BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. MODEL REGRESI GANDA

Secara umum model regresi ganda dirumuskan dengan

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i \qquad (2.1.1)$$

$$= \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij} + \varepsilon_i \quad , \; i = 1, 2, \dots, n$$

$$\varepsilon_i \sim NID\,(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Untuk mengestimasi harga-harga β_j digunakan estimasi kuadrat terkecil, yaitu dengan cara meminimalkan jumlah kuadrat sesatan ε_i yaitu

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij})^2 \qquad (2.1.2)$$

Jika persamaan (2.1.2) ini diturunkan terhadap β_0, β_1, β_2, ... , β_k dan menyamakannya dengan nol, maka akan diperoleh estimasi dari parameter regresi yaitu $\hat{\beta}_j$, j = 1, 2, 3, ...

Model dalam persamaan (2.1.1) dapat pula dinyatakan dalam bentuk matriks, yaitu

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & & & & \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$(nx1)$ (nxp) $(px1)$ $(nx1)$

dengan $p = k+1$.

Estimasi kuadrat terkecil diperoleh dengan meminimalkan

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon'\varepsilon = (Y - X\beta)'(Y - X\beta)$$

$$= Y'Y - \beta'X'Y - Y'X\beta + \beta'X'X\beta$$

$$= Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta$$

karena $\beta'X'Y$ adalah matriks 1x1 atau skalar dan transposenya $(\beta'X'Y)' = Y'X'\beta$ juga skalar.

Estimator kuadrat terkecil harus memenuhi

$$\left.\frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial \beta}\right|_{\hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

$$X'X\hat{\beta} = X'Y$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma X_{i1} & \Sigma X_{i2} & \cdots & \Sigma X_{ik} \\ \Sigma X_{i1} & \Sigma X_{i1}^2 & \Sigma X_{i1}X_{i2} & \cdots & \Sigma X_{i1}X_{ik} \\ \vdots & & & & \\ \Sigma X_{ik} & \Sigma X_{ik}X_{i1} & \Sigma X_{ik}X_{i2} & \cdots & \Sigma X_{ik}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat\beta_0 \\ \hat\beta_1 \\ \vdots \\ \hat\beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma Y_i \\ \Sigma X_{i1}Y_i \\ \vdots \\ \Sigma X_{ik}Y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} E(\hat\beta) &= E\,[(X'X)^{-1}(X'Y)] \\ &= E\,[(X'X)^{-1}X' \;\; (X\beta+\varepsilon) \\ &= E\,[(X'X)^{-1}X'X\beta + (XX)^{-1}X'\varepsilon] \\ &= \beta \end{aligned}$$

karena $E(\varepsilon) = 0$ dan $(X^{-}X)^{-1}X'X = I$. Jadi $\hat\beta$ adalah estimator tak bias dari β.

Estimasi dari σ_ε^2 diperoleh dari jumlah kuadrat sesatan

$$JKS = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat Y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e'e \;, \quad \text{dimana } e = \hat\varepsilon$$

Dengan mensubstitusikan $e = Y - X\hat\beta$, maka

$$\begin{aligned} JKS &= (Y-X\hat\beta)'(Y-X\hat\beta) \\ &= Y'Y - \hat\beta'X'Y - Y'X\hat\beta + \hat\beta'X'X\hat\beta \\ &= Y'Y - 2\hat\beta'X'Y + \hat\beta'X'X\hat\beta \end{aligned}$$

Karena $X'X\hat\beta = X'Y$, maka persamaan terakhir menjadi

$$JKS = Y'Y - \hat\beta'X'Y \qquad (2.1.3)$$

Jumlah kuadrat sesatan mempunyai derajat bebas n-p, karena p parameter di estimasi dalam regresi itu. Rata-rata kuadrat sesatan dirumuskan dengan

$$RKS = \frac{JKS}{n-p}$$

Test untuk signifikansi dari model regresi adalah test untuk menentukan jika ada hubungan linear antara respon Y dan variabel regresor X_1, X_2, ... , X_k. Test hipotesisnya adalah

H_0 : $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$

H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_j \neq 0$

Penolakan dari $H_0 : \beta_j = 0$ berarti paling sedikit satu dari regresor X_1, X_2, ... , X_k signifikan untuk model itu. Jumlah kuadrat total (JKT) dipartisi menjadi jumlah kuadrat regresi (JKR) dan jumlah kuadrat sesatan (JKS) yaitu

JKT = JKR + JKS

Statistik penguji untuk hipotesis diatas adalah

$$F_o = \frac{JKR/k}{JKS/n-k-1} = \frac{RKR}{RKS}$$

Jika $F_o > F_{(\alpha,k,n-k-1)}$ maka H_o ditolak.

Perhitungan RKR diperoleh dari

JKS = $Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$

dan jumlah kuadrat total

$$JKT = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2}{n} = Y'Y - \frac{(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2}{n} \qquad (2.1.4)$$

$$JKS = Y'Y - \frac{(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2}{n} - \left[\hat{\beta}' X' Y - \frac{(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2}{n} \right]$$

JKS = JKT - JKR

Karena itu JKR-nya adalah

$$JKR = \hat{\beta}' X' Y - \frac{(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2}{n} \qquad (2.1.5)$$

Tabel 1. Analisa Variansi

Sumber variasi	JK	DK	RK	F_o
Regresi	JKR	k	RKR	$\frac{RKR}{RKS}$
Sesatan	JKS	n-k-1	RKS	
Total	JKT	n-1		

2.2. MODEL RUNTUN WAKTU STASIONER UNIVARIAT

2.1.1. STASIONERITAS DAN WHITE NOISE

Definisi 2.2.1. (Fungsi Autokovariansi)

Jika $\{X_t, t = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ adalah proses sedemikian hingga var $(X_t) < \infty$ untuk setiap $t = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, maka fungsi autokovariansi $\gamma_x(.,.)$ dari $\{X_t\}$ dirumuskan dengan

$$\gamma_x(r,s) = Cov(X_r, X_s) = E[(X_r - E(X_r))(X_s - E(X_s))]$$

$$r,s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (2.2.1)$$

Definisi 2.2.2.

Proses $\{X_t, t \in Z\}$ dengan $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ disebut stasioner jika

(a) $E\,|X_t|^2 < \infty$ untuk semua $t \in Z$

(b) $E\,(X_t) = m$ untuk semua $t \in Z$

(c) $\gamma_x\,(r,s) = \gamma_x(r+t, s+t)$ untuk semua $r,s,t \in Z$

Jika $\{X_t, t \in Z\}$ adalah stasioner, maka $\gamma_x(r,s) = \gamma_x(r-s,0)$ untuk semua $r,s \in Z$. Karena itu fungsi autokovariansi dari proses stasioner dapat didefinisikan sebagai fungsi dari satu variabel, yaitu $\gamma_x(h) = \gamma_x(h,0) = \text{Cov}\,((X_{t+h}, X_t)$ untuk semua $t,h \in Z$. Fungsi $\gamma_x(.)$ sebagai fungsi autokovariansi dari $\{X_t\}$ dan $\gamma_x(h)$ sebagai nilai autokovariansi pada "lag" h. Fungsi autokorelasi dari X_t pada lag h adalah

$\rho_x(h) = \gamma_x(h)/\gamma_x(0) = \text{Corr}\,(X_{t+h}, X_t)$ untuk semua $t,h \in Z$.

Definisi 2.2.3.

Proses $\{a_t\}$ disebut white noise dengan mean 0 dan variansi σ_a^2, atau ditulis

$$\{a_t\} \sim WN(0, \sigma_a^2)$$

jika dan hanya jika $\{a_t\}$ mempunyai mean nol dan fungsi kovariansi

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma_a^2 & \text{jika } h = 0 \\ 0 & \text{jika } h \neq 0 \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Jadi proses $\{a_t\}$ disebut white noise jika $\{a_t\}$ adalah barisan variabel random yang tidak berkorelasi dari distribusi tetap dengan mean diasumsikan nol dan variansi konstan, $\mathrm{Var}(a_t) = \sigma_a^2$ dan $\gamma(h) = \mathrm{Cov}(a_t, a_{t+h}) = 0$ untuk $h \neq 0$. Jadi proses white noise $\{a_t\}$ adalah stasioner dengan fungsi autokovariansi persamaan (2.2.2) dan fungsi autokorelasi

$$\rho(h) = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases} \tag{2.2.3}$$

2.2.2. MODEL MOVING AVERAGE (MA) UNIVARIAT

Model umum MA (q) univariat dirumuskan dengan

$$X_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \tag{2.2.4}$$

Model MA(q) X_t diperoleh dengan menerapkan bobot $1, -\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_q$ pada variabel-variabel a_t, $a_{t-1}, a_{t-2}, \dots, a_{t-q}$.

Untuk model MA(1), $X_t = a_t - \theta a_{t-1}$, maka

$$E(X_t) = E(a_t - \theta a_{t-1}) = 0$$

$$\mathrm{Var}\ (X_t) = E\ [(a_t - \theta a_{t-1})\ (a_t - \theta a_{t-1})] = (1 + \theta^2)\sigma_a^2$$

$$\mathrm{Cov}\ (X_t, X_{t-1}) = \mathrm{Cov}(a_t - \theta a_{t-1}, a_{t-1} - \theta a_{t-2})$$

$$= \mathrm{Cov}(-\theta a_{t-1}, a_{t-1}) = -\theta\ \sigma_a^2$$

$$\mathrm{Cov}\ (X_t, X_{t-2}) = \mathrm{Cov}(a_t - \theta a_{t-1}, a_{t-2} - \theta a_{t-3}) = 0$$

karena tidak ada a dengan lag yang sama antara X_t dan X_{t-2}. Jadi $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-k}) = 0$ untuk $k \geq 2$, yaitu proses tidak punya korelasi untuk lag melebihi satu. Sedangkan $\rho_1$nya adalah

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta\sigma_a^2}{(1+\theta^2)\sigma_a^2} = \frac{-\theta}{1 + \theta^2}$$

2.2.3. MODEL AUTOREGRESSIVE (AR) UNIVARIAT

Secara umum, model AR(p) univariat dirumuskan dengan

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ \ldots\ + \phi_p X_{t-p} + a_t \qquad (2.2.5)$$

Nilai yang sekarang dari X_t adalah kombinasi linear dari p nilainya yang lalu , ditambahkan white noise a_t. Jadi diasumsikan a_t independen dengan $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$.

Untuk model AR(1) $X_t = \phi\ X_{t-1} + a_t$ (2.2.6)

$$\mathrm{Var}\ (X_t) = \mathrm{Var}(\phi X_{t-1} + a_t)$$

$$\mathrm{Var}\ (X_t) = \phi^2\ \mathrm{Var}(X_{t-1}) + \mathrm{Var}\ (a_t)$$

$$\gamma_0 = \phi^2\ \gamma_0 + \sigma_a^2$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi^2}$$

Jika persamaan (2.2.6) dikalikan dengan X_{t-k} dan kemudian diambil ekspektasinya, maka akan diperoleh

$$E\ (X_t X_{t-k}) = \phi\ E\ (X_{t-1} X_{t-k}) + E(a_t X_{t-k})$$

Karena deret diasumsikan stasioner dan karena a_t dan X_{t-k} independen, diperoleh

$$\gamma_k = \phi\gamma_{k-1}\ ,\ \text{untuk } k = 1,\ 2,\ \ldots \qquad (2.2.7)$$

$$\text{Jika } k = 1,\ \gamma_1 = \phi\gamma_0 = \frac{\phi\ \sigma_a^2}{(1-\phi^2)}$$

$$k = 2,\ \gamma_2 = \phi\gamma_1 = \frac{\phi^2\sigma_a^2}{(1-\phi^2)}$$

$$\vdots$$

$$\gamma_k = \frac{\phi^k\sigma_a^2}{(1-\phi^2)}$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_o} = \phi^k \quad , \; k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Untuk model AR(p) secara umum, yaitu

$X_t = \phi_1 X_{t-2} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + a_t$ akan diperoleh

$$E(X_t X_{t-k}) = E[(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p}) X_{t-k}]$$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \ldots + \phi_p \gamma_{k-p}$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \ldots + \phi_p \rho_{k-p} \quad , k \geq 1 \qquad (2.2.8)$$

Dengan mengambil k = 1, 2, ..., p dalam persamaan (2.2.7) dan mengambil $\rho_o = 1$ dan $\rho_{-k} = \rho_k$, diperoleh persamaan Yule-Walker

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \ldots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_p \rho_{p-1} \\ &\vdots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \ldots + \phi_p \end{aligned} \qquad (2.2.9)$$

Jika diberikan nilai ϕ_1, ϕ_2, ..., ϕ_p, persamaan linear dapat diselesaikan untuk ρ_1, ρ_2, ..., ρ_p. Kemudian persamaan (2.2.8) dapat digunakan untuk memperoleh ρ_k pada lag-lag yang lebih tinggi.

$$E(a_t X_t) = E[a_t(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + a_t)]$$

$$= E(a_t^2)$$

$$= \sigma_a^2$$

Jika persamaan (2.2.5) dikalikan X_t dan diambil ekspektasinya, diperoleh

$$E(X_t X_t) = E[X_t(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + a_t)]$$

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \dots + \phi_p\gamma_p + \sigma_a^2$$

Dengan menggunakan $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$ maka

$$\rho_0 = \phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_2 + \dots + \phi_p\rho_p + \frac{\sigma_a^2}{\gamma_0}$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \dots - \phi_p\rho_p} \qquad (2.2.10)$$

2.2.4. MODEL AUTOREGRESSIVE MOVING AVERAGE (ARMA) UNIVARIAT

Definisi 2.2.1

Proses $\{X_t, t = 0, \pm1, \pm2, \dots\}$ disebut proses ARMA(p,q) jika $\{X_t\}$ stasioner dan jika untuk setiap t,

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

(2.2.11)

dengan $a_t \sim WN(0,\sigma_a^2)$. Dikatakan bahwa proses ARMA(p,q) dengan mean μ jika $\{X_t-\mu\}$ adalah proses ARMA(p,q).

Untuk model ARMA(1,1) modelnya adalah

$$X_t = \phi X_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1} \qquad (2.2.12)$$

Untuk memperoleh persamaan Yule-Walker, pertama-tama dihitung dulu

$$E(a_t X_t) = E[a_t(\phi X_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1})]^2 = \sigma_a^2$$

$$E(a_{t-1} X_t) = E[a_{t-1}(\phi X_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1})] = \phi\sigma_a^2 - \theta\sigma_a^2$$

$$= (\phi-\theta)\sigma_a^2$$

Jika persamaan (2.2.12) dikalikan dengan X_{t-k} dan diambil ekspektasinya, maka diperoleh

$$E(X_{t-k}X_t) = E[X_{t-k}(\phi X_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1})] \qquad (2.2.13a)$$

$$\gamma_0 = \phi\gamma_1 + (1 - \theta(\phi-\theta))\sigma_a^2 \qquad k = 0 \qquad (2.2.13b)$$

$$\gamma_1 = \phi\gamma_0 - \theta\sigma_a^2 \qquad k = 1 \qquad (2.2.13c)$$

dan

$$\gamma_k = \phi\gamma_{k-1} \qquad k \geq 2 \qquad (2.2.13d)$$

Dari persamaan (2.2.13b) dan (2.2.13c) diperoleh

$$\gamma_0 = \phi\gamma_1 + (1 - \theta(\phi-\theta))\sigma_a^2$$

$$= \phi(\phi\gamma_0 - \theta\sigma_a^2) + (1 - \theta(\phi-\theta))\sigma_a^2$$

$$\gamma_0 - \phi^2\gamma_0 = -\phi\theta\sigma_a^2 + (1 - \theta\phi + \theta^2)\sigma_a^2$$

$$\gamma_0 = \frac{(1- 2\theta\phi + \epsilon^2)\sigma_a^2}{1-\phi^2}$$