BAB II

MODEL POLINOMIAL DAN METODA KUADRAT TERKECIL

Sering dijumpai persoalan yang melibatkan dua atau lebih peubah yang ada dan diduga ada dalam suatu hubungan tertentu. Bentuk hubungan ini dikenal dengan nama regresi untuk suatu peubah atas peubah yang lainnya. Hubungan ini biasanya dinyatakan dalam persamaan matematis yang bentuknya bisa linier atau non linier.

2.1 Model Polinomial

Didalam sistem dengan komponen kuantitas yang berubah-ubah, sangat menarik untuk melihat pengaruh yang ditimbulkan oleh sebagian peubah atau variabel terhadap peubah yang lainnya. Mungkin saja memang ada suatu hubungan fungsional yang sederhana antara peubah-peubah. Yang lebih sering adalah adanya suatu hubungan fungsional yang terlalu rumit untuk ditangkap atau dijelaskan secara sederhana. Dalam hal yang demikian, mungkin ingin menghampiri hubungan fungsional ini dengan suatu fungsi matematis yang sederhana. Misalnya suatu polinomial yang mengandung peubah-peubah yang layak dan menghampiri fungsi yang sebenarnya dalam kisaran terbatas peubah-peubah tadi. Dengan mempelajari fungsi semacam ini, mungkin dapat memperoleh informasi yang lebih banyak tentang hubungan sebenarnya dan dapat memperhitungkan pengaruh secara terpisah dan bersama yang dihasilkan oleh perubahan –perubahan pada peubah-peubah penting tertentu.

Persamaan polinomial secara umum dengan derajatnya m yaitu :

$$\eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^{q}\beta_i x_i + \sum_{i \le j}^{q}\beta_{ij} + \sum_{i \le j \le k}^{q} \beta_{ijk} x_i x_j x_k + \cdots \qquad (2.1.1)$$

Model polinomial untuk subyek yang terbatasi yaitu $x_1+x_2+ \ldots +x_q=1$ yaitu model polinomial{q,m}. Untuk mendapatkan model polinomial yang dibentuk dari kumpulan data dalam Latice Simplex{q,m} dapat diuraikan seperti berikut ini.

Untuk mendapatkan model polinomial{q,1}, terlebih dahulu harus ditentukan persamaan polinomial secara umum dengan derajatnya yaitu dalam hal ini m=1. Maka persamaan polinomial secara umum dengan derajat m=1 dan terdiri dari q variabel yaitu :

$$\eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^{q}\beta_i x_i$$

kemudian kalikan β_0 dengan $\sum_{i=1}^{q} x_i = 1$ kedalam persamaan dengan proses sebagai berikut :

$$\eta = \beta_0\left(\sum_{i=1}^{q} x_i\right) + \sum_{i=1}^{q}\beta_i x_i$$
$$= \sum_{i=1}^{q}\beta_i^{*} x_i$$

dimana $\beta_i^{*}=\beta_0+\beta_i$. Apabila dituliskan $\beta_i^{*}=\beta_i$, maka model polinomial{q,1} yaitu

$$y = \sum_{i=1}^{q}\beta_i x_i + \varepsilon \qquad \ldots(2.1.2)$$

Untuk mendapatkan model polinomial orde dua atau polinomial kuadratik dapat dicari seperti mendapatkan polinomial{q,1}. Pertama, tuliskan persamaan polinomial secara umum dengan terlebih dahulu ditentukan derajatnya yaitu m=2, yaitu :

$$\eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i x_i + \sum_{i \le j}^{q} \beta_{ij} x_i x_j$$

Untuk i=j, maka persamaan akan menjadi :

$$\eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i x_i + \sum_{i=j}^{q} \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j}^{q} \beta_{ij} x_i x_j$$

Kemudian substitusikan $x_i^2 = x_i\left(1 - \sum_{j=1, j\neq i}^{q} x_j\right)$ dan kalikan β_0 dengan $\sum_{i=1}^{q} x_i$ ke dalam persamaan polinomial orde dua dalam bentuk umum dengan q variabel, dengan $\sum_{i=1}^{q} x_i = 1$, maka persamaan akan menjadi :

$$\begin{aligned}
\eta &= \beta_0 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i x_i + \sum_{i \le j}^{q} \beta_{ij} x_i x_j \\
&= \beta_0 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i x_i + \sum_{i=j}^{q} \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j}^{q} \beta_{ij} x_i x_j \\
&= \beta_0\left(\sum_{i=1}^{q} x_i\right) + \sum_{i=1}^{q} \beta_i x_i + \sum_{i=j}^{q} \beta_{ii} x_i \left(1 - \sum_{j=1, i\neq j}^{q} x_j\right) + \sum_{i}^{q}\sum_{<j}^{q} \beta_{ij} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{q} (\beta_0 + \beta_i + \beta_{ii}) x_i - \sum_{i=1}^{q} \beta_{ii} x_i \sum_{j=1, i\neq j}^{q} x_j + \sum_{i<j}^{q} \beta_{ij} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{q} \beta_i^{*} x_i + \sum_{i<j}^{q} \beta_{ij}^{*} x_i x_j
\end{aligned}$$

dimana :

$$\beta_i^* = \beta_0 + \beta_i + \beta_{ii}$$
$$\beta_{ij}^* = \beta_{ij} - \beta_{ii} - \beta_{jj}$$

Kalau dituliskan $\beta_i^* = \beta_i$ dan $\beta_{ij}^* = \beta_{ij}$ maka model polinomial{q,2} yang digunakan untuk pembentukan model kuadratik untuk subyek yang terbatasi adalah

$$y = \sum_{i=1}^{q} \beta_i x_i + \sum_{i<j}^{q} \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon \qquad \ldots(2.1.3)$$

dimana : y = vektor nx1 dari observasi

x = matriks nxq dari komponen mixture

β = vektor nx1 dari parameter model

ε = vektor nx1 dari error random

i,j= 1,2, ... , q

q = banyaknya komponen mixture.

2.2 Metoda Kuadrat Terkecil dari Model Polinomial{q,2}

Diberikan suatu tabel harga $x_1, x_2, \ldots, x_q$ dan suatu harga lain $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Misalkan x_{ui} menyatakan observasi ke u untuk komponen x ke i. Data tersebut akan muncul seperti berikut ini :

y_u	x_1	x_2	$\cdots$	x_q
y_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1q}
y_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2q}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
y_u	x_{u1}	x_{u2}	$\cdots$	x_{uq}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
y_n	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{nq}

Selanjutnya, misalkan setelah mengamati data disimpulkan bahwa y muncul sebagai polinomial dalam x dan berderajat m. Metoda kuadrat terkecil dapat digunakan untuk mengestimasi parameter model polinomial. Metoda kuadrat terkecil adalah suatu metoda untuk menghitung nilai parameter model, sebagai perkiraan sedemikian sehingga jumlah kesalahan kuadrat memiliki nilai terkecil. Untuk model polinomial{q,2} dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$y_u = \sum_{i=1}^{q}\beta_i x_i + \sum_{i<j}^{q}\beta_{ij}x_i x_j + \varepsilon_u$$

$$\varepsilon_u = y_u - \sum_{i=1}^{q}\beta_i x_i - \sum_{i<j}^{q}\beta_{ij}x_i x_j$$

$$\sum_{u=1}^{n}\varepsilon_u^2 = \sum_{u=1}^{n}(y_u - \sum_{i=1}^{q}\beta_i x_i - \sum_{i<j}^{q}\beta_{ij}x_i x_j)^2$$

dengan ε diasumsikan $E(\varepsilon)=0$, $V(\varepsilon)=\sigma^2$ dan ε_u adalah variabel yang saling bebas.

Parameter β harus diestimasi berdasarkan data hasil pengamatan dengan menggunakan metoda kuadrat terkecil. Caranya adalah dengan membuat turunan parsial dari jumlah kesalahan kuadrat terhadap parameter yang dicari dan menyamakannya dengan nol.

Misalkan fungsi kuadrat terkecil $\sum_{u=1}^{n}\varepsilon_u^2 = \phi$, kemudian diminimumkan terhadap $\beta_i,\ldots,\beta_{ij}$.

$$\phi = \sum_{u=1}^{n}\left(y_u - \sum_{i=1}^{q}\beta_i x_i - \sum_{i<j}^{q}\beta_{ij} x_i x_j\right)^2 \qquad \ldots(2.2.1)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\beta_i} = -2\sum_{u=1}^{n}\left(y_u - \sum_{i=1}^{q}\hat{\beta}_i x_i - \sum_{i<j}^{q}\hat{\beta}_{ij} x_i x_j\right)x_i = 0 \qquad \ldots(2.2.1\text{-a})$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\beta_{ij}} = -2\sum_{u=1}^{n}\left(y_u - \sum_{i=1}^{q}\hat{\beta}_i x_i - \sum_{i<j}^{q}\hat{\beta}_{ij} x_i x_j\right)x_i x_j = 0 \qquad \ldots(2.2.1\text{-b})$$

Penyederhanaan persamaan (2.2.1-a) dan persamaan (2.2.1-b), akan menghasilkan persamaan-persamaan normal kuadrat terkecil sebagai berikut :

$$\hat{\beta}_1 \sum x_1^2 \quad + \cdots + \hat{\beta}_q \sum x_1 x_q \quad + \hat{\beta}_{12} \sum x_1^2 x_2 \quad + \cdots + \hat{\beta}_{q-1\,q} \sum x_1 x_{q-1} x_q \quad = \sum x_1 y$$

$$\vdots$$

$$\hat{\beta}_1 \sum x_1 x_q \quad + \cdots + \hat{\beta}_q \sum x_q^2 \quad + \hat{\beta}_{12} \sum x_1 x_2 x_q \quad + \cdots + \hat{\beta}_{q-1\,q} \sum x_{q-1} x_q^2 \quad = \sum x_q y$$

$$\hat{\beta}_1 \sum x_1^2 x_2 \quad + \cdots + \hat{\beta}_q \sum x_1 x_2 x_q \quad + \hat{\beta}_{12} \sum x_1^2 x_2^2 \quad + \cdots + \hat{\beta}_{q-1\,q} \sum x_1 x_2 x_{q-1} x_q = \sum x_1 x_2 y$$

$$\vdots$$

$$\hat{\beta}_1 \sum x_1 x_{q-1} x_q \quad + \cdots + \hat{\beta}_q \sum x_{q-1} x_q^2 + \hat{\beta}_{12} \sum x_1 x_2 x_{q-1} x_q + \cdots + \hat{\beta}_{q-1\,q} \sum x_{q-1}^2 x_q^2 \quad = \sum x_{q-1} x_q y$$

Penyelesaian persamaan normal menjadi estimator-estimator kuadrat terkecil dari parameter kuadrat regresi $\beta_i, \ldots, \beta_{ij}$ akan menjadi sederhana jika menggunakan formulasi matriks. Persamaan normal kuadrat terkecil ditulis dalam formulasi matriks seperti berikut ini.

$$\begin{bmatrix} \sum x_1^2 & \cdots & \sum x_1 x_q & \sum x_1^2 x_2 & \cdots & \sum x_1 x_{q-1} x_q \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_1 x_q & \cdots & \sum x_q^2 & \sum x_1 x_2 x_q & \cdots & \sum x_{q-1} x_q^2 \\ \sum x_1^2 x_2 & \cdots & \sum x_1 x_2 x_q & \sum x_1^2 x_2^2 & \cdots & \sum x_1 x_2 x_{q-1} x_q \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_1 x_{q-1} x_q & \cdots & \sum x_{q-1} x_q^2 & \sum x_1 x_2 x_{q-1} x_q & \cdots & \sum x_{q-1}^2 x_q^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_q \\ \hat{\beta}_{12} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{q-1\,q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_1 y \\ \vdots \\ \sum x_q y \\ \sum x_1 x_2 y \\ \vdots \\ \sum x_{q-1} x_q y \end{bmatrix}$$

$$(x'x) \cdot \hat{\beta} = x'y$$

$$\hat{\beta} = (x'x)^{-1} \cdot (x'y)$$

dimana x' = matriks transpos.

x^{-1} = matriks invers.

2.3 Uji Ketergantungan Model

Hipotesis pada dasarnya merupakan suatu proposisi atau anggapan yang mungkin benar, dan sering digunakan sebagai dasar pembuat keputusan atau untuk dasar penelitian yang lebih lanjut. Anggapan atau asumsi sebagai suatu hipotesis juga merupakan data, akan tetapi karena kemungkinan bisa salah, apabila akan digunakan sebagai dasar pembuat keputusan harus diuji terlebih dahulu dengan menggunakan data hasil observasi.

Untuk dapat diuji, suatu hipotesis haruslah dinyatakan secara kuantitatif(dalam bentuk angka). Hipotesis statistik adalah suatu pernyataan tentang bentuk fungsi suatu variabel atau tentang nilai sebenarnya suatu parameter.

Agar hipotesis dapat diuji secara statistik, harus dirumuskan menjadi hipotesis nol atau H_0 dan hipotesis alternatif atau H_1. Untuk mengetahui apakah respon(y) tergantung pada variabel bebas(x) pada model polinomial dibuatlah hipotesis sebagai berikut,

$H_0:\beta_i=\beta_{ij}=0$ (tidak ada pengaruh variabel bebas pada respon)

$H_1:\beta_i=\beta_{ij}\neq 0$ (ada pengaruh variabel bebas pada respon).

H_0 adalah hipotesis yang akan diuji dan disertai dengan H_1, H_1 akan secara otomatis diterima jika H_0 ditolak. Dalam pengujian hipotesis digunakan statistik uji F dengan terlebih dahulu ditentukan tingkat nyata α .

Jika terdapat p perbedaan variabel bebas yang dipilih semuanya dalam pembentukan model polinomial, maka jumlah kuadrat regresi atau

$JKR = \sum_{u=1}^{n} (\hat{y}_u - \bar{y})^2$ mempunyai derajat kebebasan atau dk yaitu p-1 dan jumlah kuadrat error atau $JKE = \sum_{u=1}^{n} (y_u - \hat{y}_u)^2$ mempunyai derajat kebebasan yaitu n-p.

Analisa Varian

Sumber Variasi	Derajat Kebebasan	Jumlah Kuadrat	Rata-Rata Kuadrat
Regresi	p-1	$\sum_{u=1}^{n} (\hat{y}_u - \bar{y})^2$	$JKR/_{p-1}$
Error	n-p	$\sum_{u=1}^{n} (y_u - \hat{y}_u)^2$	$JKE/_{n-p}$
Total	n-1	$\sum_{u=1}^{n} (y_u - \bar{y})^2$	

Jika derajat kebebasan untuk JKR dan JKE dijumlahkan, menjadi n-1 sehingga $JKR/_{\sigma^2} \sim \chi^2_{p-1}$ dan $JKE/_{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-p}$ yang saling bebas. Selanjutnya dengan hipotesis nol, statistik ujinya :

$F_0 = \frac{JKR/(p-1)}{JKE/(n-p)} = \frac{RKR}{RKE}$ mengikuti distribusi $F_{(p-1,\ n-p,\ \alpha)}$ dan merupakan sebuah pengujian statistik yang cocok untuk hipotesis nol, dengan :

$H_0: \beta_i = \beta_{ij} = 0$

$H_1: \beta_i = \beta_{ij} \neq 0$

Kemudian bandingkan antara F_0 dengan $F_{(p-1,\ n-p,\ \alpha)}$ untuk menguji hipotesis nol yang kriterianya adalah, tolak H_0 jika $F_0 > F_{(p-1,\ n-p,\ \alpha)}$ dan menerima H_0 jika sebaliknya.