BAB II
MATERI PENUNJANG

Untuk mempermudah pembahasan Analisis korespondensi dua variabel, maka dibutuhkan beberapa definisi dan teorema. Pada bab ini pokok-pokok yang dibicarakan melingkupi vektor dan matriks.

2.1. Istilah-istilah

Definisi 1

Variabel adalah suatu tanda/simbol yang akan digantikan oleh suatu konstan.

Definisi 2

Variabel kuantitatif adalah variabel yang konstannya terukur dan diukur dengan skala numerik (interval atau rasio)

Definisi 3

Variabel kualitatif adalah variabel yang konstannya tidak terukur, sehingga diukur dengan skala pengukuran nominal atau ordinal.

Definisi 4

Skala interval adalah pemberian angka kepada kelompok obyek yang memperlihatkan jarak yang sama.

Definisi 5

Skala ratio adalah pemberian angka kepada kelompok obyek yang mempunyai sifat skala interval dan memberi keterangan tentang nilai absolut dari obyek yang diukur.

Definisi 6

Skala nominal ialah skala yang digunakan untuk menggolongkan atau menunjukkan kesamaan atau perbedaan ciri-ciri tertentu dari obyek.

Definisi 7

Skala ordinal adalah skala yang digunakan untuk menggolongkan kesamaan ciri-ciri tertentu dari obyek dan mengandung tingkatan (peringkat).

Definisi 8

Variabel indikator adalah sejumlah observasi yang dilakukan pada satu variabel.

Definisi 9

Individu adalah banyaknya obyek yang diamati.

2.2. VEKTOR

Definisi 10

Sebuah vektor berdimensi - n atas R diartikan suatu pasangan terurut n elemen-elemen X_i dari R^n

Ditulis $\bar{X} = \{X_1, X_2 \ . \ . \ .X_n\}$

Definisi 11

Misal $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ dan

$\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$

adalah vektor sembarang dalam R^n, dinamakan sama jika

$x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3, \ldots, x_n = y_n$

Jumlah $\bar{x} + \bar{y}$ didefinisikan oleh

$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

dan jika α sembarang skalar, maka perkalian skalar $\alpha\bar{x}$ didefinisikan oleh

$$\alpha\bar{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

Definisi 12

Jika $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ dan

$\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$

adalah vektor sembarang dalam R^n, maka hasil kali dalam euclidis didefinisikan sebagai berikut :

$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$

Definisi 13

Sebuah vektor $\bar{x}$ dikatakan kombinasi linear dari vektor-vektor $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$ jika terdapat bilangan real, tidak semuanya nol, sedemikian sehingga :

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{x}_i, \text{ dimana } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ adalah skalar.}$$

Definisi 14

Jika $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ adalah vektor-vektor pada ruang vektor V dan jika masing-masing vektor pada V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ maka dikatakan bahwa vektor-vektor ini membangun V.

2.3. NORMA VEKTOR

Ambil sembarang vektor R notasi untuk himpunan dari semua vektor kolom dengan bilangan real sebagai koefisien untuk mendefinisikan jarak dalam R kita gunakan notasi norma.

Definisi 15

Norma vektor R^n adalah suatu fungsi yang dinotasikan $\| \cdot \|$ dari R^n menuju R dengan memenuhi ketentuan-ketentuan :

i. $\| \overline{x} \| > 0$, untuk semua $\overline{x} \in R^n$

ii. $\| \overline{x} \| = 0$ jika dan hanya jika $\overline{x} = (0,0, \ldots 0)^T$

iii. $\| \alpha\overline{x} \| = | \alpha | \, \| \overline{x} \|$, untuk setiap $\alpha \in R$ dan $\overline{x} \in R^n$

iv. $\| \overline{x}+\overline{y} \| \leq \| \overline{x} \| + \| \overline{y} \|$ untuk setiap $\overline{x}, \overline{y} \in R^n$

Definisi 16

Norma untuk vektor $\bar{x} = (x_1, X_2, \ldots, x_n)^T$ didefinisikan dengan :

$$\| \bar{x} \| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right\}^{1/2}$$

Definisi 17

Jika $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ dan $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ adalah vektor-vektor dalam R^n, jarak antara dua vektor $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ dinyatakan dengan $d(\bar{x},\bar{y})$ dan didefinisikan oleh :

$$d(\bar{x},\bar{y}) = \|\bar{x}-\bar{y}\| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2}$$

2.3. MATRIKS

Definisi 18

Sebuah matriks adalah sebuah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Definisi 19

Jika A dan B dua buah matriks yang ukurannya sama, maka jumlah A + B adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut.

Contoh :

$$C = A + B \text{ dimana } C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\text{dengan } i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, p$$

Definisi 20

Jika A_{mxn} adalah suatu matriks dan α adalah suatu skalar, maka hasil kali skalar dari α dan A dinotasikan αA adalah matriks berorde mxn yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A dengan α. atau

$$\alpha a_{ij}, \; i = 1, 2, 3, \ldots, m \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Definisi 21

Jika A adalah matriks berorde m x r dan B adalah matriks r x n, maka hasil kali A dan B dinotasikan AB, adalah C matriks berorde m x n dimana entri-entri c_{ij} diberikan oleh

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \, b_{kj}, \text{ untuk setiap } i = 1, 2, 3, \ldots, m$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Definisi 22

Matriks diagonal adalah matriks bujursangkar yang semua elemen diluar diagonal utama adalah nol. Dengan kata lain :

$$d_{ij} = 0; \text{ untuk } i \neq j$$

Definisi 23

A matriks bujur sangkar orde n adalah sebuah matriks dengan n baris dan n kolom dan sel-sel a_{11} a_{22}, ..., a_{nn} berada pada diagonal utama dari A.

Definisi 24

Matriks identitas dinotasikan dengan I, adalah matriks diagonal yang elemen-elemen diagonal utama semuanya satu dan semua elemen bebas diagonal adalah nol.

$$I \quad \begin{cases} i_{ij} = 0, \text{ untuk } i \neq j \\ i_{ij} = 1, \text{ untuk } i = j \end{cases}$$

Definisi 25

Matriks nol adalah matriks m x n dengan semua elemen-nya nol.

Definisi 26

Jika A adalah matriks bujur sangkar, dan jika dapat dicari matriks B sehingga AB = BA = I, maka A dikatakan mempunyai matriks invers dari A

Definisi 27

Misalkan A matriks bujur sangkar. det(A) sebagai jumlah semua hasil kali elementer ber- tanda dari A. Jumlah det(A) dinamakan determinan A.

Definisi 28

Misal A matriks bujur sangkar non singular, A dikatakan mempunyai invers yang dinotasikan dengan A^{-1} yaitu suatu matriks bujur sangkar sedemikian sehingga berlaku $AA^{-1} = A^{-1} A = I$

Definisi 29

transpose matriks $A = [a_{ij}]_{nxm}$, dinotasikan A^T yaitu matriks yang didapatkan dengan menukar baris dan kolom dari matriks A.

$A^T = [a_{ij}]_{nxm}$ dimana $a^T_{ij} = a_{ji}$

Definisi 30

A dan B matriks bujur sangkar dimanakam equivalen jika terdapat S matriks non singular sedemikian sehingga

$$B = S^{-1} AS$$

Definisi 31

A matriks n x m dikatakan simetris jika $A = A^T$ dimana $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua i dan j.

Definisi 32

Jika A adalah matriks nxn, maka $\overline{x}$ vektor tidak nol dari R^n dinamakan vektor karakteristik dari A. Bila $A\overline{x}$ adalah kelipatan skalar dari $\overline{x}$ yaitu

$$A\,\overline{x} = \lambda\,\overline{x}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai karakteristik matriks A dan $\overline{x}$ dikatakan vektor karakteristik matriks yang berukuran nxn, maka $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$ dapat ditulis sebagai

$$A\overline{x} = \lambda I\overline{x}$$

atau secara equivalen

$$(A - \lambda I)\,\overline{x} = \overline{0}$$

yang mengakibatkan matriks $(A - \lambda I)$ adalah singular jika $\overline{x}$ adalah vektor karakteristik dari A, berarti :

$\det\,(A - \lambda I) = 0$

$\det\,(a - \lambda I) = \lambda^{N} + C_1\lambda^{N-1} + C_2\lambda^{N-2} + \ldots + C_N = 0$

dinamakan persamaan karakteristik dari A.

Definisi 33

A matriks bujur sangkar dinamakan dapat didiagonalisasi secara ortogonal jika terdapat matriks P ortogonal sehingga $P^{-1}AP = P^{T}AP$ diagonal, matriks P mendiagonalisasi matriks A.

Definisi 34

Himpunan vektor $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\}$ disebut ortogonal jika $(\overline{x}_i)^T\,\overline{x}_j = 0$ untuk setiap $i \neq j$ dan jika ditambah $(\overline{x}_i)^T\,\overline{x}_j = 1$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ maka himpunan tersebut disebut ortonormal.

Definisi 35

A sebuah matriks bujur sangkar yang mempunyai sigat $P^{-1} = P^{T}$ dikatakan matriks ortogonal.

Definisi 36

Bentuk kwadratik dari variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dapat ditulis sebagai

$$X^{T}AX = \begin{bmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= a_{12}x_1^{2} + a_{22}x_2^{2} \ldots + a_n x_n^{2} + \Sigma\ a_{ij}x_{ij}^{2}$$

dengan A adalah matriks bujur sangkar nxn.

Definisi 37

Bentuk kuadratik $X^{T}AX$ kita sebut definit positif jika $X^{T}AX > 0$ untuk setiap $A \neq 0$, sedangkan matriks simetris A disebut matriks positif jika X^{T} AX adalah bentuk kuadratik definit positif.