BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1 Variabel Komplek

Definisi 2.1.1

Variabel komplek s dinyatakan dalam bentuk :

$s = \sigma + j\omega = Re(s) + j\ Im(s)$ dengan σ dan ω merupakan variabel-variabel riil dan $j = \sqrt{-1}$.

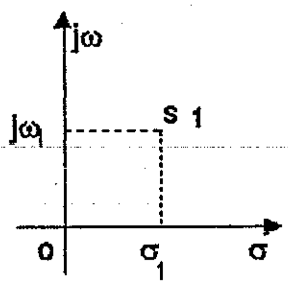
$Re(s) = \sigma$ menyatakan bagian riil dan $Im(s) = \omega$ menyatakan bagian imaginer dari variabel komplek s.

Definisi 2.1.2

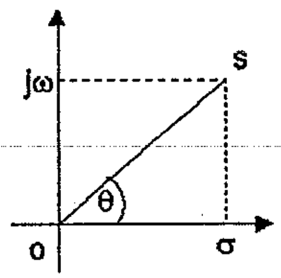
Modulus atau harga mutlak suatu variabel komplek $s = \sigma + j\omega$ dengan

$j = \sqrt{-1}$ ditulis $|s|$ diberikan oleh $|s| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ selalu positif atau 0.

Suatu variabel komplek $s = \sigma + j\omega$, $j = \sqrt{-1}$ dapat dinyatakan dengan suatu titik pada bidang komplek atau disebut **bidang-s.**



Gambar 2



Gambar 3

Gambar 2 melukiskan bidang-s dan suatu titik $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$, $j = \sqrt{-1}$, dan gambar 3 melukiskan bidang-s dengan koordinat polar dimana letak setiap titik pada bidang datarnya ditentukan secara tunggal oleh dua koordinat kutub σ dan θ. σ menyatakan besarnya s yang merupakan panjang vektor os dan θ merupakan sudut yang terbentuk antara sumbu riil σ dan vektor os, dimana putaran yang berlawanan arah dengan jarum jam menyatakan sudut positif dan yang searah dengan jarum jam menyatakan sudut negatif.

σ dapat dinyatakan sebagai modulus s atau $\sigma = |s| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ dan $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\omega}{\sigma}$ atau $\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{\omega}{\sigma}\right)$.

Definisi 2.1.3

Sudut θ disebut argumen s , ditulis :

$$\theta = \arg s = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$$

Sifat argumen :

1. $\arg(s_1.s_2) = \arg s_1 + \arg s_2$ ....(1)

2. $\arg\left(\dfrac{s_1}{s_2}\right) = \arg s_1 - \arg s_2$ ....(2)

2.2 Transformasi Laplace dan Transformasi Laplace Invers

Definisi 2.2.1

Misal f(t) adalah fungsi riil dari suatu variabel riil t yang didefinisikan untuk

$t > 0$ maka :

$$\mathcal{L}[\,f(t)\,] = F(s) = \lim_{\substack{T \to \infty \\ \epsilon \to 0}} \int_{\epsilon}^{T} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{0^+}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \quad \text{dengan} \quad 0 < \epsilon < T \qquad \text{........(3)}$$

disebut transformasi Laplace dari f(t) dengan s suatu variabel komplek dan variabel t menyatakan waktu.

Contoh 1

Transformasi Laplace dari e^{-t} adalah :

$$\mathcal{L}[\,e^{-t}\,] = \int_{0^+}^{\infty} e^{-t}\, e^{-st}\, dt = \frac{-1}{(s+1)}\, e^{-(s+1)t} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{s+1}$$

Definisi 2.2.2

Jika transformasi laplace suatu fungsi f(t) adalah F(s) yaitu jika $\mathcal{L}[\,f(t)\,] = F(s)$ maka f(t) disebut suatu transformasi laplace invers dari F(s) dan secara simbolis ditulis :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\,F(s)\,] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds$$

Contoh 2

Dari contoh 1 maka $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = e^{-t}$.

Berikut ini diberikan sebuah tabel sederhana yang memuat contoh beberapa fungsi dan bentuk transformasi Laplacenya.

Tabel 01

Fungsi Waktu		Transformasi Laplace
Impuls satuan	$\delta(t)$	1
Tangga satuan	$U(t) = 1$	$\frac{1}{s}$
Polinom	t^{n}	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
Pangkat	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Turunan	$\frac{d^iy}{dt^i}$	$s^iY(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k}y_0^{k}$

Catatan : Tabel ini diambil dari buku Feedback and Control System, Joseph,I.D, halaman 60

2.3 Peta Kutub-Nol pada Bidang Komplek

Diberikan fungsi rasional :

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} \qquad \text{................(4)}$$

dengan $n \geq m$, koefisien-koefisien a_0, ..., a_n, b_0, b_1,....., b_n merupakan konstanta riil.

Fungsi rasional F(s) dapat ditulis kembali sebagai :

$$F(s) = \frac{b_m \sum_{i=0}^{m} \frac{b_i}{b_m} s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m} (s + z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s + p_i)} \qquad \text{...............(5)}$$

dengan suku-suku $s+z_i$ merupakan faktor-faktor dari polinom pembilang dan suku-suku $s+p_i$ merupakan faktor-faktor dari polinom penyebut, dan s merupakan variabel komplek.

Definisi 2.3.1

Harga-harga variabel komplek s dimana $|F(s)|$ (harga mutlak dari F(s)) menjadi nol disebut nol-nol dari F(s) yaitu $s = -z_i$ untuk $i = 1, 2, ..., m$.

Definisi 2.3.2

Harga-harga variabel komplek s dimana $|F(s)|$ (harga mutlak dari F(s)) menjadi tak hingga disebut kutub-kutub dari F(s) yaitu $s = -p_i$ untuk $i = 1, 2, ..., n$.

Kutub-kutub dan nol-nol dari F(s) dapat berupa bilangan riil maupun bilangan komplek, bila kutub-kutub atau nol-nol dari F(s) berupa bilangan komplek ($s = \sigma + j\omega$) maka konjugate atau sekawannya ($s = \sigma - j\omega$) adalah juga merupakan kutub-kutub atau nol-nol dari F(s).

Contoh 3

Misal F(s) diberikan dengan :

$$F(s) = \frac{2s^2 - 2s - 4}{s^3 + 5s^2 + 8s + 6}$$

dapat ditulis $$F(s) = \frac{2(s+1)(s-2)}{(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$$

maka F(s) mempunyai nol-nol berhingga di s = -1 dan s = 2, F(s) mempunyai kutub-kutub berhingga di s = -3, s = -1-j dan s = -1+j.

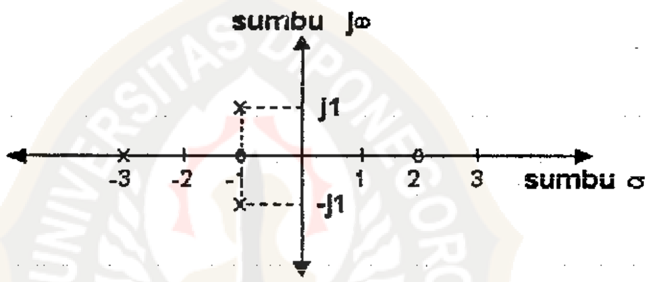
Definisi 2.3.3

Tempat sebuah kutub dibidang-s ditandai sebuah lambang (x) dan tempat sebuah nol dibidang-s ditandai oleh sebuah lambang lingkaran kecil (o). Bidang-s yang meliputi kutub-kutub dan nol-nol berhingga dari F(s) disebut Peta Kutub-Nol dari F(s).

Contoh 4

Fungsi rasional $F(s) = \dfrac{(s+1)(s-2)}{(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$ mempunyai kutub-kutub berhingga s = -3, s = -1-j dan s = -1+j serta mempunyai nol-nol berhingga s = -1 dan s = 2.

Peta kutub-nol dari F(s) diperlihatkan dalam gambar berikut :



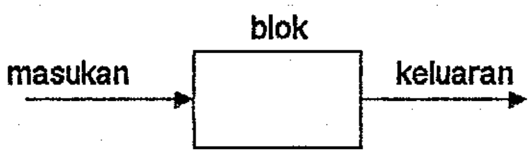
Gambar 4.

2.4 Diagram Blok

Diagram blok adalah suatu pernyataan gambar yang ringkas dari hubungan sebab dan akibat antara masukan dan keluaran dari suatu sistem fisis.

Diagram ini memberikan suatu cara untuk mencirikan hubungan- hubungan fungsional diantara berbagai komponen dari suatu sistem pengendalian.

Bentuk paling sederhana dari diagram blok adalah blok tunggal, dengan satu masukan dan satu keluaran.



Bagian sebelah dalam dari segiempat yang menyatakan blok tersebut berisi uraian atau nama elemennya, atau simbol untuk operasi matematis yang harus dilakukan pada masukan untuk menghasilkan keluaran. Tanda panah menyatakan arah informasi atau aliran isyarat.

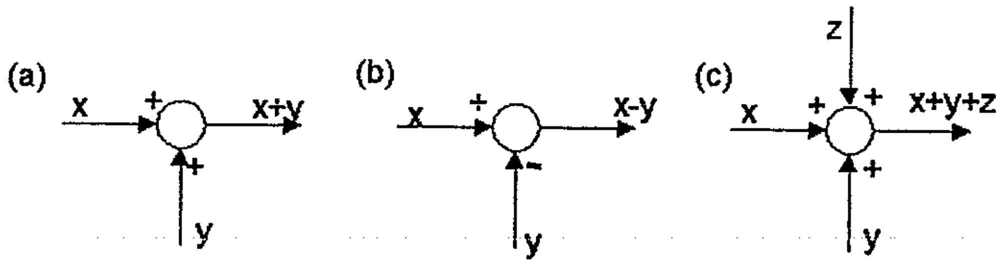
Contoh 5

(a)

(b)

Untuk operasi penjumlahan dan pengurangan digunakan bentuk khusus yaitu blok berubah menjadi lingkaran kecil yang disebut titik jumlahan, yang diengkapi dengan tanda tambah (+) dan kurang (-) serta anak panah masuk kelingkaran. Keluarannya adalah jumlahan aljabar dari masukan.

Contoh 6



2.5 Susunan Routh

Suatu persamaan karakteristik dapat ditulis dalam bentuk umum sebagai :

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

dengan a_0 , a_1 , ... , a_n adalah koefisien persamaan karakteristik.

Bentuk susunan Routh dari persamaan karakteristik diatas adalah :

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots\ldots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots\ldots \\ \ldots & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots\ldots \\ \ldots & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

dimana

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad , \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \text{ dan}$$

seterusnya.

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1} \quad , \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1} \text{ dan}$$

seterusnya.

Contoh 7

Diberikan persamaan karateristik

$$s^5 + 3s^4 + 7s^3 + 20s^2 + 6s + 15 = 0$$

Bentuk susunan Routh dari persamaan karakteristik diatas adalah :

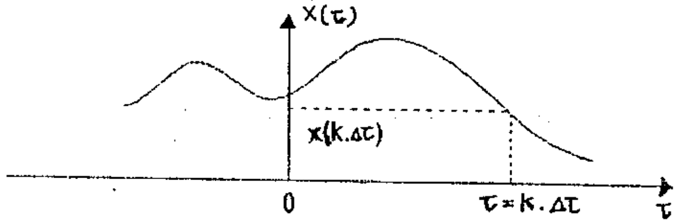
s^5	1	7	6
s^4	3	20	15
s^3	1/3	1	
s^2	11	15	
s^1	6/11		
s^0	15		

2.6 Tanggapan Impuls Suatu Sistem Linier

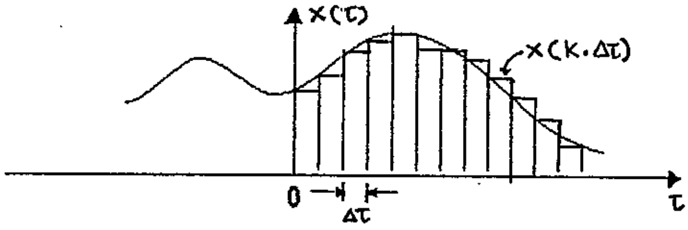
Tanggapan impuls suatu sistem linier didefinisikan sebagai tanggapan keluaran dari suatu sistem linier jika masukannya adalah suatu fungsi impuls satuan $\delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \left[\frac{U(t) - U(t - \Delta t)}{\Delta t}\right]$ dengan U(t) adalah fungsi tangga satuan.

Untuk suatu sistem dengan masukan tunggal x(t) dan keluaran tunggal y(t), jika $x(t) = \delta(t)$, keluaran y(t) didefinisikan sebagai tanggapan impuls dari sistem yang dinotasikan sebagai g(t).

Diberikan isyarat $x(\tau)$ (pada gambar L.1) sebagai masukan ke sistem linier, dengan $x(\tau)$ sebagai fungsi τ merupakan variabel waktu riil. $x(\tau)$ diasumsikan dari $-\infty$ sampai $+\infty$ dalam waktu.



Gambar L.1 : Isyarat masukan suatu sistem linier.



Gambar L.2 : Isyarat masukan yang ditunjukkan sebagai jumlahan denyut-denyut.

$x(\tau)$ dianggap sebagai suatu barisan denyut dari luasan denyut $\Delta\tau$ (ditunjukkan pada gambar L.2). Saat $\Delta\tau \rightarrow 0$, denyut-denyut menjadi impuls dan impuls tersebut pada waktu k. $\Delta\tau$ mempunyai kekuatan atau daerah sama dengan $\Delta\tau \,.\, x(k.\,\Delta\tau)$, yang merupakan daerah denyut pada saat k. $\Delta\tau$.

Sekarang akan dihitung tanggapan keluaran sistem linier dengan menggunakan isyarat impuls. Saat impuls pada waktu $\tau = k.\Delta\tau$, tanggapan sistem diberikan sebagai : $\Delta\tau \,.\, x(k.\Delta\tau) \,.\, g(t - k.\Delta\tau)$ ....(L.1)

yaitu tanggapan impuls sistem diperlambat oleh k. $\Delta\tau$ dikalikan dengan kekuatan impuls $\Delta\tau.x(k.\Delta\tau)$. Tanggapan total $x(\tau)$ didapat dengan menjumlahkan tanggapan masing-masing impuls dari $-\infty$ sampai $+\infty$, sehingga :

$$y(t) = \lim_{\substack{\Delta\tau \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{k=-N}^{N} x(k.\Delta\tau) \,.\, g(t - k.\Delta\tau) \qquad \text{.............(L.2)}$$

atau $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \,.\, g(t-\tau)\, d\tau \qquad \text{............(L.3)}$$

Untuk semua sistem fisik tanggapan keluaran tidak mendahului eksitasi maka $g(t) = 0$ untuk $t = 0$, karena fungsi impuls digunakan pada $t = 0$ atau $g(t - \tau) = 0$ untuk $t < \tau$.

Tanggapan keluaran sistem bisa ditulis

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \qquad \text{...............(L.4)}$$

jika $x(\tau) = 0$ untuk $\tau < 0$ maka

$$y(t) = \int_{0}^{t} x(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \qquad \text{.............(L.5)}$$

Persamaan (L.4) dan (L.5) disebut ***Integral Konvolusi***.

Operasi konvolusi dinotasikan dengan simbol * , sehingga $y(t) = x(t) * g(t)$ artinya $y(t) =$ $x(t)$ konvolusi ke $g(t)$.

Letak $x(t)$ dan $g(t)$ dalam operasi konvolusi bisa bertukar tempat karena secara mendasar tak ada perbedaan antara kedua fungsi tersebut. Sehingga integral konvolusi bisa ditulis sebagai :

$$y(t) = \int_{0}^{t} g(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$$= g(t) * x(t) = g(t) \text{ konvolusi ke } x(t).$$