu + \mathbf{t}'a^2\Sigma\mathbf{t}/2}$ (2.4.19)

4. $M_{\bar{\mathbf{y}}}(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{t}'\mu + \mathbf{t}'\frac{1}{n}\Sigma\mathbf{t}/2}$ (2.4.20)

di mana $\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{y}_i$

Theorema 2.4.3

Jika $a_1, a_2, \ldots, a_n$ konstanta dan $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ independen berdistribusi $N_p(\mu,\Sigma)$,

Maka $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i$ berdistribusi $N_p\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \Sigma\right)$

Bukti

Berdasarkan persamaan (2.4.19)

$$M_{a_i \mathbf{y}_i}(\mathbf{t}) = e^{a_i \mathbf{t}'\mu + a_i^2 \mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t}/2}$$

berdasarkan persamaan (2.4.18)

$$M_{\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{y}_i}(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{t}'\sum_{i=1}^{n} a_i \mu + \mathbf{t}'\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \Sigma \mathbf{t}/2} \qquad (2.4.21)$$

persamaan (2.4.21) merupakan fungsi pembangkit momen untuk

$N_p\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \Sigma\right)$

2.5. Distribusi Wishart

Distribusi wishart memegang peranan penting dalam prosedur inferensial multivariat. Distribusi wishart dapat diturunkan dari distribusi normal multivariat.

Definisi 2.5.1 : Jika Matrik $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i'$ dengan $\mathbf{z}_i$ independen berdistribusi $N_p(\mathbf{0},\Sigma)$, maka $\mathbf{A}$ dikatakan berdistribusi wishart dengan derajat kebebasan n dan matrik kovarian Σ dinotasikan dengan $W_p(n,\Sigma)$.

Subskrip p menunjukan ukuran matrik **A**. untuk $n \geq p$, **A** mempunyai fungsi densitas

$$W(\mathbf{A}|n,\Sigma)=\begin{cases}\dfrac{|\mathbf{A}|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Sigma^{-1}\mathbf{A}\right)}{2^{\frac{1}{2}np}\pi^{p(p-1)/4}|\Sigma|^{\frac{1}{2}n}\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1-i)\right)} & ,\mathbf{A}\text{ definit positif} \\ 0 & ,\text{yang lain}\end{cases} \quad (2.5.1)$$

Akan ditunjukan bahwa matrik **W** seperti pada persamaan (2.4.4) berdistribusi $W_p(n\text{-}1,\Sigma)$

Theorema 2.5.1

Misalkan vektor random $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2,\ldots, \mathbf{y}_n$ independen berdistribusi $N_p(\mu,\Sigma)$ dan didefinisikan vektor random $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2,\ldots, \mathbf{z}_n$ dengan

$$\mathbf{z}_1 = \sum_{j=1}^{n} p_{1j}\mathbf{y}_j \qquad \mathbf{z}_2 = \sum_{j=1}^{n} p_{2j}\mathbf{y}_j \;\ldots\ldots\ldots\; \mathbf{z}_n = \sum_{j=1}^{n} p_{nj}\mathbf{y}_j$$

Diambil matrik ortogonal $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ berukuran $n \times n$ di mana baris pertama matrik **P** adalah

$$\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\;\frac{1}{\sqrt{n}}\cdots\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

didefinisikan $\mathbf{Z} = \sum_{i=2}^{n}\mathbf{z}_i\mathbf{z}_i'$, Maka

1. $\mathbf{z}_i$ berdistribusi $N_p(\mathbf{0},\Sigma)$ untuk $i = 2,3,\ldots,n$

2. $\mathbf{Z} = \mathbf{W}$ berdistribusi $W_p(n\text{-}1,\Sigma)$ di mana

$$W = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})'$$

Bukti

Karena $\mathbf{P}$ matrik ortogonal , $\mathbf{P'P} = \mathbf{PP'} = \mathbf{I}$. Pandang p_{ij} elemen dari matrik $\mathbf{P}$ dengan baris pertama dari $\mathbf{P}$ adalah $\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \cdots \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ didapat

1. $$\sum_{j=1}^{n} p_{rj} p_{sj} = \rho_{rs} \qquad (2.5.2)$$

   di mana $\rho_{rs} = 0$ untuk $r \neq s$ dan $\rho_{rs} = 1$ untuk $r = s$

2. berdasarkan persamaan (2.5.12) dengan mengambil $r = 1$ didapat

   $$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 0 \text{ untuk } i = 2,3,\ldots,n \qquad (2.5.3)$$

3. Karena $\mathbf{P'P} = \mathbf{I}$

   $$\sum_{r=2}^{n} p_{rj} p_{ri} = \sum_{r=1}^{n} p_{rj} p_{ri} - p_{1j} p_{1i} = \rho_{ij} - \frac{1}{n} \qquad (2.5.4)$$

bukti bagian 1

$\mathbf{z}_i$ berdistribusi normal karena distribusi bersama dari $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ adalah normal dan $\mathbf{z}_i$ merupakan fungsi linier dari $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$. $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n$ berdistribusi normal bersama sehingga untuk menentukan independensi cukup ditunjukan $\text{cov}(\mathbf{z}_r, \mathbf{z}_s) = \mathbf{0}$ untuk semua $r \neq s$

$$\text{cov}(\mathbf{z}_r, \mathbf{z}_s) = E\left((\mathbf{z}_r - E(\mathbf{z}_r))(\mathbf{z}_s - E(\mathbf{z}_s))'\right)$$

$$= E\left(\left(\sum_{j=1}^{n} p_{rj}\mathbf{y}_j - E\left(\sum_{j=1}^{n} p_{rj}\mathbf{y}_j\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_{si}\mathbf{y}_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} p_{si}\mathbf{y}_i\right)\right)'\right)$$

$$= E\left(\left(\sum_{j=1}^{n} p_{rj}\mathbf{y}_j - \mu\sum_{j=1}^{n} p_{rj}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_{si}\mathbf{y}_i - \mu\sum_{i=1}^{n} p_{si}\right)'\right)$$

$$= E\left(\left(\sum_{j=1}^{n} p_{rj}(\mathbf{y}_j - \mu)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_{si}(\mathbf{y}_i - \mu)\right)'\right)$$

$$= E\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_{rj}p_{si}(\mathbf{y}_j - \mu)(\mathbf{y}_i - \mu)'\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_{rj}p_{si}E\left((\mathbf{y}_j - \mu)(\mathbf{y}_i - \mu)'\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_{rj}p_{si}\rho_{ij}\Sigma$$

di mana $\rho_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jika } i = j \\ 0, \text{ jika } i \neq j \end{cases}$

diperoleh $E\left((\mathbf{y}_j - \mu)(\mathbf{y}_i - \mu)'\right) = \rho_{ij}\Sigma$, karena $\mathbf{y}_i$ dan $\mathbf{y}_j$ independen jika $i \neq j$.

selanjutnya didapat

$$\operatorname{cov}(\mathbf{z}_r, \mathbf{z}_s) = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_{rj}p_{si}\rho_{ij}\right)\Sigma = \left(\sum_{j=1}^{n} p_{rj}p_{sj}\right)\Sigma = \rho_{rs}\Sigma \qquad (2.5.5)$$

sehingga berdasarkan persamaan (2.5.2) $\operatorname{cov}(\mathbf{z}_r,\mathbf{z}_s) = \mathbf{0}$ untuk $r \neq s$, yang menunjukan bahwa $\mathbf{z}_r,\mathbf{z}_s$ independen, sehingga $\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\ldots,\mathbf{z}_n$ independen.

Sekarang akan ditentukan rata-rata (mean) dan kovarian dari $\mathbf{z}_r$

Untuk r = 1

$$E(\mathbf{z}_1) = E\left(\sum_{j=1}^{n} p_{1j}\mathbf{y}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} p_{1j}E(\mathbf{y}_j) = \mu\sum_{j=1}^{n} p_{1j} = \mu\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \sqrt{n}\mu$$

untuk r = 2,3,...,n

$$E(\mathbf{z}_r) = E\left(\sum_{j=1}^{n} p_{rj}\mathbf{y}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} p_{rj}E(\mathbf{y}_j) = \mu\sum_{j=1}^{n} p_{rj} = 0$$

karena berdasarkan persamaan (2.5.3) $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 0$ untuk i = 2,3,....,n dan berdasarkan persamaan (2.5.5) cov($\mathbf{z}_r$) = Σ, sehingga $\mathbf{z}_i$ berdistribusi $N_p(\mathbf{0},\Sigma)$ untuk r = 2,3,...,n.

bukti bagian 2

$$\mathbf{Z} = \sum_{r=2}^{n}\mathbf{z}_r\mathbf{z}_r' = \sum_{r=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{rj}\mathbf{y}_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ri}\mathbf{y}_i\right)'$$

$$= \sum_{r=2}^{n}(p_{r1}\mathbf{y}_1 + p_{r2}\mathbf{y}_2 + \ldots + p_{rn}\mathbf{y}_n)(p_{r1}\mathbf{y}_1 + p_{r2}\mathbf{y}_2 + \ldots + p_{rn}\mathbf{y}_n)'$$

$$= \sum_{r=2}^{n}(p_{r1}p_{r1}\mathbf{y}_1\mathbf{y}_1' + p_{r1}p_{r2}\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2' + \ldots + p_{rn}p_{rn}\mathbf{y}_n\mathbf{y}_n')$$

$$= \sum_{r=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_{rj}p_{ri}\mathbf{y}_j\mathbf{y}_i'\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{r=2}^{n} p_{rj}p_{ri}\right)\mathbf{y}_j\mathbf{y}_i'$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\rho_{ij} - \frac{1}{n}\right)\mathbf{y}_j\mathbf{y}_i'$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\rho_{ij}\mathbf{y}_j\mathbf{y}_i' - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{y}_j\mathbf{y}_i'$$

karena $\rho_{ij} = 1$, untuk $i = j$ dan $\rho_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$, sehingga didapat

$$\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i' - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{y}_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{y}_i\right)'$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i' - n\overline{\mathbf{y}\mathbf{y}}'$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i' - n\overline{\mathbf{y}\mathbf{y}}' - n\overline{\mathbf{y}\mathbf{y}}' + n\overline{\mathbf{y}\mathbf{y}}'$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i' - \overline{\mathbf{y}}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{y}_i' - \sum_{i=1}^{n}\mathbf{y}_i\overline{\mathbf{y}}' + n\overline{\mathbf{y}\mathbf{y}}'$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i - \overline{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \overline{\mathbf{y}})'$$

$$= \mathbf{W}$$

Karena $\mathbf{z}_i$ berdistribusi $N_p(\mathbf{0},\Sigma)$, sehingga berdasarkan definisi 2.5.1 $\mathbf{Z} = \sum_{i=2}^{n}\mathbf{z}_i\mathbf{z}_i'$ berdistribusi $W_p(n\text{-}1,\Sigma)$ dan oleh karena $\mathbf{Z} = \mathbf{W}$, sehingga $\mathbf{W}$ berdistribusi $W_p(n\text{-}1,\Sigma)$.

Theorema 2.5.2

Jika $\mathbf{A}_1$ berdistribusi $W_p(n_1,\Sigma)$ dan $\mathbf{A}_2$ berdistribusi $W_p(n_2,\Sigma)$ dengan $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ independen, Maka $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ berdistribusi $W_p(n_1 + n_2,\Sigma)$

Bukti

$\mathbf{A}_1$ dan $\mathbf{A}_2$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\mathbf{A}_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i'$$

$$\mathbf{A}_2 = \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i'$$

di mana $\mathbf{z}_i$ independen berdistribusi $N_p(\mathbf{0},\Sigma)$, sehingga

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i' + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i'$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i'$$

Karena $\mathbf{z}_i$ independen berdistribusi $N_p(\mathbf{0},\Sigma)$, sehingga $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ berdistribusi $W_p(n_1+n_2,\Sigma)$

2.6. Statistik Hotelling's T^2

Statistik Hotelling's T^2 mempunyai peranan penting dalam pengambilan inferensi pada kasus multivariat. Statistik Hotelling's T^2 dapat digunakan untuk menguji hipotesis vektor rata-rata dalam kasus multivariat (*Anderson, T.W.*, 1984). Definisi formal dari T^2 adalah sebagai berikut

Definisi 2.6.1 : Misalkan **z** vektor berukuran $p\times 1$ berdistribusi $N_p(\mathbf{0},\Sigma)$ dan **A** matrik berukuran $p\times p$ berdistribusi $W_p(n,\Sigma)$, dengan **z** dan **A** independen variabel random T^2 dengan ukuran p dan derajat kebebasan n didefinisikan

$$T^2 = \mathbf{z}'\left(\frac{\mathbf{A}}{n}\right)^{-1}\mathbf{z} \qquad (2.6.1)$$

Distribusi Hotelling's T^2 dapat diturunkan dari definisi 2.6.1.