BAB II
ANALISIS VARIAN SATU ARAH

Analisis varian merupakan salah satu metode analisis statistik yang bertujuan untuk menganalisis variasi dari data yang terjadi karena berbagai variasi sumber atau sebab. Data dari hasil observasi dapat disajikan dalam tabel berikut :

	Perlakuan					
	1	2	3	...	K	
Hasil Pengamatan	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	...	Y_{1k}	$Y_{1\bullet}$
	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	...	Y_{2k}	$Y_{2\bullet}$
	...	...	...	...	...	...
	Y_{n1}	Y_{n2}	Y_{n3}	...	y_{nk}	$y_{\bullet\bullet}$

Tabel 2.1. Penyajian data hasil observasi

Hasil-hasil pengamatan tersebut dapat dituliskan dalam model matematika sebagai berikut:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad , \quad i=1, 2, \ldots, n \qquad (2.1)$$
$$j=1, 2, \ldots, k$$

Dimana y_{ij} : hasil pengamatan ke-j yang dipengaruhi oleh perlakuan ke-i

μ : rata-rata keseluruhan pengamatan

τ_i : efek perlakuan ke-i

ε_{ij} : sesatan yang diasumsikan berdistribusi normal, independen, rata-rata nol dan variansi σ^2

Jika k buah perlakuan dipilih dan uji hipotesa adalah mengenai k mean-mean perlakuan-perlakuan, dan kesimpulan yang diambil berlakunya untuk k buah perlakuan, maka efek perlakuan τ_i sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{k} \tau_i = 0$ (2.2)

Dalam Tabel 2.1, jumlahan variabel dapat diuraikan sebagai berikut :

$y_{i\bullet}$ adalah jumlah dari harga-harga yang diperoleh sebagai hasil-hasil pengamatan untuk perlakuan ke-i, yaitu

$$y_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \quad (2.3)$$

$\bar{y}_{i\bullet}$ adalah nilai rata-rata dari hasil-hasil pengamatan untuk perlakuan ke-i

$$\bar{y}_{i\bullet} = \frac{y_{i\bullet}}{n} \quad (2.4)$$

$y_{\bullet\bullet}$ adalah jumlah dari seluruh hasil pengamatan

$$y_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \quad (2.5)$$

$\bar{y}_{\bullet\bullet}$ adalah rata-rata dari seluruh hasil pengamatan

$$\bar{y}_{\bullet\bullet} = \frac{y_{\bullet\bullet}}{N} \quad (2.6)$$

$N=k.n$: banyaknya keseluruhan pengamatan

$\mu_i = \mu + \tau_i$ yaitu rata-rata (mean) dari perlakuan ke-i.

Jika dalam analisis varian satu arah akan dibandingkan k buah mean-mean perlakuan-perlakuan apakah sama, hal tersebut dapat dinyatakan sebagai :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_i$ untuk minimal satu i

Hipotesa tersebut dapat ditulis kembali sebagai :

$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_k$

$H_1 : \tau_1 \neq \tau_i$ untuk minimal satu i (2.7)

Jika H_0 benar, maka untuk semua perlakuan mempunyai mean sama dengan μ.

Analisis varian berasal dari penguraian variasi yang tampak (variabilitas) data secara keseluruhan ke dalam komponen-komponen, yaitu :

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 \qquad (2.8)$$

adalah jumlah kuadrat total (JK_T) yang telah dikoreksi, digunakan sebagai alat ukur dari variabilitas keseluruhan dari data. Derajat bebas suatu jumlah kuadrat ialah jumlah elemen independen dalam jumlah kuadrat (JK).

Secara umum berlaku jika y_i variabel random dengan variansi σ^2 dan JK = $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ mempunyai derajat bebas (n-1), maka

$$E\left(\frac{JK}{n-1}\right) = \sigma^2 \tag{2.9}$$

Selanjutnya tulis JK sebagai

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_i - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 + (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

$$= n\sum_{j=1}^{k}(\bar{y}_i - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \tag{2.10}$$

sehingga $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$ dapat diuraikan menjadi jumlah kuadrat-jumlah kuadrat dari selisih antara rata-rata masing-masing perlakuan dengan rata-rata dari nilai keseluruhan pengamatan ditambah jumlah kuadrat-jumlah kuadrat dari selisih antara masing-masing pengamatan dari perlakuan-perlakuan dengan rata-rata dari perlakuan, selanjutnya definisikan

$n\sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$ sebagai JK antar perlakuan (JK_P) dan

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2$ sebagai JK dalam perlakuan/sesatan (JK_S)

sehingga persamaan (2.10) dapat ditulis sebagai

$$JK_T = JK_P + JK_S \tag{2.11}$$

Analisis ruas kanan dari persamaan (2.10)

Pandang JK_S : $\frac{JK_S}{N-k} = RK_S$ adalah rata-rata kuadrat sesatan

$$E(RK_S) = E\left(\frac{JK_S}{N-k}\right) = \frac{1}{N-k}E\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i\bullet})^2\right)$$

$$= \frac{1}{N-k}\left(N\mu^2 + n\sum_{i=1}^{k}\tau_i^2 + N\sigma^2 - N\mu^2 - n\sum_{i=1}^{k}\tau_i^2 - k\sigma^2\right)$$

$$= \frac{N-k}{N-k}\sigma^2$$

$$= \sigma^2$$

$$E(RK_S) = \sigma^2 \tag{2.12}$$

Dengan cara yang sama, jika

$RK_P = \frac{JK_P}{k-1}$ merupakan rata-rata kuadrat perlakuan, akan

diperoleh $$E(RK_P) = \sigma^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{k}\tau_i}{k-1} \tag{2.13}$$

Sehingga dari (2.12) dan (2.13) diperoleh

$RK_S = \frac{JK_S}{N-k}$ menaksir σ^2 dan jika tidak ada perbedaan antara mean-mean perlakuan-perlakuan ($\tau_i=0$) maka $RK_P = \frac{JK_P}{k-1}$ juga menaksir σ^2.

Tetapi jika ada perbedaan antara mean-mean perlakuan-perlakuan, maka ekspektasi dari rata-rata kuadrat perlakuan > σ^2. Sehingga tampak bahwa uji hipotesa tidak adanya perbedaan antara mean-mean perlakuan-perlakuan dapat dilakukan dengan cara membandingkan $JK_P > RK_S$.

Untuk selanjutnya asumsikan model

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, n$$

dengan μ dan τ merupakan parameter, ε adalah variabel random yang berdistribusi normal, independen, rata-rata nol dan variansi σ^2.

Jadi pengamatan y_{ij} akan berdistribusi normal, independen dan mean $\mu + \tau_i$ serta variansi σ^2, maka JK_T adalah jumlah kuadrat-jumlah kuadrat total dari variabel-variabel yang berdistribusi normal :

$\frac{JK_T}{\sigma^2}$ berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas (N-1)

$\frac{JK_P}{\sigma^2}$ berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas (k-1) jika $H_0 : \tau_i = 0$ benar.

Jika H_0 benar, maka

$$\frac{\frac{JK_P}{(k-1)}}{\frac{JK_S}{(N-k)}} = \frac{RK_P}{RK_S} = F_0$$ berdistribusi F dengan derajat bebas (k-1, N-k).

Persamaan tersebut adalah uji statistik untuk hipotesa kesamaan dari mean-mean perlakuan-perlakuan dari penurunan ekspektasi untuk rata-rata jumlah kuadrat

(ERK). Tampak bahwa σ^2 yang unbias dibawah hipotesa null, RK_P juga sebuah taksiran yang unbias dari σ^2. Tetapi jika H_0 tidak benar, maka nilai ekspektasi dari $RK_P > \sigma^2$. Sehingga H_0 ditolak jika nilai uji statistiknya $F_0 > F_{\alpha,(k-1),(N-k)}$

Untuk mempermudah

$$JK_T = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet}^2}{N} \qquad (2.14)$$

$$JK_P = n\sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_i - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{k}\frac{\bar{y}_i^2}{n} - \frac{y_{\bullet\bullet}^2}{N} \qquad (2.15)$$

Dan penggunaannya dapat dilihat berdasar Tabel analisa variansi berikut:

Sumber variansi	**db**	**JK**	**rata-rata kuadrat**	**ERK**	**F_0**
Antar perlakuan	$k-1$	JK_P	RK_P	$\frac{n\sum_{i=1}^{k}\tau_i}{k-1}$	$\frac{RK_P}{RK_S}$
Sesatan	$N-k$	JK_S	RK_S	σ^2	
Total	$N-1$	JK_T			