BAB II

MATERI PENUNJANG

Komputer grafis dalam aplikasinya adalah digunakan dalam pembuatan suatu model atau desain dari suatu benda sehingga diperoleh bentuk yang memenuhi kebutuhan baik untuk penggunaan secara sintetis maupun penggunaan secara analitis. Metode Bezier adalah digunakan untuk kebutuhan secara sintetis atau pemodelan.

2.1. KONSEP DASAR KOMPUTER GRAFIS

Konsep dasar dari komputer grafis adalah pemodelan dari suatu obyek atau gambar, salah satu cara untuk membuat pemodelan dari suatu obyek atau gambar adalah dengan menggunakan persamaan geometrik yang cukup mudah diterapkan pada komputer .

Persamaan geometrik yang dapat digunakan mulai dari titik, segmen garis, polyline dan poligon serta persamaan geometrik yang lebih kompleks seperti kurva dan permukaan.

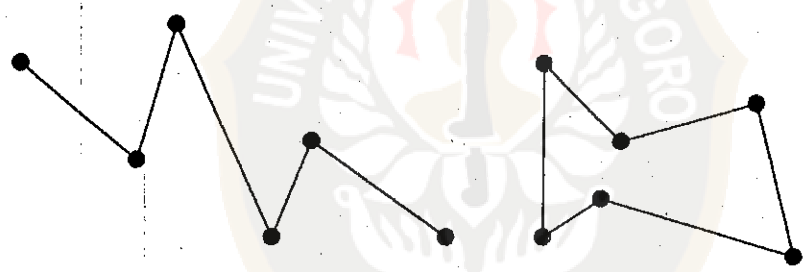
2.1.1. Titik dan Garis

Dasar untuk membuat obyek pada komputer grafis adalah titik dan garis, titik ditentukan dari koordinat sedang segmen garis ditentukan adanya titik awal dan titik akhir misal $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

2.1.2. Polyline

Polyline adalah rangkaian segmen garis yang terhubung, polyline mempunyai initial atau titik awal dan mempunyai titik akhir. Apabila titik awal berimpit dengan titik akhir di sebut polygon dan titi-titik pada polygon disebut puncak polygon.

Sebuah polygon dibentuk oleh titik P_0, …, P_N, segmen garis $\overline{Po\ P_1}, \overline{P_1\ P_2}, \ldots, \overline{P_N\ P_0}$ disebut garis dari polygon.



Gambar 2.1.1 Polyline dan Polygon

2.1.3. Desain Kurva

Bila diberikan n + 1 titik data misal $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, … , $P_n(x_n, y_n)$, kita berharap dapat membentuk kurva yang tepat melewati titik-titik tersebut. Untuk memecahkan masalah tersebut kita dapat membentuk bagian-bagian kecil kurva/segmen kurva. Misal f(x) adalah kurva yang dibentuk dari beberapa bagian kurva $Q_i(x)$, sehingga kurva terbentuk oleh jumlahan $Q_i(x)$

$$f(x) = a_1Q_1(x) + a_2Q_2(x) + a_3Q_3(x) + \ldots + a_nQ_n(x)$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \, Q_i(x)$$

Contoh :

Diberikan

$Q_1(x) = x^3 + x \qquad 0 \le x \le 1$

$Q_2(x) = x^2 + 3 \qquad 1 \le x \le 2$

$Q_3(x) = x^2 + x + 2 \qquad 2 \le x \le 3$

maka f(x) yang dibentuk oleh $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, dan $Q_3(x)$ adalah

$$f(x) = a_1Q_1(x) + a_2Q_2(x) + a_3Q_3(x)$$

misal diambil $a_1 = 1$ maka

- $a_1(x^3 + x) = a_2(x^2 + 3)$ untuk $x = 1$

  $a_2 = ½$

- $½\,(x^2 + 3) = a_3\,(x^2 + x + 2)$ untuk $x = 2$

  $a_3 = 7/16$

jadi $f(x) = a_1Q_1(x) + a_2Q_2(x) + a_3Q_3(x)$

$= (x^3 + x) + 1/2(x^3 + 3) + 7/16\,(x^2 + x + 2)$

$= x^3 + 15/16x^2 + 23/16x + 19/8$

a_i adalah suatu konstanta yang diberikan dengan tujuan untuk menghubungkan kurva yang dibentuk oleh $Q_i(x)$, $Q_i(x)$ disebut fungsi blending. Fungsi blending tersebut adalah fungsi polinomial, maka fungsi tersebut dapat ditulis :

$$Q(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + a_{n-2}\,x^{n-2} + \ldots + a_1\,x + a_0$$

2.2. Polinomial Bezier-Bernstein

Aproksimasi/pendekatan Bezier-Bernstein berguna untuk memberikan gambaran yang halus dari sebuah dimensi yang ditentukan oleh titik-titik data untuk menunjukkan suatu bentuk. Titik-titik data tersebut mempengaruhi hasil dalam bentuk dari sebuah polyline penuntun yang ditentukan oleh titik kontrol $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, ..., $P_n(x_n, y_n, z_n)$ yang menyajikan n+1 titik data.

Definisi 2.2.1

Persaman kurva parametrik yang dikendalikan oleh titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$,..., $P_n(x_n, y_n, z_n)$ menyajikan n+1 titik data didefinisikan sebagai berikut :

$$X(u) = x_0\, B_{n,0}(u) + x_1\, B_{n,1}(u) + x_2\, B_{n,2}(u) + \ldots + x_n\, B_{n,n}(u)$$

$$Y(u) = y_0\, B_{n,0}(u) + y_1\, B_{n,1}(u) + y_2\, B_{n,2}(u) + \ldots + y_n\, B_{n,n}(u)$$

$$Z(u) = z_0\, B_{n,0}(u) + z_1\, B_{n,1}(u) + z_2\, B_{n,2}(u) + \ldots + z_n\, B_{n,n}(u)$$

dengan $B_{n,i}(u)$ adalah polinomial Bernstein dengan derajat n pada interval [0, 1]

$$B_{n,i}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$

dengan

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$$0 \leq u \leq 1 \text{ dan } i = 0, 1, \ldots, n$$

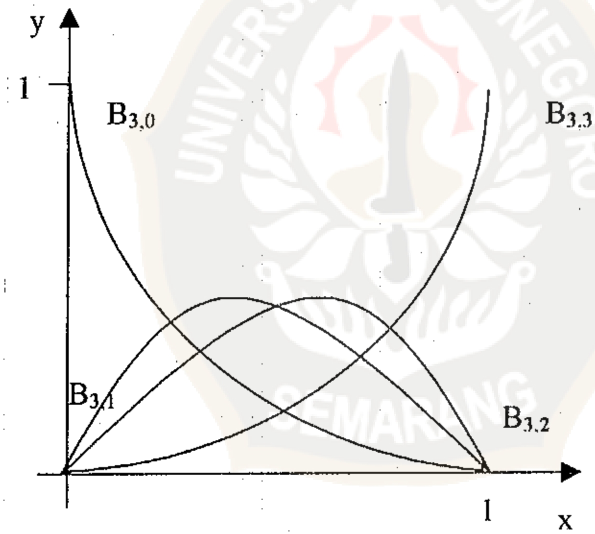
Contoh Polinomial Bernstein kubik dengan n = 3 adalah :

$$B_{3,0}(x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$$

$$B_{3,1}(x) = 3(x - 2x^2 + x^3)$$

$$B_{3,2}(x) = 3(x^2 - x^3)$$

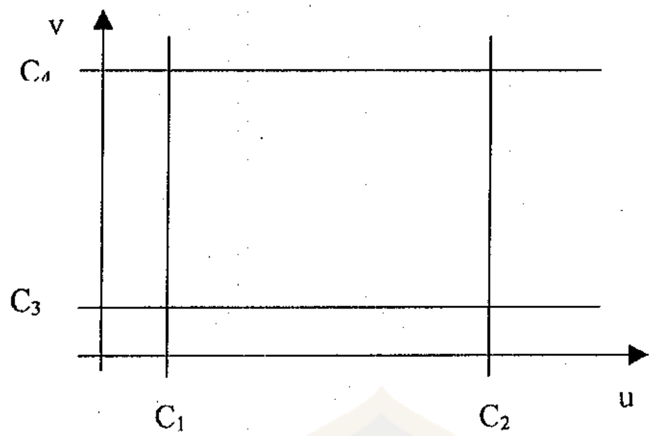
$$B_{3,3}(x) = x^3$$



Gambar 2.2.1 Polinomial Bernstein kubik (n = 3)

2.3. PEMETAAN PERMUKAAN PARAMETRIK

Penggambaran permukaan parametrik digambarkan oleh pemetaan sebuah permukaan planar dari dua parameter u v ke dalam ruang obyek tiga dimensi xyz. Pembahasan mengenai pemetaan ini akan dibatasi hanya untuk permukaan planar berbentuk segiempat seperti tampak pada gambar di bawah ini :



Gambar 2.3.1 Permukaan Planar

dengan

$u = C_1 \qquad C_3 \leq v \leq C_4$

$u = C_2 \qquad C_3 \leq v \leq C_4$

$v = C_3 \qquad C_1 \leq u \leq C_2$

$v = C_4 \qquad C_1 \leq u \leq C_2$

Sebuah permukaan dalam ruang obyek dituliskan oleh fungsi-fungsi yang memetakan permukaan parameter ini ke dalam ruang obyek xyz, sebagai contoh :

$x = x(u,v)$

$y = y(u,v)$

$z = z(u,v)$

maka dengan menetapkan satu nilai parameter konstan akan dihasilkan sebuah permukaan pada permukaan ruang obyek, misal u konstan sedang v tidak. Kurva yang dihasilkan disebut isoparametrik atau garis parametrik.

Dengan menspesifikasikan sebuah parameter sebagai fungsi dari parameter yang lain, misal $u = u(v)$ juga menghasilkan sebuah kurva pada permukaan dalam ruang obyek.

Penspesifikan kedua nilai parameter menghasilkan sebuah titik pada permukaan dalam ruang obyek. Dapat juga sebuah titik (atau titik-titik) dispesifikkan dengan menginterseksikan dua kurva pada ruang parameter. Misal $f(u,v) = 0$ dan $g(u,v) = 0$. Interseksi pada ruang parameter memetakan ke dalam interseksi pada ruang obyek.

Contoh :

Pemetaan permukaan yang dilukiskan oleh :

$$x = 3u + v \qquad \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1 \end{cases}$$

$$y = 2u + 3v + uv$$

$$z = 0$$

Karena $z = 0$, maka obyek merupakan obyek dua dimensi yang terletak pada bidang XOY ($z = 0$).

Batas-batas permukaan dalam ruang obyek didefinisikan sebagai pemetaan segiempat dalam ruang parametrik ke ruang obyek.

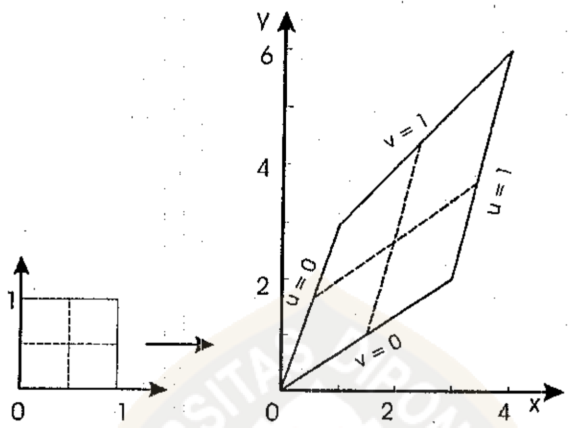
$u = 0$; $x = v$, $y = 3v$ dan $y = 3x$

$u = 1$; $x = v + 3$, $y = 2(2v + 1)$ dan $y = 2(2x - 5)$

$v = 0$; $x = 3u$, $y = 2u$ dan $y = (2/3)x$

$v = 1$; $x = 3u + 1$, $y = 3u + 3$ dan $y = x + 2$

Maka dihasilkan pemetaan sebagai berikut :



Gambar 2.3.1 Pemetaan Permukaan Parametrik

2.4 HIMPUNAN CONVEX

Definisi 2.4.1

Sebuah kombinasi convex dari titik P_1, P_2, P_3, …, P_n adalah sebuah titik

$$P = a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3 + \ldots + a_nP_n$$

Dengan a_i adalah skalar, $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $\sum_i a_i = 1$.

Contoh :

Diberikan titik-titik :

$P_1(1,2)$, $P_2(3,2)$ dan $P_3(4,4)$

Diambil sembarang titik P misal $P(3,3)$

Akan ditunjukkan bahwa titik P merupakan kombinasi convex dari titik P_1, P_2, P_3

Misal P kombinasi convex dari P_1, P_2, P_3 maka berlaku

$$P = a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3$$

dengan $a_i \geq 0$ dan $\sum_i a_i = 1$

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3\ ;\ 3 = a_1.1 + a_2.3 + a_3.4;$$

$$y = a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3\ ;\ 3 = a_1.2 + a_2.2 + a_3.4;$$

dengan $a_1 = ¼$, $a_2 = ¼$ dan $a_3 = ½$

jadi P merupakan kombinasi convex dari P_1, P_2, P_3.

Teorema 2.4.1

Titik-titik pada segmen garis yang menghubungkan dua titik dapat dinyatakan sebagai sebuah kombinasi convex dari dua titik tersebut.

Bukti :

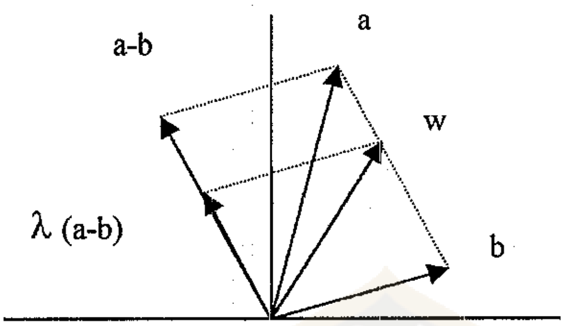
Misal dua titik A dan B dan diberikan W terletak pada segmen garis yang menghubungkan A dan B. Segmen garis ini paralel dengan garis yang didefinisikan oleh vektor A – B (gambar 2.4.1). Dengan aturan vektor untuk sebarang $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$B + \lambda(A-B) = W$$

Atau

$$(1-\lambda)B + \lambda A = W$$

dengan w adalah kombinasi konvek dari a dan b.



Gambar 2.4.1.

Teorema 2.4.2 (kebalikan teorema 2.4.1)

Sebuah titik dapat dinyatakan sebagai sebuah kombinasi konvex dari dua titik terletak pada segmen garis yang menghubungkan dua titik tersebut.

Bukti :

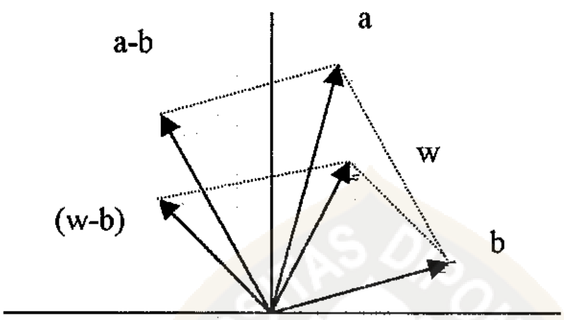
Misal $b + \lambda(a\text{-}b) = w$

Atau

$$(1-\lambda)b + \lambda a = w$$

dengan $0 \le \lambda \le 1$,

Karena vektor w-b adalah kelipatan positif dari vektor a-b, dan vektor ini tidak dapat memiliki konfigurasi yang ditunjukkan pada gambar 2.4.2. Vektor w-b harus dalam a-b. Dari segmen garis yang menghubungkan a dan b dan segmen garis yang menghubungkan titik W dan titik B adalah paralel dengan garis yang didefinisikan berturut-turut oleh a-b dan w-b, titik W harus berada pada segmen garis yang menghubungkan A dan B.



Gambar 2.4.2

Dari kedua teorema diatas secara geometri bahwa sebuah himpunan konvek adalah suatu himpunan yang memuat semua segmen garis yang menghubungkan dua titik dalam himpunan tersebut.

Definisi 2.4.2

Himpunan titik **K** dikatakan konvex jika untuk setiap A, B $\in$ **K**, segmen garis yang menghubungkan A dan B terletak dalam **K**.

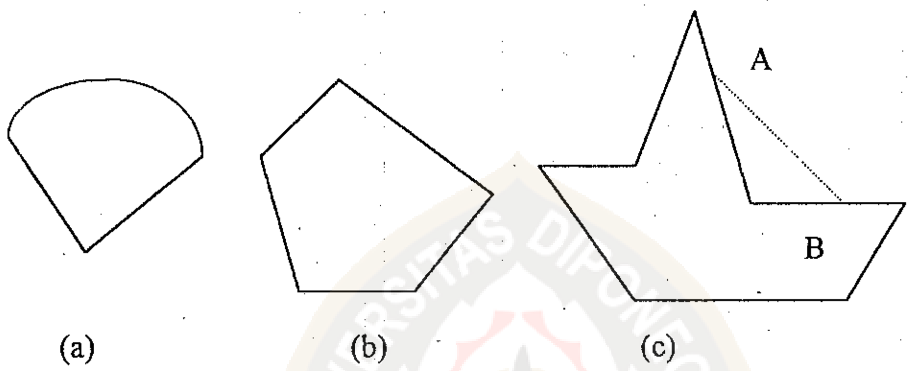
Contoh :

Himpunan titik-titik yang ditunjukkan dalam gambar 2.4.3a dan 2.4.3b adalah himpunan konvex.

Misal A dan B adalah titik-titik pada himpunan tersebut, maka segmen garis yang menghubungkan A dan B selalu terletak dalam himpunan tersebut.

Himpunan titik-titik yang ditunjukkan dalam gambar 2.4.3c adalah bukan himpunan convex.

Dalam himpunan tersebut ada titk A dan titk B pada himpunan tersebut, segmen garis yang menghubungkan titik A dan B tidak terletak dalam himpunan tersebut.



Gambar 2.4.3 (a), (b)Himpunan convex , (c) Bukan himpunan convex

Teorema 2.4.3

Irisan dari dua himpunan convex $\mathbf{K}_1$ dan $\mathbf{K}_2$ adalah convex atau kosong.

Bukti :

Misal $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2$ dan tidak kosong. Misalkan titik A dan titik B berada dalam $\mathbf{K}$, kedua titik tersebut berada dalam himpunan convex $\mathbf{K}_1$ dan berada dalam himpunan convex $\mathbf{K}_2$. Dengan demikian garis yang menghubungkan A dan B berada dalam $\mathbf{K}_1$ dan $\mathbf{K}_2$, sehingga $\mathbf{K}$ adalah convex.

Dan misal $\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2$ kosong maka himpunan kosong bukan convex.

|

Definisi 2.4.3

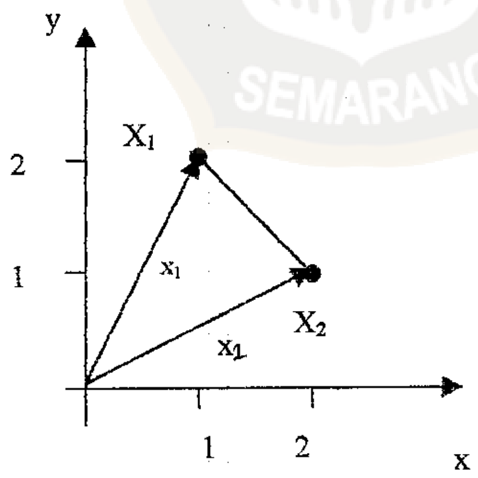
Convex hull dari $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ adalah himpunan semua kombinasi convex pada vektor tersebut.

Contoh :

Akan ditunjukkan konvex hull dari $\{X_1, X_2\}$, pada vektor x_1, x_2 , L adalah segmen garis yang menghubungkan X_1 dan X_2 dengan X_1 dan X_2 berturut-turut titik (1,2) dan (2,1).

Secara geometrik segmen garis yang menghubungkan (1,2) dengan (2,1) adalah himpunan konvex karena jika A dan B adalah titik-titik pada L, maka segmen garis yang menghubungkan A dengan B adalah bagian dari L. Misal Y adalah titik yang terletak pada L maka Y dapat dinyatakan sebagai kombinasi konvex dari X_1 dan X_2, yaitu $y = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ dengan $0 \leq \lambda \leq 1$.

Jadi konvex hull dari X_1 dan X_2 adalah himpunan dari semua titik yang berasal dari $y = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, dengan $0 \leq \lambda \leq 1$.



Gambar 2.4.4 Konvex hull dengan vektor dari himpunan vektor (x_1, x_2)