BAB III

SISTEM PENGENDALIAN UMPAN BALIK

3.1 Sistem Pengendalian Umpan Balik

Dimasa sekarang ini, arti kata *"sistem"* seringkali menjadi rancu dan kurang jelas artinya. Sehingga perlu diberikan definisi yang jelas tentang kata sistem yang dipakai pada penulisan ini.

Definisi 3.1.1

Sistem adalah susunan komponen-komponen fisik yang dihubungkan atau berhubungan sedemikian rupa sehingga membentuk suatu kesatuan keseluruhan.

Definisi 3.1.2

Sistem Pengendalian adalah susunan komponen-komponen fisik yang dihubungkan sedemikian rupa sehingga memerintah, mengarahkan atau mengatur diri sendiri atau sistem lain.

Sebelum mendefinisikan tentang sistem pengendalian umpan balik perlu diketahui terlebih dahulu tentang masukan dan keluaran suatu sistem pengendalian.

Definisi 3.1.3

Masukan atau input adalah rangsangan atau perangsangan yang diterapkan kesebuah sistem pengendalian dari sumber energi luar, agar menghasilkan tanggapan tertentu dari sistem pengendalian itu.

Definisi 3.1.4

Keluaran atau output adalah tanggapan sebenarnya yang diperoleh dari sebuah sistem pengendalian. Tanggapan ini bisa sama dengan tanggapan yang ada dalam masukan atau bisa juga tidak sama dengan tanggapan yang ada dalam masukan.

Sistem pengendalian digolongkan dalam dua katagori umum yaitu Sistem Untaian Terbuka dan Sistem Untaian Tertutup. Perbedaannya ditentukan oleh tindakan pengendalian yaitu bertanggung jawab menggerakkan sistem untuk menghasilkan keluarannya.

Definisi 3.1.5

Sistem Pengendalian Untaian Terbuka adalah suatu sistem yang tindakan pengendaliannya bebas dari keluaran.

Contoh 8

Alat pemanggang roti otomatis adalah sistem pengendalian untaian terbuka karena dikendalikan oleh sebuah pengatur waktu. Waktu yang diperkirakan untuk membuat "panggangan bagus" harus diperkirakan oleh pemakainya, yang bukan merupakan bagian dari sistem itu. Pengendalian atas mutu panggangan (keluaran) adalah penghentian alat pada saat waktu yang telah disetel untuk masukan dan tindakan pengendaliannya.

Definisi 3.1.6

Sistem Pengendalian Untaian Tertutup adalah suatu sistem yang tindakan pengendaliannya bergantung pada keluaran.

Contoh 9

Mekanisme autopilot dan pesawat terbang yang dikendalikannya adalah sistem pengendalian untaian tertutup. Tujuannya adalah mempertahankan arah pesawat yang telah ditetapkan tanpa terpengaruh oleh perubahan-perubahan atmosfir. Alat ini melakukan tugas itu dengan terus menerus mengukur arah pesawat yang sesungguhnya dan secara otomatis menyetel sayap-sayap pesawat pengendalian itu (kemudi, sirip, dst) agar arah pesawat yang sesungguhnya dapat dibuat sesuai dengan arah yang telah ditentukan. Seorang pilot atau operator yang sebelumnya menyetel autopilot ini, bukan merupakan bagian dari sistem pengendalian tersebut.

Umpan balik merupakan ciri khas dari sistem pengendalian untaian tertutup yang membedakannya dengan sistem pengendalian untaian terbuka.

Definisi 3.1.7

Umpan balik adalah ciri khas dari sistem pengendalian untaian tertutup yang memungkinkan keluarannya dapat dibandingkan dengan masukan sistem itu sedemikian rupa agar tindakan pengendalian yang tepat sebagai fungsi dari keluaran dan masukan bisa terjadi.

Sehingga sistem pengendalian umpan balik merupakan sistem pengendalian yang cenderung menjaga hubungan yang telah ditentukan antara keluaran dan masukan dengan membandingkannya dan menggunakan selisihnya sebagai alat pengontrol.

Adanya umpan balik pada suatu sistem pengendalian menimbulkan beberapa sifat penting, diantaranya menimbulkan kecenderungan untuk menuju kearah osilasi atau ketidakstabilan, sehingga sangat penting untuk mengetahui apakah suatu sistem umpan balik tersebut stabil atau tidak stabil.

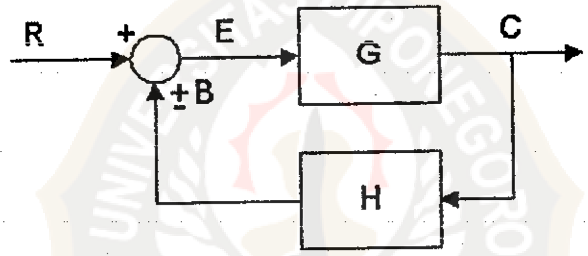
Contoh 10

Konsep umpan balik seperti yang digambarkan pada mekanisme autopilot pada contoh 9. Masukannya adalah arah tertentu yang bisa disetel pada suatu alat penunjuk dalam panel pengendalian pesawat dan keluarannya adalah arah yang sesungguhnya, sebagamana ditunjuk oleh instrumen-instrumen navigasi automatik. Sebuah piranti pembanding senantiasa mengamati masukan dan keluarannya. Bila keduanya sama, tidak diperlukan tindakan pengendalian. Bila ada perbedaan antara masukan dan keluaran, piranti pembanding tersebut menyalurkan suatu isyarat tindakan pengendalian ke pengendalinya yaitu mekanisme autopilot.

Pengendalinya memberi isyarat-isyarat yang tepat ke sayap-sayap pesawat itu untuk memperkecil perbedaan masukan dan keluaran.

3.2 Diagram Blok Sistem Pengendalian Umpan Balik

Konfigurasi dasar dari suatu sistem pengendalian umpan balik sederhana digambarkan dalam diagram blok berikut ini :



Gambar (5)

Definisi-definisi berikut dihubungkan dengan diagram blok diatas :

Definisi 3.2.1

R = masukan acuan

E = isyarat penggerak

B = isyarat umpan balik primer

C = keluaran terkendali

G = fungsi alih langsung = fungsi alih maju.

H = fungsi umpan balik.

GH = fungsi alih untaian terbuka.

$\frac{C}{R}$ = fungsi alih untaian tertutup.

Keterangan

Diberikan x(t) sebagai suatu masukan pada suatu sistem pengendalian umpan balik . Pada sistem pengendalian (dalam blok) x(t) diolah oleh suatu fungsi alih G(s) dimana fungsi alih G(s) ini dibentuk dari suatu sistem pengendalian linier dengan bentuk persamaan differensial linier $\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i x}{dt^i}$ yang dengan menggunakan transformasi laplace dan dengan mengabaikan harga-harga awal didapatkan fungsi alih G(s).(Tentang pembentukan fungsi alih akan dibahas lebih rinci pada sub bab 3.3). Kemudian fungsi alih ini mengolah x(t) sampai menghasilkan y(t) sebagai keluaran (C) yang sesuai dengan masukan, bila keluaran yang dihasilkan belum sesuai dengan masukan, keluaran ini akan kembali melewati suatu fungsi alih H(s) yang mengolah keluaran ini menjadi masukan kembali, yang kemudian diolah lagi oleh fungsi alih G(s) sampai menghasilkan keluaran yang sesuai dengan masukan.

Sifat 1 :

Fungsi alih untaian tertutup $\frac{C}{R}$ dapat ditentukan dari hubungan

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm GH} \qquad \text{.............(7)}$$

dengan G adalah fungsi alih maju dan GH adalah fungsi alih untaian terbuka .

Tanda + menyatakan sistem umpan balik negatif dan tanda - menyatakan sistem umpan balik positif.

Sistem pengendalian umpan balik yang akan dibahas pada pembahasan-pembahasan selanjutnya akan dibatasi pada sistem pengendalian umpan balik negatif.

Sifat 2 :

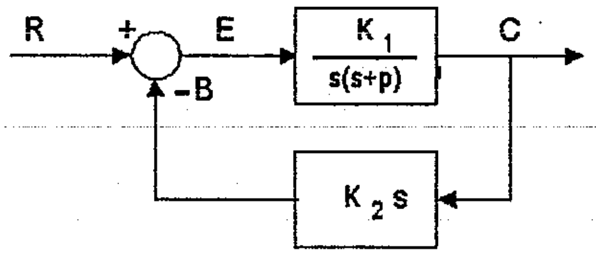
Persamaan karakteristik sistem yang ditentukan dari $1 \pm GH = 0$ adalah

$$D_{GH} \pm N_{GH} = 0 \qquad \text{.............(8)}$$

dimana D_{GH} adalah penyebut dan N_{GH} adalah pembilang dari fungsi alih untaian terbuka GH.

Contoh 11

Diketahui sebuah sistem yang didefinisikan oleh diagram blok sebagai berikut :



Maka,

a. Dari diagram blok diketahui $G = \dfrac{K_1}{s(s+p)}$ dan $H = K_2 s$ maka fungsi alih untaian terbukanya adalah :

$$GH = \left[\frac{K_1}{s(s+p)}\right]K_2 s = \frac{K_1K_2}{s+p}$$

b. Fungsi alih untaian tertutupnya berdasarkan sifat 1 adalah

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH} = \frac{K_1/s(s+p)}{1+K_1K_2/s+p} = \frac{K_1}{s(s+p+K_1K_2)}$$

c. Karena $GH = \dfrac{K_1K_2}{s+p}$ maka berdasarkan sifat 2 didapat ,

$D_{GH} = s+p$ dan $N_{GH} = K_1K_2$ sehingga persamaan karakteristiknya

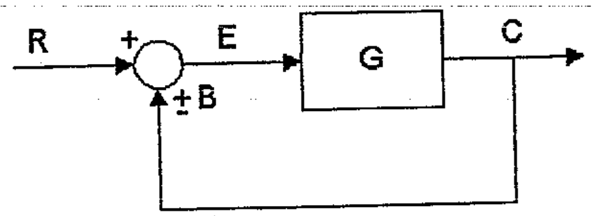
$D_{GH} + N_{GH} = s+p+K_1K_2 = 0$

Jika pada konfigurasi sistem pengendalian umpan balik diambil $H = 1$ maka sistemnya disebut sistem pengendalian umpan balik satuan.

Definisi 3.3.2

Sistem pengendalian umpan balik satuan adalah sebuah sistem pengendalian umpan balik dengan umpan balik primer b sama dengan keluaran terkendali c.

Diagram bloknya sebagai berikut :



Berdasarkan sifat 2 dari bentuk kanonik sistem pengendalian umpan balik satuan ditentukan oleh $1 \pm G = 0$ yaitu $D_G \pm N_G = 0$ dengan D_G merupakan penyebut dan N_G merupakan pembilang dari G.

3.3 Fungsi Alih

Dalam sistem pengendalian umpan balik , masukan dan keluarannya merupakan fungsi dari variabel waktu. Akan tetapi variabel waktu ini tidak memberikan pengaruh secara langsung pada tindakan pengendaliannya. Jadi sistem pengendalian umpan balik merupakan sistem yang tidak berubah waktu.

Jenis sistem pengendalian umpan balik ada bermacam-macam , diantaranya sistem pengendalian umpan balik linier dan sistem pengendalian umpan balik non linier. Disini penulis akan membatasi pembahasan hanya pada sistem pengendalian umpan balik linier.

Definisi 3.3.1

Sistem pengendalian umpan balik linier adalah sistem yang dapat dilukiskan sebagai suatu persamaan differensial linier .

Disini diambil sistem pengendalian umpan balik linier yang mempunyai bentuk persamaan differensial sebagai berikut:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i x}{dt^i} \qquad ....(9)$$

dengan $y = y(t)$ adalah keluaran sistem dan $x = x(t)$ adalah masukan sistem, $m \leq n$, koefisien-koefisien a_i dan b_i ($i = 0, 1, ..., n$) merupakan konstanta.

Syarat-syarat awal untuk persamaan ini ditulis sebagai :

$$y_0^k = \left.\frac{d^k y}{dt^k}\right|_{t=0^+} \quad \text{dan} \quad x_0^k = \left.\frac{d^k x}{dt^k}\right|_{t=0^+}, \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

dengan x_0^k dan y_0^k merupakan konstanta.

Transformasi Laplace dari turunan $\frac{d^i y}{dt^i}$ adalah :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i y}{dt^i}\right] = s^i Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} y_0^k \quad \text{untuk} \quad i > 0 \qquad \text{................ (10)}$$

dengan $Y(s) = \mathcal{L}[\,y(t)]$ dan $y_0^k = \left.\frac{d^k y}{dt^k}\right|_{t=0^+}$

demikian juga , transformasi laplace dari $\frac{d^i x}{dt^i}$ adalah :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i x}{dt^i}\right] = s^i X(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} x_0^k \quad \text{untuk} \quad i > 0 \qquad \text{..................(11)}$$

dengan $X(s) = \mathcal{L}[\,x(t)]$ dan $x_0^k = \left.\frac{d^k x}{dt^k}\right|_{t=0^+}$

Transformasi Laplace dari persamaan (9) adalah :

$$\sum_{i=0}^{n}\left[a_i\left(s^i\, Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k}\, y_0^k\right)\right] = \sum_{i=0}^{m}\left[b_i\left(s^i\, X(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k}\, x_0^k\right)\right] \text{........ (12)}$$

maka ,

$$Y(s) = \left[\frac{\sum_{l=0}^{m} b_l s^l}{\sum_{l=0}^{n} a_l s^l}\right] X(s) - \frac{\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{l-1} b_l s^{l-1-k} x_0^{\,k}}{\sum_{l=0}^{n} a_l s^l} + \frac{\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{l-1} a_l s^{l-1-k} y_0^{\,k}}{\sum_{l=0}^{n} a_l s^l} \quad \text{.......... (13)}$$

Jadi penyelesaian umum dari persamaan (9) adalah :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{l=0}^{m} b_l s^l}{\sum_{l=0}^{n} a_l s^l} X(s) - \frac{\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{l-1} b_l s^{l-1-k} x_0^{\,k}}{\sum_{l=0}^{n} a_l s^l}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{l-1} a_l s^{l-1-k} y_0^{\,k}}{\sum_{l=0}^{n} a_l s^l}\right]$$

.............(14)

Jika suku-suku yang berasal dari semua harga awal , yaitu x_0^k dan y_0^k dikumpulkan bersama-sama, maka persamaan diatas dapat ditulis :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{\sum_{l=0}^{m} b_l s^l}{\sum_{l=0}^{n} a_l s^l}\right) X(s) + (\text{suku-suku yang berasal dari semua harga awal } x_0^{\,k}, y_0^{\,k})\right]$$

.............(15)

atau dengan notasi transformasi laplace sebagai :

$$Y(s) = \left[\left(\frac{\sum_{l=0}^{m} b_l s^l}{\sum_{l=0}^{n} a_l s^l}\right) X(s) + (\text{suku-suku yang berasal dari semua harga awal } x_0^{\,k}, y_0^{\,k})\right]$$

..............(16)

Definisi 3.3.2

Fungsi alih G(s) dari sebuah sistem adalah suatu faktor dari persamaan Y(s) yang dikalikan transformasi laplace masukan X(s).

Maka untuk sistem yang diuraikan diatas , fungsi alihnya adalah :

$$G(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i \Big/ \sum_{i=0}^{n} a_i s^i = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots\ldots\ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_0} \quad \ldots\ldots(17)$$

Sehingga transformasi laplace tanggapannya bisa ditulis sebagai :

Y(s) = G(s). X(s) + (suku-suku yang berasal dari harga awal x_0^k, y_0^k)

Jika besaran (suku-suku yang berasal dari harga awal x_0^k, y_0^k) adalah 0 maka transformasi laplace dari keluaran yang menanggapi sebuah masukan X(s) diberikan oleh :

$$Y(s) = G(s).\, X(s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

Karena bentuk dari transformasi laplace keluaran Y(s) merupakan perkalian aljabar dari G(s) dan X(s) (bila suku-suku yang berasal dari harga awal x_0^k, y_0^k adalah sama dengan 0) maka bentuk perkalian diatas bersifat komutatif yaitu :

$$Y(s) = G(s).\, X(s) = X(s)\,.\, G(s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

Sifat-sifat Fungsi Alih suatu sistem

1. Fungsi alih dari sebuah sistem adalah alih bentuk laplace dari tanggapan impulsnya, yaitu jika masukan kesebuah sistem dengan fungsi alih G(s) merupakan suatu impuls dan semua syarat-syarat awalnya 0, maka alih bentuk keluarannya adalah G(s) atau ,

   Y(s) = G(s) . X(s) , karena x(t) = δ(t) maka X(s) = $\mathcal{L}$ [δ(t)] = 1

   sehingga Y(s)= G(s) . 1 = G(s).

2. Fungsi alih sistem dapat ditentukan dari persamaan differensial sistem dengan mengambil alih bentuk laplace dan mengabaikan semua suku-suku yang berasal dari harga-harga awal, sehingga fungsi alih G(s) diberikan oleh :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \qquad \text{...............(20)}$$

Contoh 12

Diberikan sebuah sistem dengan masukan dan keluarannya dihubungkan oleh persamaan differensial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2\,y(t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt}$$

Transformasi laplace dari persamaan diatas dengan mengabaikan suku-suku yang berasal dari syarat awal, dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (12) yaitu :

$$\sum_{l=0}^{n}\left[a_l\left(s^lY(s)-\sum_{k=0}^{l-1}s^{l-1-k}y_0{}^k\right)\right] = \sum_{l=0}^{m}\left[b_l\left(s^lX(s)-\sum_{k=0}^{l-1}s^{l-1-k}x_0{}^k\right)\right]$$

$$s^2\,Y(s) + 3s\,Y(s) + 2\,Y(s) = X(s) + s\,X(s)$$

$$(s^2 + 3s + 2)\;Y(s) = (s+1)\;X(s)$$

$$Y(s) = \left[\frac{s+1}{s^2+3s+2}\right]X(s)$$

Sehingga fungsi alihnya : $G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{s+1}{s^2+3s+2}$

3. Persamaan differensial sistem dapat diperoleh dari fungsi alih dengan mengganti variabel s dengan operator differensial D yang didefinisikan oleh $D = \frac{d}{dt}$.

Contoh 13

Diberikan fungsi alih suatu sistem , $G(s) = \frac{2s+1}{s^2+s+1}$ maka bentuk persamaan differensial sistem ini adalah : $y = \left[\frac{2D+1}{D^2+D+1}\right]x$

atau $D^2y + Dy + y = 2Dx + x$ atau $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 2\frac{dx}{dt} + x$

4. Kestabilan sebuah sistem pengendalian umpan balik linier tak berubah waktu dapat ditentukan dari persamaan karakteristiknya yaitu penyebut dari fungsi alih sistem yang disamakan dengan 0. Jika semua akar penyebut mempunyai bagian nyata negatif, sistem itu stabil.

5. Akar-akar penyebut dari fungsi alih adalah kutub-kutub dari sistem dan akar-akar pembilang fungsi alih adalah nol-nol sistem. Selanjutnya fungsi alih sistem dapat diperinci sampai meliputi sebuah tetapan dengan menetapkan kutub-kutub dan nol-nol dari sistem tersebut. Tetapan ini disebut faktor gain (penguat) sistem (K).

Contoh 14

Diberikan fungsi alih $G(s) = \dfrac{K(s+a)}{(s+b)(s+c)}$

Dari fungsi alih tersebut dapat diperinci dengan memberikan letak tempat kedudukan nol di -a, letak-letak tempat kedudukan kutub di -b, -c, faktor gain K.

3.4 Kestabilan Sistem Pengendalian Umpan Balik

Hal terpenting dari adanya umpan balik pada suatu sistem pengendalian adalah adanya kecenderungan menuju osilasi atau ketidakstabilan, sehingga masalah utama dalam sistem pengendalian umpan balik adalah bagaimana menguji kestabilan sistem tersebut.

Definisi 3.4.1

Sistem pengendalian umpan balik linier adalah stabil jika setiap masukan terbatas menghasilkan keluaran terbatas.

Dengan kata lain , bila y(t) adalah keluaran dan x(t) adalah masukan dari sistem pengendalian umpan balik linier, dengan masukan-keluaran tunggal.

Jika $|x(t)| \leq N < \infty$ untuk $t \geq t_0$ ....(21)

maka $|y(t)| \leq M < \infty$ untuk $t \geq t_0$ ....(22)

dengan M dan N adalah bilangan riil.

Syarat kestabilan sistem pengendalian umpan balik dengan masukan terbatas-keluaran terbatas adalah bila akar-akar persamaan karakteristiknya terletak disebelah kiri bidang-s, maka sistem tersebut stabil.

Untuk menunjukkan hal tersebut , dengan menunjukkan hubungan masukan-keluaran dari sistem pengendalian umpan balik linier dengan integral konvolusi :

$$y(t) = \int_0^\infty x(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau \qquad ....(23)$$

dengan $g(\tau)$ adalah tanggapan denyut satuan dari sistem.

(Tentang tanggapan denyut satuan dan integral konvolusi lihat lampiran).

Dengan mengambil nilai mutlak dari kedua sisi, maka :

$$|\, y(t)\, | = \left| \int_0^\infty x(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau \right| \qquad ....(24)$$

Karena nilai mutlak integral tersebut tidak lebih dari integral nilai mutlaknya maka persamaan (24) bisa ditulis :

$$|\, y(t)\, | \le \int_0^\infty |x(t-\tau)|\, |g(\tau)|\, d\tau \qquad ....(25)$$

Jika x(t) adalah isyarat terbatas, maka dari persamaan (22) didapat :

$$|\, y(t)\, | \le \int_0^\infty N\, |\, g(\tau)\, |\, d\tau = N \int_0^\infty |g(\tau)|\, d\tau \qquad ....(26)$$

sehingga jika y(t) adalah keluaran terbatas maka :

$$N \int_0^\infty |\, g(\tau)\, |\, d\tau \le M < \infty \qquad ....(27)$$

atau $\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \leq P < \infty$ ....(28)

Sekarang akan ditunjukkan bahwa syarat pada tanggapan denyut untuk kestabilan dapat dihubungkan dengan akar-akar persamaan karakteristik.

Dengan fungsi alih G(s) dan tanggapan denyut g(t) serta dihubungkan dengan integral transformasi laplace

$$\mathcal{L}\,[\,g(t)\,] = G(s) = \int_0^{\infty} g(t)\, e^{-st}\, dt \qquad \text{.............(29)}$$

diambil nilai mutlak pada sisi kiri persamaan (29) diatas, diberikan :

$$|\,G(s)\,| \leq \int_0^{\infty} |g(t)|\,|e^{-st}|\, dt \qquad \text{...........(30)}$$

Jika s_0 adalah kutub-kutub G(s) maka $|\,G(s_0)\,| = \infty$.

Untuk $s_0 = \sigma + j\omega$,

maka $|\,e^{-s_0 t}\,| = |\,e^{-(\sigma+\omega)t}\,| = |\,e^{-\sigma t}\,|.\,|\cos \omega t + j \sin \omega t\,| = |\,e^{-\sigma t}\,|$

sehingga persamaan (30) menjadi :

$$\infty \leq \int_0^{\infty} |g(t)|\,|e^{-\sigma t}|\, dt \qquad \text{.............(31)}$$

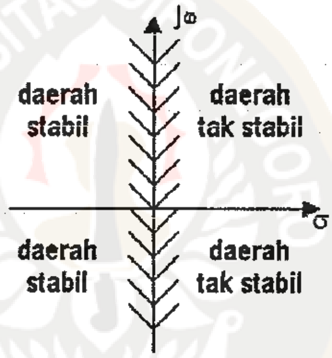
Jika satu atau lebih akar-akar persamaan karakteristik berada disebelah kanan atau pada sumbu khayal bidang-s, $\sigma \geq 0$ sehingga $|\,e^{-\sigma t}\,| \leq N = 1$ sehingga persamaan (31) menjadi :

$$\infty \leq \int_0^{\infty} N\,|g(t)|\, dt = \int_0^{\infty} |g(t)|\, dt \qquad \text{.............(32)}$$

untuk $Re(s) = \sigma \geq 0$

Karena persamaan (32) kontradiksi dengan persyaratan kestabilan yang diberikan pada persamaan (28), maka untuk sistem yang stabil, akar-akar persamaan karakteristik semuanya berada pada sebelah kiri bidang-s.

Daerah kestabilan dan ketidakstabilan digambarkan pada gambar berikut ini, dengan sumbu khayal (sumbu $j\omega$) termasuk titik asal , termasuk pada daerah tak stabil.



Gambar (6)