BAB II

TEORI DASAR

2.1. Teori Penunjang

Sebelum membahas model regresi linier yang mendasari pembahasan titik *outlier*, *high-leverage*, dan *pengamatan berpengaruh*, termasuk *pengamatan kolinieritas-berpengaruh*, terlebih dulu kita sajikan teori yang digunakan sebagai penunjang.

Definisi 2.1

Himpunan vektor $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \ldots, \underset{\sim}{x}_k$ disebut *bergantung linier* bila terdapat k bilangan $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ tidak semuanya nol sedemikian sehingga

$$a_1\underset{\sim}{x}_1 + a_2\underset{\sim}{x}_2 + \ldots + a_k\underset{\sim}{x}_k = 0$$

Apabila tidak demikian, himpunan vektor itu disebut *bebas linier*.■

Definisi 2.2

Matrik bujursangkar $\underset{\sim}{A}$ ukuran $k\times k$ disebut *nonsingular* jika rank matrik tersebut sama dengan banyak baris atau kolomnya (*full row /column rank*).■

Catatan:

* Suatu matrik yang tidak nonsingular, disebut *singular*.
* Jika $\underset{\sim}{A}$ matrik nonsingular, maka $\underset{\sim}{A}$ mempunyai invers.

Determinan-determinan berikut disebut minor prinsipal dari $\underset{\sim}{A}$

$$a_{11} \;;\; \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \;;\; \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \;;\; \ldots \;;\; \det(\underset{\sim}{A})$$

didapatkan dari $\underset{\sim}{A}$ sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.3

Suatu syarat perlu dan cukup untuk matrik simetri $\underset{\sim}{A}$ menjadi definite positif adalah bila setiap minor prinsipal dari $\underset{\sim}{A}$ semuanya positif.■

Definisi 2.4

$\underset{\sim}{A}$ matrik bujursangkar *kxk* dan $\underset{\sim}{I}$ matrik identitas *kxk*. Skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ yang memenuhi persamaan $\det(\underset{\sim}{A}-\lambda\underset{\sim}{I})=0$ disebut *eigenvalue* (akar karakteristik) dari matrik $\underset{\sim}{A}$.■

Definisi 2.5

$\underset{\sim}{A}$ matrik ukuran *kxk* dan λ eigenvalue dari $\underset{\sim}{A}$. Jika $\underset{\sim}{x}$ adalah *vektor taknol* ukuran *kx*1 sedemikian sehingga

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{x} = \lambda\underset{\sim}{x}$$

maka $\underset{\sim}{x}$ disebut *eigenvektor* (vektor karakteristik) dari matrik $\underset{\sim}{A}$ yang bersesuaian dengan eigenvalue λ.■

Definisi 2.6

Suatu himpunan vektor dinamakan *himpunan orthogonal* jika semua pasangan vektor-vektor yang berbeda dalam himpunan tersebut orthogonal. Suatu himpunan orthogonal yang setiap vektornya mempunyai *norma* (panjang) 1 disebut *orthonormal*.■

Catatan:

Proses pengalian vektor $\underset{\sim}{v}$ taknol dengan kebalikan panjangnya untuk mendapatkan vektor yang normanya 1 dinamakan *menormalisasikan* $\underset{\sim}{v}$.

Theorema 2.1 (Dekomposisi Spektral)

Misal V adalah ruang Euclid berdimensi hingga, $T:V \longrightarrow V$ adalah suatu pemetaan simetri yang mempunyai eigenvalue $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ yang berlainan. Untuk setiap λ_i :
$V_i = \{x \in V \mid T(x)=\lambda_i x\}$ adalah suatu ruang bagian dari V yang disebut ruang karakteristik (*eigenspace*) dan E_i adalah proyeksi orthogonal pada V_i, maka :

$$T = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots + \lambda_r E_r$$

disebut *dekomposisi spektral* dari T.

Bukti :

Ambil sebarang $v \in V$ maka $(\exists!\ v_1, v_2, \ldots, v_r)[v_i \in V_i$ & $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_r]$. Maka

$$
\begin{aligned}
(\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots + \lambda_r E_r)(v) &= \lambda_1 E_1(v) + \lambda_2 E_2(v) + \ldots + \lambda_r E_r(v) \\
&= \lambda_1 E_1(v_1 + v_2 + \ldots + v_r) + \lambda_2 E_2(v_1 + v_2 + \ldots + v_r) + \ldots \\
&\qquad + \lambda_r E_r(v_1 + v_2 + \ldots + v_r) \\
&= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r \\
&= T(v_1) + T(v_2) + \ldots + T(v_r) \\
&= T(v_1 + v_2 + \ldots + v_r) \\
&= T(v)
\end{aligned}
$$

Sehingga $T(v) = (\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots + \lambda_r E_r)(v),\ \forall\, v \in V$

Bukti selesai.■

Lemma 2.1

Jika $\underset{\sim}{A}$ mempunyai invers, maka berlaku

$$\det(\underset{\sim}{A})\det(\underset{\sim}{A}^{-1}) = 1$$

Bukti:

Karena $\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{I}$, maka $\det(\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{A}) = \det(\underset{\sim}{I})$ sehingga terbukti $\det(\underset{\sim}{A})\det(\underset{\sim}{A}^{-1}) = 1$

Lemma 2.2

Misalkan $\underset{\sim}{A}$ matrik nonsingular maka berlaku

$$(\underset{\sim}{A}^{T})^{-1} = (\underset{\sim}{A}^{-1})^{T}$$

Bukti:

$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^{-1} = \underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{I}$, karena $\underset{\sim}{I}^{T} = \underset{\sim}{I}$ maka

$(\underset{\sim}{A}^{-1})^{T}\underset{\sim}{A}^{T} = \underset{\sim}{I} = \underset{\sim}{A}^{T}(\underset{\sim}{A}^{-1})^{T}$

Jadi $(\underset{\sim}{A}^{-1})^{T}$ merupakan invers dari $\underset{\sim}{A}^{T}$, maka

$(\underset{\sim}{A}^{-1})^{T} = (\underset{\sim}{A}^{T})^{-1}$ *(terbukti).* ■

Teorema 2.2. (Pertaksamaan Cramèr-Rao)

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel dengan densitas $f(\underset{\sim}{X}|\theta)$ dan misalkan $T(\underset{\sim}{X}) = (X_1, \ldots, X_n)$ adalah sembarang estimator dengan $\mathbb{E}(T(\underset{\sim}{X}))$ terdefferensialkan dalam θ. Andaikan densitas bersama $T(\underset{\sim}{X}|\theta)$ memenuhi:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int\ldots\int h(\underset{\sim}{X}) f(\underset{\sim}{X}|\theta)dx = \int\ldots\int h(\underset{\sim}{X}) \frac{\partial}{\partial\theta} f(\underset{\sim}{X}|\theta)dx$$

untuk setiap fungsi $h(\underset{\sim}{X})$ dengan $\mathbb{E}(h(\underset{\sim}{X}))<\infty$, maka

$$\text{Var } T(\underset{\sim}{X}) \geq \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbb{E}(T(\underset{\sim}{X}))\right)^2}{\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X}|\theta)\right)^2\right]}$$

$\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X}|\theta)\right)^2\right]$ disebut *Informasi Fisher.*

Bukti:

Ketaksamaan Schwarz

$(\text{Cov}(x,y))^2 \leq \text{Var}(x).\text{Var}(y)$

$$\text{Var}(x) \geq \frac{(\text{Cov}(x,y))^2}{\text{Var}(y)}$$

$$\mathbb{E}(y) = \int y\ f(y)\ dy$$

$$\mathrm{Cov}(x,y) = \mathbb{E}\{(x-\mathbb{E}(x))(y-\mathbb{E}(y))\}$$

$$= \mathbb{E}\{xy-x\mathbb{E}(y)-y\mathbb{E}(x)+\mathbb{E}(x)\mathbb{E}(y)\}$$

$$= \mathbb{E}(xy)-\mathbb{E}(x)\mathbb{E}(y)$$

Ambil $x = T(\underset{\sim}{X})$, $y = \frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X}|\theta)$

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X}|\theta)\right] = \int\cdots\int\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X}|\theta)f(\underset{\sim}{X}|\theta)dx$$

$$= \int\cdots\int\frac{1}{f(\underset{\sim}{X}|\theta)}\ \frac{\partial}{\partial\theta}f(\underset{\sim}{X}|\theta)f(\underset{\sim}{X}|\theta)dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\int\cdots\int f(\underset{\sim}{X}|\theta)dx = 0$$

$$\mathrm{Cov}\left(T(\underset{\sim}{X}))\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X}|\theta)\right) = \mathbb{E}\left(T(\underset{\sim}{X})\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X}|\theta)\right)$$

$$= \int\cdots\int T(\underset{\sim}{X})\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X}|\theta)f(\underset{\sim}{X}|\theta)dx$$

$$= \int\cdots\int T(\underset{\sim}{X})\frac{1}{f(\underset{\sim}{X}|\theta)}\ \frac{\partial}{\partial\theta}f(\underset{\sim}{X}|\theta)f(\underset{\sim}{X}|\theta)dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\mathbb{E}\left(T(\underset{\sim}{X})\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X}|\theta)\right) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X}|\theta)\right)^2\right)$$

$$-\left[\mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X}|\theta)\right)\right]^2$$

Jadi terbukti bahwa

$$\mathrm{Var}\ T(\underset{\sim}{X}) \geq \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbb{E}(T(\underset{\sim}{X}))\right)^2}{\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X}|\theta)\right)^2\right]} \qquad \blacksquare$$

Selain beberapa definisi, lemma dan theorema diatas diperlukan pula pemahaman sifat-sifat teori *aljabar matrik* yang lainnya.

2.2. Model Regresi Linier

Model regresi linier sederhana adalah suatu model dengan satu variabel bebas x, dimana hubungan antara variabel bebas x dan variabel tak bebas y, didekati dengan suatu garis lurus. Secara matematis dapat dinyatakan dalam bentuk

$$y_i = \beta_o + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad , i = 1,2, \ldots ,n \qquad (2.1)$$

dimana:

y_i adalah variabel tak bebas pada pengamatan ke-*i*

x_i adalah variabel bebas pada pengamatan ke-*i*

β_o, β_1 adalah paramater atau koefisien regresi

ε_i adalah suku sesatan random pada pengamatan ke-*i*

dengan asumsi $\varepsilon_i \sim NID(0,\sigma^2)$.

Suatu model regresi linier yang melibatkan lebih dari satu variabel bebas disebut *model regresi linier ganda*. Model ini dapat dinyatakan sebagai berikut

$$y_i = \beta_o + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i \qquad (2.2)$$

dengan asumsi, $\varepsilon_i \sim NID(0,\sigma^2)$.

Model regresi linier ganda lebih mudah dipahami bila dinyatakan dalam bentuk matrik. Persamaan (2.2) dapat ditulis dalam bentuk matrik sebagai berikut

$$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{2.3}$$

dimana

$$\underset{\sim}{Y}_{nx1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{X}_{nx(p+1)} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\beta}_{(p+1)x1} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\varepsilon}_{(nx1)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

2.2.1. Metode Kuadrat Terkecil

Untuk mendapatkan taksiran parameter regresi maka koefisien regresi pada (2.2) ditaksir dengan menggunakan metode kuadrat terkecil *(least square)*. Misalkan ada n persamaan, dan y_i adalah variabel tak bebas pada pengamatan ke-i, x_{ij} adalah variabel bebas ke-j pada pengamatan ke-i, maka y_i dapat ditulis sebagai berikut

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i \tag{2.4}$$

Fungsi jumlah kuadrat sesatannnya adalah

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij})^2 \tag{2.5}$$

Jika fungsi S diminimumkan terhadap $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ maka didapat taksiran kuadrat terkecil dari $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$. Hal ini dikerjakan dengan cara penurunan parsial persamaan (2.5) sebagai berikut

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij})$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_j} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij}) x_{ij}$$

Estimasi kuadrat terkecil harus memenuhi

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \quad \text{dan}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^2} > 0$$

agar taksiran β meminimumkan fungsi S. Masalah ini dapat ditunjukan sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \beta_0^2} = 2n > 0$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \beta_j^2} = 2\sum_{j=1}^{p} x_{ij}^2 > 0$$

sehingga fungsi S mempunyai nilai ekstrim minimum dan dengan menyamakan turunan pertama dengan 0 dan mengganti β dengan $\hat{\beta}$ akan didapat nilai taksiran untuk β yang meminimumkan $\Sigma\varepsilon_i^2$, yaitu

$$-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\beta}_o-\sum_{j=1}^{p}\hat{\beta}_j x_{ij}) = 0$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\beta}_o-\sum_{j=1}^{p}\hat{\beta}_j x_{ij})x_{ij} = 0 \qquad (2.6)$$

Dari persamaan (2.6) didapat (p+1) persamaan normal sebagai berikut

$$\begin{array}{lllllll}
n\hat{\beta}_o & + \hat{\beta}_1\Sigma x_{i1} & + \hat{\beta}_2\Sigma x_{i2} & + \ldots & + \hat{\beta}_p\Sigma x_{ip} & = \Sigma y_i \\
\hat{\beta}_o\Sigma x_{i1} & + \hat{\beta}_1\Sigma x_{i1}^2 & + \hat{\beta}_2\Sigma x_{i1}x_{i2} & + \ldots & + \hat{\beta}_p\Sigma x_{i1}x_{ip} & = \Sigma x_{i1}y_i \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\hat{\beta}_o\Sigma x_{ip} & + \hat{\beta}_1\Sigma x_{ip}x_{i2} & + \hat{\beta}_2\Sigma x_{ip}x_{i2} & + \ldots & + \hat{\beta}_p\Sigma x_{ip}^2 & = \Sigma x_{ip}y_i
\end{array} \qquad (2.7)$$

Solusi untuk persamaan-persamaan normal diatas adalah merupakan taksiran kuadrat terkecil untuk $\beta_o,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_p$ yaitu $\hat{\beta}_o,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\ldots,\hat{\beta}_p$.

Apabila menggunakan notasi matrik, maka dicari vektor taksiran kuadrat terkecil β yang meminimumkan fungsi jumlah kuadrat sesatan, yaitu

$$\begin{aligned}
S &= \Sigma\varepsilon_i^2 \\
&= \underset{\sim}{\varepsilon}^T\underset{\sim}{\varepsilon} \\
&= (\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta})^T(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta}) \\
&= \underset{\sim}{Y}^T\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\beta}^T\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{Y}^T\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\beta}^T\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta} \\
&= \underset{\sim}{Y}^T\underset{\sim}{Y} - 2\underset{\sim}{\beta}^T\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{Y} + \underset{\sim}{\beta}^T\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta}
\end{aligned}$$

karena $\underset{\sim}{\beta}^T\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{Y}$ dan $(\underset{\sim}{\beta}^T\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{Y})^T = \underset{\sim}{Y}^T\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta}$ suatu skalar yang sama.

Estimasi kuadrat terkecil harus memenuhi

$$\frac{\partial S}{\partial \underset{\sim}{\beta}} = 0 \quad \text{dan}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \underset{\sim}{\beta}^2} > 0$$

agar taksiran $\underset{\sim}{\beta}$ meminimumkan fungsi S. Masalah ini dapat ditunjukan sebagai berikut

$$\frac{\partial S}{\partial \underset{\sim}{\beta}} = -2\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{Y} + 2\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \underset{\sim}{\beta}^2} = 2\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X}$$

Dari matrik $\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X}$ berikut ini

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_{i1} & \Sigma x_{i2} & \cdots & \Sigma x_{ip} \\ \Sigma x_{i1} & \Sigma x_{i1}^2 & \Sigma x_{i1}x_{i2} & \cdots & \Sigma x_{i1}x_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Sigma x_{ip} & \Sigma x_{ip}x_{i1} & \Sigma x_{ip}x_{i2} & \cdots & \Sigma x_{ip}^2 \end{bmatrix}$$

dapat disimpulkan bahwa setiap minor prinsipal dari $\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X}$ semuanya positif, berdasarkan definisi 2.3 maka matrik $\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X}$ adalah definite positif dan

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \underset{\sim}{\beta}^2} > 0$$

sehingga fungsi S mempunyai nilai ekstrim minimum dan dengan menyamakan turunan pertama dengan nol didapat taksiran $\underset{\sim}{\beta}$ yang meminimumkan $\underset{\sim}{\varepsilon}^T\underset{\sim}{\varepsilon}$. Hal ini dapat ditunjukan sebagai berikut

$$-2\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{Y} + 2\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X}\hat{\underset{\sim}{\beta}} = 0$$

yang mana bisa ditulis menjadi

$$(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{Y} \tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) adalah persamaan normal kuadrat terkecil. Bentuk ini identik dengan persamaan (2.7). Untuk mencari penyelesainnya, kedua ruas dikalikan dengan invers dari $(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})$, sehingga taksiran kuadrat terkecil untuk $\underset{\sim}{\beta}$ adalah

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{Y} \tag{2.9}$$

asalkan $(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}$ ada.

Mudah dipahami bahwa bentuk matrik dari persamaan normal (2.8) adalah identik dengan sistem persamaan linier dalam $\hat{\beta}$ pada (2.7). Secara detail, persamaan (2.8) dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_{i1} & \Sigma x_{i2} & \dots & \Sigma x_{ip} \\ \Sigma x_{i1} & \Sigma x_{i1}^2 & \Sigma x_{i1}x_{i2} & \dots & \Sigma x_{i1}x_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Sigma x_{ip} & \Sigma x_{ip}x_{i1} & \Sigma x_{ip}x_{i2} & \dots & \Sigma x_{ip}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_{i1}y_i \\ \vdots \\ \Sigma x_{ip}y_i \end{bmatrix}$$

Jika perkalian matrik diatas dijalankan, maka akan diperoleh bentuk persamaan pada (2.7). Terlihat bahwa matrik $\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X}$ adalah suatu matrik simetri ukuran $(p+1)\text{x}(p+1)$ dan $\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{Y}$ adalah suatu vektor kolom ukuran $(p+1)\text{x}1$.

2.2.2. Asumsi Dasar

Hasil metode kuadrat terkecil dan analisis statistika harus mengikuti asumsi-asumsi berikut ini :

1. Asumsi kelinieran

Asumsi ini dinyatakan secara implisit pada model (2.3), yaitu setiap nilai y_i dapat ditulis sebagai fungsi linier dari baris ke-*i* pada matrik $\underset{\sim}{X}$, ditulis x_i^T, sedemikian

$$y_i = x_i^T \underset{\sim}{\beta} + \varepsilon_i \qquad , i = 1,2, \ldots ,n \qquad (2.10)$$

2. Asumsi perhitungan

Untuk mendapatkan taksiran $\underset{\sim}{\beta}$ yang tunggal, perlu supaya $(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}$ ada, atau secara ekuivalen

$$\text{rank } (\underset{\sim}{X}) = p+1 \qquad (2.11)$$

Matrik $(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}$ ini ada jika variabel-variabel bebasnya bebas linier, yaitu jika tidak ada suatu kolom dalam $\underset{\sim}{X}$ yang merupakan kombinasi linier dari kolom yang lain. Atau, karena matrik $\underset{\sim}{X}$ ukuran nx$(p+1)$ mempunyai *full column rank*, maka rank matrik $(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})$ adalah p+1. Sehingga $(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})$ adalah matrik nonsingular, karenanya $(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})$ mempunyai invers.

3. Asumsi distribusi

Analisa statistik yang mendasarkan pada metode kuadrat terkecil (misal uji-t, uji-*F*, dan sebagainya) mengasumsikan bahwa

$$\underset{\sim}{\varepsilon} \sim N_n(0, \sigma^2 \underset{\sim}{I}) \qquad (2.12)$$

4. Asumsi secara implisit

Seluruh pengamatan dapat dipercaya dan mempunyai peranan yang sama dalam menentukan hasil metode kuadrat terkecil dan pengaruhnya.

Jika asumsi-asumsi diatas dipenuhi, maka teori kuadrat terkecil memberikan hasil-hasil yang diketahui sebagai berikut.

1. Vektor $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ mempunyai sifat-sifat sebagai berikut

a. $\mathbb{E}(\hat{\underset{\sim}{\beta}}) = \underset{\sim}{\beta}$ (2.13a)

yaitu $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ adalah taksiran tak bias untuk $\underset{\sim}{\beta}$

Bukti:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{\underset{\sim}{\beta}}) &= \mathbb{E}\ [(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{Y}] \\ &= \mathbb{E}\ [(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T(\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon})] \\ &= \mathbb{E}\ [(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta} + (\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{\varepsilon}] \\ &= \underset{\sim}{\beta}\end{aligned}$$

karena $\mathbb{E}\ [\underset{\sim}{\varepsilon}] = 0$ dan $(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{I}$

b. $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ adalah taksiran tak bias linier terbaik (*the best linear unbiased estimator/ BLUE*) untuk $\underset{\sim}{\beta}$, yaitu diantara kelas-kelas dari taksiran tak bias linier untuk $\underset{\sim}{\beta}$, $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ mempunyai variansi minimum. Variansi untuk $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ adalah

$$\mathrm{Var}(\hat{\underset{\sim}{\beta}}) = \sigma^2(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1} \qquad (2.13b)$$

Bukti :

Dengan lemma 2.2, dan mengingat $\underset{\sim}{\Sigma}_Y$ adalah matrik varians-covarians dari $\underset{\sim}{Y}$, yang berukuran (nxn).

$$\underset{\sim}{\Sigma}_Y = \begin{cases} \sigma_{ij} = \sigma^2 \underset{\sim}{I} & ,\text{untuk } i=j \\ 0 & ,\text{untuk } i\neq j \end{cases}$$

Maka

$$\begin{aligned} Var(\hat{\underset{\sim}{\beta}}) &= Var\,[(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{Y}] \\ &= (\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{\Sigma}_Y\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1} \\ &= (\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\sigma^2\underset{\sim}{I}\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1} \\ &= \sigma^2(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1} \\ &= \sigma^2(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1} \end{aligned}$$

Akan dibuktikan pula bahwa $\sigma^2(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}$ merupakan variansi minimum dari $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$. Jika variansi estimator takbias $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ memenuhi CRLB (*Cramèr-Rao Lower Bound*) sebagai suatu persamaan, maka $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ merupakan estimator tak bias dengan variansi minimum.

Misalkan $T(\hat{\underset{\sim}{\beta}})$ adalah sebarang estimator untuk $\underset{\sim}{\beta}$, karena $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ taksiran tak bias untuk $\underset{\sim}{\beta}$, yaitu $\mathbb{E}(\hat{\underset{\sim}{\beta}})=\underset{\sim}{\beta}$, maka

$$\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbb{E}\left(T(\hat{\underset{\sim}{\beta}})\right)\right]^2 \equiv \left[\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\beta}}\mathbb{E}(\hat{\underset{\sim}{\beta}})\right]^2 = \left[\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\beta}}\underset{\sim}{\beta}\right]^2 = 1$$

berdasarkan suatu sampel random dengan densitas bersama $f(\hat{\underset{\sim}{\beta}}|\underset{\sim}{\beta})$ dan memenuhi distribusi normal multivariat berdimensi-$(p+1)$ dengan vektor rata-rata $\underset{\sim}{\beta}$ dan matrik varian-kovarian $\sigma^2(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})$, maka CRLB berdasarkan pada **teorema 2.2**, adalah

$$\text{Var } T(\hat{\underset{\sim}{\beta}}) \geq \frac{1}{\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \log f(\hat{\underset{\sim}{\beta}}|\underset{\sim}{\beta})\right]^2}$$

dimana

$$f(\hat{\underset{\sim}{\beta}}|\underset{\sim}{\beta}) = \frac{1}{(2\pi)^{(p+1)/2}[\sigma^2(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}]^{1/2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(\hat{\underset{\sim}{\beta}}-\underset{\sim}{\beta})^T(\hat{\underset{\sim}{\beta}}-\underset{\sim}{\beta})}{\sigma^2(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}}\right)\right]$$

$$\log f(\hat{\underset{\sim}{\beta}}|\underset{\sim}{\beta}) = -\frac{1}{2}\log (2\pi)^{(p+1)}[\sigma^2(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}] - \frac{1}{2}\left[\frac{(\hat{\underset{\sim}{\beta}}-\underset{\sim}{\beta})^T(\hat{\underset{\sim}{\beta}}-\underset{\sim}{\beta})}{\sigma^2(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}}\right]$$

sehingga

$$\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \log f(\hat{\underset{\sim}{\beta}}|\underset{\sim}{\beta}) = -\frac{1}{2\sigma^2(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}} \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}}(\hat{\underset{\sim}{\beta}}^T-\underset{\sim}{\beta}^T)(\hat{\underset{\sim}{\beta}}-\underset{\sim}{\beta})$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}}\left(-2(\hat{\underset{\sim}{\beta}}-\underset{\sim}{\beta})\right)$$

$$= \frac{(\hat{\underset{\sim}{\beta}}-\underset{\sim}{\beta})}{\sigma^2(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}}$$

maka batas terendah (CRLB) dari Var $T(\hat{\underset{\sim}{\beta}})$ adalah

$$\text{Var } T(\hat{\underset{\sim}{\beta}}) \geq \frac{1}{\mathbb{E}\left[\frac{(\hat{\underset{\sim}{\beta}}-\underset{\sim}{\beta})}{\sigma^2(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}}\right]^2}$$

$$\geq \frac{1}{\left[\frac{\mathbb{E}(\hat{\underset{\sim}{\beta}}-\underset{\sim}{\beta})^2}{[\sigma^2(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}]^2}\right]}$$

$$\mathrm{Var}\ T(\hat{\beta}) \geq \frac{1}{\left[\dfrac{\mathrm{Var}(\hat{\beta})}{[\sigma^2(X^TX)^{-1}]^2}\right]}$$

$$\geq \frac{1}{\left[\dfrac{\sigma^2(X^TX)^{-1}}{[\sigma^2(X^TX)^{-1}]^2}\right]}$$

$$\geq \sigma^2(X^TX)^{-1}$$

Kita melihat bahwa $\mathrm{Var}(\hat{\beta})=\sigma^2(X^TX)^{-1}$ memenuhi CRLB sebagai sebuah persamaan, sehingga terbukti $\hat{\beta}$ adalah taksiran tak bias dengan variansi minimum.

c. $\hat{\beta} \sim N_{p+1}(\beta,\sigma^2(X^TX)^{-1})$ (2.13c)

dimana $N_{p+1}(\beta,\sigma^2(X^TX)^{-1})$ menggambarkan suatu distribusi normal multivariat berdimensi-(p+1) dengan vektor rata-rata β ukuran (p+1)x1 dan $\sigma^2(X^TX)^{-1}$ matrik varian-covarian ukuran (p+1)x(p+1).

2. Vektor $\hat{Y}$ ukuran (nx1) dari nilai taksiran

$$\hat{Y} = X\hat{\beta}$$
$$= X(X^TX)^{-1}X^TY$$
$$= PY \qquad (2.14)$$

dimana

$$P = X(X^TX)^{-1}X^T \qquad (2.14a)$$

adalah matrik prediksi yang memenuhi sifat berikut.

Sifat 2.1

$\underset{\sim}{P}$ dan $(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P})$ adalah matrik-matrik simetri dan idempoten.

Bukti:

a. $\underset{\sim}{P}^T = [\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T]^T$

$= \underset{\sim}{X}[(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}]^T\underset{\sim}{X}^T$

$= \underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T$

$= \underset{\sim}{P}$ *(simetri)*

b. $\underset{\sim}{P}\underset{\sim}{P} = [\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T][\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T]$

$= \underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T$

$= \underset{\sim}{P}$ *(idempoten)*

c. $(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P})^T = \underset{\sim}{I}^T-\underset{\sim}{P}^T$

$= (\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P})$ *(simetri)*

d. $(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P})(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}) = \underset{\sim}{I}\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{I}\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{I}\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{P}\underset{\sim}{P}$

$= \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{P}$

$= (\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P})$ *(idempoten)* ∎

Vektor $\hat{\underset{\sim}{Y}}$ mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

a. $\mathbb{E}\,[\hat{\underset{\sim}{Y}}] = \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta}$ (2.14b)

Bukti :

$\mathbb{E}\,[\hat{\underset{\sim}{Y}}] = \mathbb{E}\,[\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{Y}]$

$= \underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\mathbb{E}[\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta}+\underset{\sim}{\varepsilon}]$

$= \underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta}$

$= \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta}$

b. $\mathrm{Var}(\hat{\underset{\sim}{Y}}) = \sigma^2\underset{\sim}{P}$ (2.14c)

Bukti:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\hat{\underset{\sim}{Y}}) &= \mathrm{Var}[\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{Y}] \\
&= \underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{\Sigma}_Y\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T \\
&= \sigma^2\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T \\
&= \sigma^2\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T \\
&= \sigma^2\underset{\sim}{P}
\end{aligned}$$

c. $\hat{\underset{\sim}{Y}} \sim N_n(\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta},\sigma^2\underset{\sim}{P})$ (2.14d)

3. Vektor (nx1) dari residual biasa

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{Y} - \hat{\underset{\sim}{Y}} &= \underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{P}\underset{\sim}{Y} \\
&= (\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P})\underset{\sim}{Y}
\end{aligned} \quad (2.15)$$

mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

a. $\mathbb{E}(\underset{\sim}{e}) = 0$ (2.15a)

Bukti:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\underset{\sim}{e}) &= \mathbb{E}(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{P}\underset{\sim}{Y}) \\
\mathbb{E}(\underset{\sim}{e}) &= \mathbb{E}(\underset{\sim}{Y}) - \underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\mathbb{E}[\underset{\sim}{Y}] \\
&= \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta} \\
&= \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta} \\
&= 0
\end{aligned}$$

b. $\mathrm{Var}(\underset{\sim}{e}) = \sigma^2(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P})$ (2.15b)

Bukti:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\underset{\sim}{e}) &= \mathrm{Var}[(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P})\underset{\sim}{Y}] \\
&= (\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P})\underset{\sim}{\Sigma}_Y(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P})^T \\
&= \sigma^2(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P})(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}) \\
&= \sigma^2(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P})
\end{aligned}$$

c. $\underset{\sim}{e} \sim N_n(0,\sigma^2(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}))$ (2.15c)

Apabila beberapa asumsi diatas tidak dipenuhi, maka akan terjadi kasus kolinieritas, heteroskedastisitas, atau otokorelasi. Dalam hal ini kita hanya akan membahas masalah *kolinieritas*, yaitu kalau ada *korelasi* antar variabel bebas X (Apabila harga mutlak koefisien korelasi mendekati 1).

Istilah kolinieritas mencakup hubungan linier sempurna seperti **definisi 2.1** dan juga dimana variabel-variabel bebas X *interkorelasi* akan tetapi tidak sempurna seperti hubungan berikut

$$a_1\underset{\sim}{x}_1 + a_2\underset{\sim}{x}_2 + \dots + a_k\underset{\sim}{x}_k + v_i = 0$$

dimana v_i adalah kesalahan pengganggu atau error.

2.2.3. Uji Hipotesa

Ada dua macam uji hipotesa untuk model regresi linier ganda, yaitu:

1. Uji hipotesa serentak untuk koefisien regresi

H_0: $\beta_0=\beta_1=\dots=\beta_p=0$

H_1: $\beta_0,\beta_1,\dots\beta_p$ tidak semua nol

Uji ini digunakan untuk mengetahui apakah ada hubungan linier antara variabel tak bebas y_i terhadap variabel-variabel bebas x_j (j=1,2,...,p).

2 Uji hipotesa parsial

$H_o: \beta_k=0$

$H_1: \beta_k \neq 0$

Uji ini digunakan untuk menguji apakah suatu variabel bebas x_j tertentu dapat dibuang dari model.

Statistik Penguji

Untuk uji hipotesa pertama memakai statistik

$$F^* = \frac{JKR/db}{JKS/db}$$

$$= \frac{JKR/p}{JKS/(n-(p+1)} \sim F_{(p,n-(p+1))}$$

Statistik uji hipotesa kedua memakai

$$F^* = \frac{\{(JKS(R)-JKS(F)\}/(db_r-db_f)}{JKS(F)/db_f} \sim F_{(p,n-(p+1))}$$

Keterangan:

JKS(R) adalah jumlah kuadrat sesatan model yang telah direduksi, dengan $\beta_k=0$.

JKS(F) adalah jumlah kuadrat sesatan model lengkap.

db_r adalah derajat bebas model yang direduksi.

db_f adalah derajat bebas model lengkap, $(n-(p+1))=n-p-1$.

$db_r-db_f=(n-p)-(n-(p+1))=1$

Kriteria Uji

Untuk menguji hipotesa H_o yaitu untuk mengetahui hubungan linier antara variabel yang satu dengan yang lainnya, dengan syarat jika

$F_{hitung} > F_{tabel}$ maka H_o ditolak

$F_{hitung} \leq F_{tabel}$ maka H_o diterima

Kesimpulan dari uji ini adalah:

- Jika H_o ditolak berarti ada hubungan linier antara variabel yang satu dengan variabel yang lain.

atau untuk uji parsial

- Jika H_o ditolak berarti ada hubungan linier antara variabel terikat dengan X_k.

Contoh 2.1

Model dan Hasil Regresi. **Tabel 2.1** adalah data suatu studi representatif tingkat pertumbuhan tabungan antar negara. Angka tabungan menjadi kecil jika sebagian besar dari populasi bukan anggota angkatan kerja. Distribusi umur dan angka pertumbuhan pendapatan merupakan inti dari siklus pertumbuhan tabungan. Variabel yang diukur adalah sebagai berikut

SR_i = y_i = angka rata-rata jumlah orang menabung dalam negara *i* pada periode 1960-1970.

$POP15_i$ = x_1 = rata-rata persentase populasi yang berumur dibawah 15 tahun pada periode 1960-1970.

$POP75_i$ = x_2 = rata-rata persentase populasi yang berumur diatas 75 tahun pada periode 1960-1970.

Tabel 2.1 . Data pertumbuhan tabungan antar negara.

i	negara	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	Australia	11,43	29,35	2,87	2329,68	2,87
2	Austria	12,07	23,32	4,41	1507,99	3,93
3	Belgium	13,17	23,80	4,43	2108,47	3,82
4	Bolivia	5,75	41,89	1,67	189,13	0,22
5	Brazil	12,88	42,19	0,83	728,47	4,56
6	Canada	8,79	31,72	2,85	2982,88	2,43
7	Chile	0,60	39,74	1,34	662,86	2,67
8	China(Taiwan)	11,90	44,75	0,67	289,52	6,51
9	Colombia	4,98	46,64	1,06	276,65	3,08
10	Costa Rica	10,78	47,64	1,14	471,24	2,80
11	Denmark	16,85	24,42	3,93	2496,53	3,99
12	Ecuador	3,59	46,31	1,19	287,77	2,19
13	Finland	11,24	27,84	2,37	1681,25	4,32
14	France	12,64	25,06	4,70	2213,82	4,52
15	Gemany(F.R.)	12,55	23,31	3,35	2457,12	3,44
16	Greece	10,67	25,62	3,10	870,85	6,28
17	Guatemala	3,01	46,05	0,87	289,71	1,48
18	Honduras	7,70	47,32	0,58	232,44	3,19
19	Iceland	1,27	34,03	3,08	1900,10	1,12
20	India	9,00	41,31	0,96	88,94	1,54
21	Ireland	11,34	31,16	4,19	1139,95	2,99
22	Italy	14,28	24,52	3,48	1390,00	3,54
23	Japan	21,10	27,01	1,91	1257,28	8,21
24	Korea	3,98	41,74	0,91	207,68	5,81
25	Luxembourg	10,35	21,80	3,73	2449,39	1,57
26	Malta	15,48	32,54	2,47	601,65	8,12
27	Norway	10,25	25,95	3,67	2231,03	3,62
28	Netherlands	14,65	24,71	3,25	1740,70	7,66
29	New Zealand	10,67	32,61	3,17	1487,52	1,76
30	Nicaragua	7,30	45,04	1,21	325,54	2,48
31	Panama	4,44	43,56	1,20	568,56	3,61
32	Paraguay	2,02	41,18	1,05	220,56	1,03
33	Peru	12,70	44,19	1,28	400,06	0,67
34	Philippines	12,78	46,26	1,12	152,01	2,00
35	Portugal	12,49	28,96	2,85	579,51	7,48
36	South Africa	11,14	31,94	2,28	651,11	2,19
37	South Rhodesia	13,30	31,92	1,52	250,96	2,00
38	Spain	11,77	27,74	2,87	768,79	4,35
39	Sweden	6,86	21,44	4,54	3299,49	3,01
40	Switzerland	14,13	23,49	3,73	2630,96	2,70
41	Turkey	5,13	43,42	1,08	389,66	2,96
42	Tunisia	2,81	46,12	1,21	249,87	1,13
43	United Kingdom	7,81	23,27	4,46	1813,93	2,01
44	United States	7,56	29,81	3,43	4001,89	2,45
45	Venezuela	9,22	46,40	0,90	813,39	0,53
46	Zambia	18,56	45,25	0,56	138,33	5,14
47	Jamaica	7,72	41,12	1,73	380,47	10,23
48	Uruguay	9,24	28,13	2,72	766,54	1,88
49	Libya	8,89	43,69	2,07	123,58	16,71
50	Malaysia	4,71	47,20	0,66	242,69	5,08

Sumber: Belsley,D.A., Kuh,E., and Welsch,R.E.(1980), hal 41

DPI_i = x_3 = rata-rata level pendapatan riil perkapita dalam negara *i* pada periode 1960-1970 diukur dalam US$.

ΔDPI_i = x_4 = rata-rata persentase laju pertumbuhan DPI_i pada periode 1960-1970.

Model persamaan regresinya adalah

$$SR_i = \beta_0 + \beta_1 POP15_i + \beta_2 POP75_i + \beta_3 DPI_i + \beta_4 \Delta DPI_i + \varepsilon_i$$

atau

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \varepsilon_i$$

Dari tampilan data yang disajikan dalam **tabel 2.1**, akan dicari taksiran persamaan garis regresi linier dengan estimasi kuadrat terkecil. Dalam hal ini, untuk lebih memudahkan perhitungan, digunakan program microstat untuk pengolahan data tersebut. Hasil analisis regresi dengan program microstat disajikan pada **Lampiran 1**.

Analisis. Dari hasil perhitungan dengan program microstat dapat dibuat taksiran persamaan regresi sebagai berikut

$$Y = 28,5661 - 0,4612X_1 - 1,6915X_2 - 0,000337X_3 + 0,4097X_4$$

1. Hipotesis

   $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$

   $H_1 : \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ tidak semuanya nol

2. Nilai kritis

Misalkan digunakan tingkat signifikan 5%, nilai kritis F dengan derajat kebebasan $df_1=4$ dan $df_2=45$ adalah

$$F_{(0,05;4;45)} = 2,58$$

3. Nilai hitung

Nilai F hitung adalah

$$F_{hitung} = 5,756$$

4. Kesimpulan

Nilai $F_{hit} = 5,756$ lebih besar dari $F_{(0,05;4;45)} = 2,58$. Oleh karena itu hipotesis nol, yaitu H_0 ditolak. Ini berarti ada variabel bebas, sekurang-kurangnya satu, memberikan kontribusi untuk memprediksi nilai variabel terikat Y. Atau dengan kata lain ada hubungan linier antara variabel bebas dengan variabel terikat. Kemungkinan salah atas penolakan H_0 tersebut sebesar nilai probabilitas yang dihasilkan, yaitu 0,0007904 persen.■

2.3. Matrik Prediksi

Matrik prediksi $\underset{\sim}{P}=\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T$ memiliki sifat-sifat penting yang dapat digunakan untuk memperoleh beberapa hasil pada pembahasan *pengamatan berpengaruh*. Disebut matrik prediksi karena matrik itu, jika dikalikan dengan $\underset{\sim}{Y}$, menghasilkan nilai prediksi untuk $\underset{\sim}{Y}$, yaitu $\hat{\underset{\sim}{Y}}$.

Andaikan p_{ij} adalah elemen ke-*ij* dari $\underset{\sim}{P}$

$$p_{ij} = x_i^T(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}x_j \qquad , i,j = 1,2,\ldots,n \qquad (2.16)$$

maka elemen diagonal ke-*i* dari $\underset{\sim}{P}$ adalah

$$p_{ii} = x_i^T(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}x_i \qquad , i = 1,2,\ldots,n \qquad (2.17)$$

dimana x_i^T dan x_j masing-masing adalah baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari matrik $\underset{\sim}{X}$.

Lemma 2.3

Invers matrik partisi. Diberikan $\underset{\sim}{A}$ suatu matrik partisi.

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_{11} & \underset{\sim}{A}_{12} \\ \underset{\sim}{A}_{21} & \underset{\sim}{A}_{22} \end{bmatrix}$$

a. Jika $\underset{\sim}{A}$ dan $\underset{\sim}{A}_{11}$ nonsingular, maka

$$\underset{\sim}{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_{11}^{-1} + \underset{\sim}{A}_{11}^{-1}\underset{\sim}{A}_{12}\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{A}_{21}\underset{\sim}{A}_{11}^{-1} & -\underset{\sim}{A}_{11}^{-1}\underset{\sim}{A}_{12}\underset{\sim}{M} \\ -\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{A}_{21}^{-1}\underset{\sim}{A}_{11} & \underset{\sim}{M} \end{bmatrix}$$

dimana $\underset{\sim}{M} = (\underset{\sim}{A}_{22} - \underset{\sim}{A}_{21}\underset{\sim}{A}_{11}^{-1}\underset{\sim}{A}_{12})^{-1}$.

b. Jika $\underset{\sim}{A}$ dan $\underset{\sim}{A}_{22}$ nonsingular, maka

$$\underset{\sim}{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{N} & -\underset{\sim}{N}\underset{\sim}{A}_{12}\underset{\sim}{A}_{22}^{-1} \\ -\underset{\sim}{A}_{22}^{-1}\underset{\sim}{A}_{21}\underset{\sim}{N} & \underset{\sim}{A}_{22}^{-1} + \underset{\sim}{A}_{22}^{-1}\underset{\sim}{A}_{21}\underset{\sim}{N}\underset{\sim}{A}_{12}\underset{\sim}{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

dimana $\underset{\sim}{N} = (\underset{\sim}{A}_{11} - \underset{\sim}{A}_{12}\underset{\sim}{A}_{22}^{-1}\underset{\sim}{A}_{21})^{-1}$.

Bukti:

Dibuktikan dengan menunjukkan bahwa $\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{I}$.

a. Karena $\mathbf{M}=(\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1}$, maka

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}+\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{M}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{M} \\ -\mathbf{M}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \mathbf{I}+\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{M}\mathbf{A}_{21}-\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{M}\mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}-\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{M}(\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}) \\ -\mathbf{M}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{M}\mathbf{A}_{21} & \mathbf{M}(\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$=\mathbf{I}$$

b. Karena $\mathbf{N}=(\mathbf{A}_{11}-\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1}$, maka

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{N} & -\mathbf{N}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{N} & \mathbf{A}_{22}^{-1}+\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{N}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \mathbf{N}(\mathbf{A}_{11}-\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}) & \mathbf{N}\mathbf{A}_{12}-\mathbf{N}\mathbf{A}_{12}\mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{N}(\mathbf{A}_{11}-\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})+\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} & -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{N}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{I}+\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{N}\mathbf{A}_{12} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$=\mathbf{I}$$

Karena terbukti $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$ maka teorema terbukti.■

Sifat 2.2

Ambil $\underset{\sim}{X}=(\underset{\sim}{X}_1:\underset{\sim}{X}_2)$ dimana $\underset{\sim}{X}_1$ dan $\underset{\sim}{X}_2$ masing-masing berukuran (nxr) dan $nx((p+1)-r))$ dengan rank$(\underset{\sim}{X}_1)=r$ dan rank$(\underset{\sim}{X}_2)=(p+1)-r$. Andaikan bahwa $\underset{\sim}{P}_1=\underset{\sim}{X}_1(\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_1)^{-1}\underset{\sim}{X}_1^T$ matrik prediksi untuk $\underset{\sim}{X}_1$ dan $\underset{\sim}{W}=(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_1)\underset{\sim}{X}_2$ proyeksi $\underset{\sim}{X}_2$ pada komplemen orthogonal $\underset{\sim}{X}_1$. Akhirnya diandaikan bahwa $\underset{\sim}{P}_2=\underset{\sim}{W}(\underset{\sim}{W}^T\underset{\sim}{W})^{-1}\underset{\sim}{W}^T$ matrik prediksi untuk $\underset{\sim}{W}$. Maka $\underset{\sim}{P}$ dapat dinyatakan sebagai

$$\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T = \underset{\sim}{X}_1(\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_1)^{-1}\underset{\sim}{X}_1^T$$

$$+\ (\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_1)\underset{\sim}{X}_2(\underset{\sim}{X}_2^T(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_1)\underset{\sim}{X}_2)^{-1}\underset{\sim}{X}_2^T(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_1) \qquad (2.18)$$

atau

$$\underset{\sim}{P}=\underset{\sim}{P}_1+\underset{\sim}{P}_2 \qquad (2.19)$$

Bukti :

Diketahui $\underset{\sim}{X} = (\underset{\sim}{X}_1:\underset{\sim}{X}_2)$ maka $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\underset{\sim}{P} = [\underset{\sim}{X}_1 \quad \underset{\sim}{X}_2]\begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_1 & \underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_2 \\ \underset{\sim}{X}_2^T\underset{\sim}{X}_1 & \underset{\sim}{X}_2^T\underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1^T \\ \underset{\sim}{X}_2^T \end{bmatrix} \qquad (2.20)$$

Dengan lemma 2.3a untuk menghitung invers dari $(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})$ dalam bentuk dipartisikan, didapat

$$(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}=\begin{bmatrix} (\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_1)^{-1}+(\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_1)^{-1}\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_2\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{X}_2^T\underset{\sim}{X}_1(\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_1)^{-1} & -(\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_1)^{-1}\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_2\underset{\sim}{M} \\ -\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{X}_2^T\underset{\sim}{X}_1(\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_1)^{-1} & \underset{\sim}{M} \end{bmatrix}$$

(2.21)

dimana $\underset{\sim}{M} = (\underset{\sim}{X}_2^T\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{X}_2^T\underset{\sim}{X}_1(\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_1)^{-1}\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_2)^{-1} = (\underset{\sim}{X}_2^T(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_1)\underset{\sim}{X}_2)^{-1}$

Dengan mensubstitusikan (2.21) ke (2.20), didapatkan

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{P} &= \underset{\sim}{P}_1 + \underset{\sim}{P}_1\underset{\sim}{X}_2\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{X}_2^T\underset{\sim}{P}_1 - \underset{\sim}{P}_1\underset{\sim}{X}_2\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{X}_2^T - \underset{\sim}{X}_2\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{X}_2^T\underset{\sim}{P}_1 + \underset{\sim}{X}_2\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{X}_2^T \\ &= \underset{\sim}{P}_1 + (\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_1)\underset{\sim}{X}_2\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{X}_2^T(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_1) \\ &= \underset{\sim}{P}_1 + (\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_1)\underset{\sim}{X}_2(\underset{\sim}{X}_2^T(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_1)\underset{\sim}{X}_2)^{-1}\underset{\sim}{X}_2^T(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_1) \\ &= \underset{\sim}{P}_1 + \underset{\sim}{P}_2 \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Sifat 2.2 diatas menunjukan bahwa matrik prediksi $\underset{\sim}{P}$ dapat diuraikan menjadi dua (atau lebih) matrik prediksi.

Sifat 2.4

Elemen ke-*ij* dan elemen diagonal ke-*i* dari $\underset{\sim}{P}$ masing-masing adalah p_{ij} dan p_{ii}. Untuk *i*,*j*=1,2,...,n, maka berlaku

a. $0 \le p_{ii} \le 1$ untuk semua *i*

b. Jika $p_{ii} = 1$ atau 0 , maka $p_{ij} = 0$

c. $p_{ii} + \dfrac{e_i^2}{\underset{\sim}{e}^T\underset{\sim}{e}} \le 1$

Bukti :

a. Dengan mengingat sifat 2.1 maka elemen diagonal ke-*i* dari matrik $\underset{\sim}{P}$ dapat ditulis sebagai

$$p_{ii} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^2 = p_{ii}^2 + \sum_{i\neq j} p_{ij}^2 \qquad (2.22)$$

dapat dibawa ke bentuk

$$p_{ii} - p_{ii}^2 = \sum_{i\neq j} p_{ij}^2$$

karena $\sum_{i \neq j} p_{ij}^2$ positif maka nilai p_{ii} yang mungkin adalah nilai dalam interval $0 \leq p_{ii} \leq 1$, untuk semua *i*.

b. Dari persamaan (2.22) jelas bahwa jika $p_{ii}=0$ atau $p_{ii}=1$ maka $p_{ij}=0$ untuk semua $i \neq j$.

c. Didefinisikan $\underset{\sim}{Z}=(\underset{\sim}{X}:\underset{\sim}{Y})$, $\underset{\sim}{P}_X=\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T$, $\underset{\sim}{P}_Z=\underset{\sim}{Z}(\underset{\sim}{Z}^T\underset{\sim}{Z})^{-1}\underset{\sim}{Z}^T$ dan berdasarkan (2.18) maka diperoleh

$$\underset{\sim}{P}_Z = \underset{\sim}{P}_X + \frac{(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_X)\underset{\sim}{Y}\underset{\sim}{Y}^T(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_X)}{\underset{\sim}{Y}^T(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_X)\underset{\sim}{Y}}$$

$$= \underset{\sim}{P}_X + \frac{\underset{\sim}{e}\underset{\sim}{e}^T}{\underset{\sim}{e}^T\underset{\sim}{e}} \qquad (2.23)$$

karena elemen diagonal dari matrik $\underset{\sim}{P}_Z$ adalah kurang atau sama dengan satu, maka *d)* terbukti.■

Suatu masalah khusus dari (2.19) diperoleh apabila $\underset{\sim}{X}_2$ hanya memuat satu kolom. Dalam hal ini, $\underset{\sim}{P}$ dapat ditulis

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{X}_1(\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}_1^{-1} + \frac{(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_1)\underset{\sim}{X}_2\underset{\sim}{X}_2^T(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_1)}{\underset{\sim}{X}_2^T(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_1)\underset{\sim}{X}_2} \qquad (2.24)$$

$$= \underset{\sim}{P}_1 + \frac{\underset{\sim}{e}_{X_2 . X_1}\underset{\sim}{e}_{X_2 . X_1}^T}{\underset{\sim}{e}_{X_2 . X_1}^T\underset{\sim}{e}_{X_2 . X_1}} \qquad (2.24a)$$

dimana $e_{X_2 . X_1}$ vektor residual didapatkan apabila $\underset{\sim}{X}_2$ diregresikan pada $\underset{\sim}{X}_1$. Yang menarik dari masalah ini yaitu $\underset{\sim}{X}_2$ adalah vektor unit u_i ke-*i*, sebagai penyelidikan untuk model outlier perubahan rata-rata (*mean-shift outlier model*) yaitu pengamatan ke-*i* mempunyai intercept berbeda dari pengamatan lainnya, yang diberikan oleh

$$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{X}_1\underset{\sim}{\beta}_1 + u_i\underset{\sim}{\beta}_2 + \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{2.25}$$

Ambil p_{1ij} sebagai elemen ke-ij dari $\underset{\sim}{P}_1$. Maka persamaan (2.24) menyatakan bahwa

$$p_{ii} = p_{1ii} + \frac{(1-p_{1ii})^2}{1-p_{1ii}} = 1$$

dan

$$p_{ij} = p_{1ij} + \frac{p_{1ij}(1-p_{1ii})}{1-p_{1ii}} = 0 \qquad \text{untuk } j \neq i$$

yang sesuai dengan sifat 2.4a.

Lemma 2.4

Determinan dari suatu matrik partisi. Misalkan $\underset{\sim}{S}$ terpartisi sebagai

$$\underset{\sim}{S} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} \\ \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} \end{bmatrix}$$

a. Jika $\underset{\sim}{A}$ nonsingular, maka $\det(\underset{\sim}{S})=\det(\underset{\sim}{A})\det(\underset{\sim}{D}-\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{B})$.

b. Jika $\underset{\sim}{D}$ nonsingular, maka $\det(\underset{\sim}{S})=\det(\underset{\sim}{D})\det(\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{C})$.

Bukti :

Matrik bujursangkar yang determinannya bukan nol memiliki invers. Oleh karena $\det(\underset{\sim}{S})\neq 0$ maka $\underset{\sim}{S}$ mempunyai invers (matrik nonsingular).

a. Karena $\underset{\sim}{A}$ nonsingular, dengan lemma 2.3a didapat invers dari $\underset{\sim}{S}$

$$\underset{\sim}{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}^{-1} + \underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{A}^{-1} & -\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{M} \\ -\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{A}^{-1} & \underset{\sim}{M} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underset{\sim}{I} & -\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{B} \\ 0 & \underset{\sim}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}^{-1} & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{I} & 0 \\ -\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{A}^{-1} & \underset{\sim}{I} \end{bmatrix}$$

dimana $\underset{\sim}{M}=(\underset{\sim}{D}-\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{B})^{-1}$, dan diperoleh

$$\det(\underset{\sim}{S}^{-1}) = \left(\det(\underset{\sim}{I})\det(\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{M})\det(\underset{\sim}{I})\right)$$

$$= \det(\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{M})$$

$$= \det\left(\underset{\sim}{A}^{-1}(\underset{\sim}{D}-\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{B})^{-1}\right)$$

Dari lemma 2.1

$$\det(\underset{\sim}{S}) = \frac{1}{\det(\underset{\sim}{S}^{-1})}$$

$$= \frac{1}{\det\left(\underset{\sim}{A}^{-1}(\underset{\sim}{D}-\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{B})^{-1}\right)}$$

$$= \det\left(\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{D}-\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{B})\right)$$

$$= \det(\underset{\sim}{A})\det(\underset{\sim}{D}-\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{B})$$

b. Karena $\underset{\sim}{D}$ nonsingular, menggunakan Lemma 2.3b didapat

$$\underset{\sim}{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{N} & -\underset{\sim}{N}\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{D}^{-1} \\ -\underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{N} & \underset{\sim}{D}^{-1}+\underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{N}\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{D}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{I} & 0 \\ -\underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{N} & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{D}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{I} & -\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{D}^{-1} \\ 0 & \underset{\sim}{I} \end{bmatrix}$$

dimana $\underset{\sim}{N}=(\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{C})^{-1}$, diperoleh

$$\begin{aligned} \det(\underset{\sim}{S}^{-1}) &= \det(\underset{\sim}{I})\det(\underset{\sim}{N}\underset{\sim}{D}^{-1})\det(\underset{\sim}{I}) \\ &= \det(\underset{\sim}{N}\underset{\sim}{D}^{-1}) \\ &= \det\left((\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{C})^{-1}\underset{\sim}{D}^{-1}\right) \end{aligned}$$

Dari lemma 2.1

$$\begin{aligned} \det(\underset{\sim}{S}) &= \frac{1}{\det(\underset{\sim}{S}^{-1})} \\ &= \frac{1}{\det\left((\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{C})^{-1}\underset{\sim}{D}^{-1}\right)} \\ &= \det\left(\underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{C})\right) \\ &= \det(\underset{\sim}{D})\det(\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{C}) \end{aligned}$$

Jadi Lemma terbukti.■

Lemma 2.5

Misalkan $\underset{\sim}{B}$ dan $\underset{\sim}{C}$ matrik berukuran *kxm*. Jika $\underset{\sim}{A}$ suatu matrik nonsingular berukuran *kxk*, maka

$$\det(\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{C}^{T}) = \det(\underset{\sim}{A})\det(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{C}^{T}\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{B})$$

Bukti :

Dengan lemma 2.4a kita peroleh

$$\det\begin{bmatrix} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} \\ \underset{\sim}{C}^T & \underset{\sim}{I} \end{bmatrix} = \det(\underset{\sim}{A})\det(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{C}^T\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{B})$$

dan dengan lemma 2.4b kita dapatkan

$$\det\begin{bmatrix} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} \\ \underset{\sim}{C}^T & \underset{\sim}{I} \end{bmatrix} = \det(\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{C}^T)$$

Karena itu

$$\det(\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{C}^T) = \det(\underset{\sim}{A})\det(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{C}^T\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{B})$$

terbukti.■

Contoh 2.2

Misalkan pencocokan garis lurus pada suatu himpunana data yang terdiri dari lima titik ; empat titik terletak pada x=1 dan satu titik terletak pada x=4. Dalam kasus ini maka diperoleh

$$\underset{\sim}{X}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 20 \end{bmatrix} \qquad (\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 20 & -8 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$$

dan

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{trace}(\underset{\sim}{P}) = \sum p_{ii} = 2 = \text{rank}(\underset{\sim}{P})$$

Karena $p_{5,5} = 1$, dengan sifat 2.4b maka semua $p_{5,j} = p_{j,5} = 0$ untuk $j = 1,2,3,4$. Juga karena $p_{5,5} = 1$ maka penghapusan baris ke-5 dari $\underset{\sim}{X}$ menghasilkan suatu rank dari model tak sempurna, yaitu $\text{rank}(\underset{\sim}{X}_{(5)}) = 1$. ∎

Contoh 2.3

Tabel 2.2 adalah bagian dari data dalam suatu percobaan mempelajari hubungan perbedaan waktu yang menyebabkan tekanan selama pengerasan dari 14 contoh semen terhadap campuran semen. Variabel yang ditunjukan dalam **tabel 2.2** menjelaskan berat dari lima bahan campuran clinker (diukur sebagai persentase berat dari setiap sampel).

Tabel 2.2. Data semen.

no	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Total
1	6	7	26	60	2.5	101.5
2	15	1	29	52	2.3	99.3
3	8	11	56	20	5.0	100.0
4	8	11	31	47	2.4	99.4
5	6	7	52	33	2.4	100.4
6	9	11	55	22	2.4	99.4
7	17	3	71	6	2.1	99.1
8	22	1	31	44	2.2	100.2
9	18	2	54	22	2.3	98.3
10	4	21	47	26	2.5	100.5
11	23	1	40	34	2.2	100.2
12	9	11	66	12	2.6	100.6
13	8	10	68	12	2.4	100.4
14	18	1	17	61	2.1	99.1

Sumber: Chatterjee,S. and Hadi,A. S. (1987) hal 36.

Tabel 2.3. Matrik Prediksi untuk Data Semen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0.60													
2	0.15	0.26												
3	0.01	0.02	0.99											
4	0.05	0.15	0.01	0.34										
5	0.31	0.13	-0.02	0.04	0.36									
6	-0.07	0.04	0.01	0.17	0.07	0.19								
7	-0.17	0.04	-0.05	-0.08	0.11	0.13	0.39							
8	0.09	0.05	0.00	-0.05	-0.10	-0.07	0.03	0.41						
9	-0.23	0.16	0.05	0.11	0.02	0.16	0.28	-0.01	0.38					
10	-0.02	-0.15	-0.02	0.27	-0.11	0.21	-0.11	0.05	-0.10	0.72				
11	0.03	0.00	0.00	-0.12	-0.12	-0.07	0.11	0.43	0.01	0.04	0.47			
12	0.08	-0.09	0.06	-0.06	0.12	0.08	0.16	0.06	-0.02	0.15	0.11	0.25		
13	0.10	-0.04	-0.02	-0.05	0.21	0.10	0.21	-0.02	0.03	0.07	0.03	0.24	0.27	
14	0.08	0.26	-0.03	0.23	-0.01	0.05	-0.04	0.16	0.16	-0.01	0.09	-0.15	-0.14	0.37

Matrik Prediksi untuk data dalam **tabel 2.2** diperlihatkan dalam **tabel 2.3**. Pemeriksaan tabel ini menunjukkan elemen diagonal $\underset{\sim}{P}$ memenuhi sifat matrik prediksi. Sebagai contoh, trace($\underset{\sim}{P}$)=6, dan dari sifat 2.4a $0,7 \le p_{ii} \le 1$ untuk semua *i*.■

2.4. Pengamatan Berpengaruh

Kita mengetahui, biasanya tidak semua pengamatan mempunyai pengaruh atau peran yang sama dalam pencocokan kuadrat terkecil dan kesimpulan analisanya.

Outlier, titik high-leverage dan pengamatan berpengaruh merupakan tiga konsep yang saling berhubungan. Kita bahas bagaimana interaksi diantara ketiga konsep tersebut, yaitu.

Outlier. Dalam kerangka regresi linier, outlier didefinisikan sebagai pengamatan yang mempunyai nilai residual absolut yang besar dibandingkan dengan pengamatan yang lain dalam himpunan data.

High-Leverage. Titik high-leverage adalah suatu pengamatan yang mempunyai harga p_{ii} (elemen diagonal ke-*i* dari $\underset{\sim}{P}$) yang besar dibandingkan dengan pengamatan yang lain dalam himpunan data. Suatu pengamatan yang terisolasi dalam ruang-$\underset{\sim}{X}$ akan merupakan titik high-leverage. Suatu titik high-leverage dapat dipandang sebagai outlier dalam ruang-$\underset{\sim}{X}$. Konsep high-leverage sepenuhnya berhubungan dengan variabel prediktor dan tidak dengan variabel respon.

Pengamatan Berpengaruh. Pengamatan berpengaruh adalah pengamatan-pengamatan yang secara individu maupun berkelompok terlalu mempengaruhi pencocokan model regresi dibandingkan dengan pengamatan yang lain dalam himpunan data. Definisi ini nampak subyektif, tapi memberikan implikasi bahwa pengamatan-pengamatan dapat diurutkan dengan cara yang sesuai menurut beberapa ukuran dari pengaruhnya.

Dalam hubungan ketiga konsep tersebut ada 4 hal yang perlu dicatat, yaitu :

1. Titik outlier belum tentu merupakan pengamatan berpengaruh.
2. Pengamatan berpengaruh belum tentu suatu outlier.
3. Jika tidak terdapat residual yang besar pada hasil analisis regresi, bukan berarti model regresi yang ada telah cocok, tapi mungkin terdapat pengamatan dengan residual yang besar tertutup oleh pengamatan yang lain. Pada kenyataannya terdapat kecenderungan, titik dengan high-leverage mempunyai sisaan yang kecil dan mempengaruhi pencookan model secara tak seimbang.
4. Seperti halnya pada outlier, titik high-leverage belum tentu berpengaruh dan pengamatan berpengaruh tidak harus titik high-leverage. Tapi, bagaimanapun titik high-leverage kemungkinan besar adalah berpengaruh.

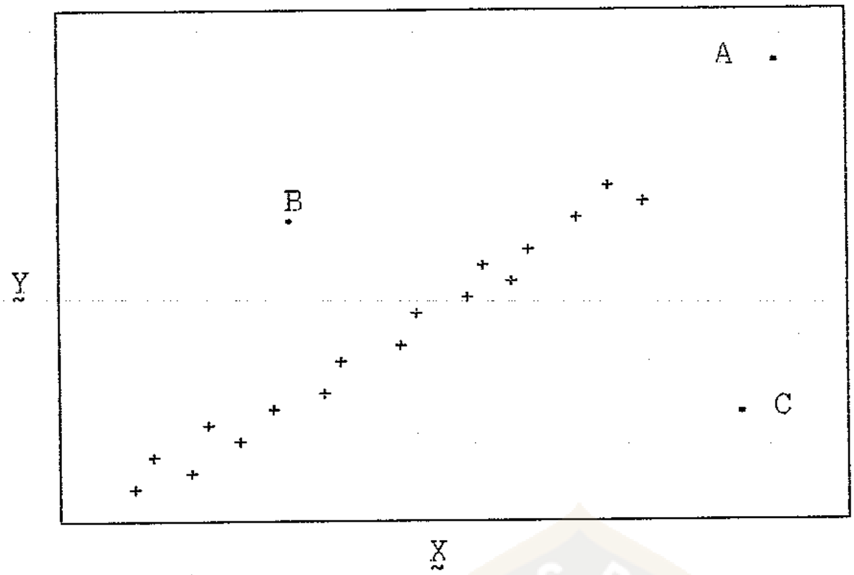
Untuk lebih jelasnya diberikan contoh berikut sebagai ilustrasi dari pernyataan-pernyataan tersebut.

Contoh 2.4

Misalkan ada titik-titik data yang dibentuk dengan tanda "+" dan akan ditambahkan 3 data yang ditandai dengan A, B dan C, seperti yang terlihat pada gambar 2.1. Jika hanya titik A yang dimasukkan ke dalam data, maka A mempunyai harga sisaan yang kecil karena Y-nya terletak di dekat garis regresi. A merupakan titik high-leverage karena merupakan outlier dalam ruang-X, tapi tidak berpengaruh besar pada pencocokan persamaan regresi. Jelaslah bahwa A merupakan contoh titik high-leverage yang bukan outlier maupun titik berpengaruh. A tidak berpengaruh pada penaksiran koefisien regresi, tapi, karena A suatu titik ekstrim pada ruang-X, mungkin berpengaruh pada standard error dari koefisien regresi.

Bila hanya titik B yang dimasukkan ke dalam data, maka B tidak akan menjadi titik high-leverage karena letaknya dekat dengan pusat X, tapi jelas akan merupakan outlier dan titik berpengaruh. B mempunyai sisaan yang besar, dan pemasukannya tidak akan merubah slope tapi intercept dari garis regresi. Pemasukannya juga akan merubah penaksiran variansi error, dan karena itu juga mempengaruhi variansi taksiran koefisien.

Bila hanya titik C yang dimasukkan ke dalam data, maka C akan merupakan outlier, titik high-leverage sekaligus titik berpengaruh. Sebagai outlier karena C akan memiliki harga sisaan yang besar. Merupakan titik high-leverage karena C adalah titik ekstrim dalam ruang-X. Sebagai titik



Gambar 2.1. Suatu contoh yang menggambarkan perbedaan antara outlier, titik high-leverage dan pengamatan berpengaruh.

berpengaruh karena pemasukannya secara substansial akan mengubah karakteristik dari persamaan regresi yang dicocokkan.■