BAB II

MATERI PENUNJANG

Dalam bab berikut ini disajikan beberapa pengertian yang mendukung untuk pembahasan selanjutnya mengenai penggunaan metode Adams pada penyelesaian persamaan diferensial biasa orde pertama secara numerik.

2.1 Kesalahan Metode Numerik

Setiap metode numerik yang digunakan dalam perhitungan dapat menimbulkan kesalahan. Kesalahan numerik timbul dari penggunaan pendekatan untuk menyatakan operasi dan besaran matematis yang eksak. Kesalahan numerik sama dengan keketidaksesuaian (discrepancy) antara harga yang sebenarnya dan harga pendekatan yang dapat dirumuskan sebagai berikut;

$$e_t = harga\ sebenarnya - harga\ pendekatan \qquad .....(2.1.1)$$

e_t menunjukkan nilai eksak kesalahan dan subskrip t menyatakan bahwa e adalah kesalahan sejati (true error).

Dari ketiga besaran di atas hanya satu yang diketahui yaitu harga pendekatan. Tetapi kita seringkali mengetahui sesuatu hal tentang kesalahan tanpa mengetahui harganya secara pasti. Berikut ini beberapa jenis kesalahan yang sering dijumpai.

Kesalahan absolut (e_x) didefinisikan sebagai beda antara harga sebenarnya dengan harga pendekatan ;

$$e_x = |x - \bar{x}| \qquad \text{.....(2.1.2)}$$

dimana x = harga sebenarnya

$\bar{x}$ = harga pendekatan

Kesalahan relatif (e_r) adalah kesalahan absolut dibagi dengan harga pendekatannya ;

$$e_r = e_x / \bar{x} \qquad \text{.....(2.1.3)}$$

Ada tiga macam dasar kesalahan dalam perhitungan numerik ; kesalahan inheren, kesalahan pemotongan, dan kesalahan pembulatan.

Kesalahan inheren atau kesalahan yang tak dapat dipisahkan adalah kesalahan di dalam besaran data, yang disebabkan oleh ketidakpastian pengukuran, baik oleh pengukuran langsung ataupun oleh harga pendekatan yang diperlukan untuk menyatakan suatu bilangan dengan jumlah digit tak terbatas.

Kesalahan inheren diacu sebagai kesalahan dalam data, berikutnya data diolah oleh komputer dengan menggunakan prosedur numerik. Kedua macam kesalahan lainnya adalah kesalahan yang muncul oleh prosedur numerik itu sendiri.

Kesalahan pemotongan disebabkan oleh pemotongan dari proses matematika tak terbatas. Banyak prosedur yang digunakan pada perhitungan numerik adalah tak terbatas sehingga kesalahan pemotongan ini merupakan bagian kesalahan utama. Pada persamaan diferensial kesalahan pemotongan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.1

Kesalahan pemotongan τ_i adalah jumlah dari solusi persamaan diferensial yang gagal memenuhi pendekatan persamaan. Lebih tepatnya adalah norm dari beda antara solusi persamaan diferensial dan solusi numerik dibagi dengan ukuran langkah yang digunakan.

Kesalahan pembulatan adalah kesalahan yang terjadi karena komputer hanya dapat menyatakan besaran-besaran dalam sejumlah digit berhingga. Banyak prosedur yang digunakan pada perhitungan numerik adalah tak terbatas sehingga kesalahan pembulatan ini merupakan bagian kesalahan utama.

2.2 Persamaan Diferensial Biasa Orde Pertama

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau beberapa turunan fungsi yang tak diketahui. Istilah persamaan diferensial (*aequatio differentialis*) diperkenalkan oleh Leibniz pada tahun 1676. Persamaan diferensial yang memuat turunan biasa disebut persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial yang memuat turunan parsial disebut persamaan diferensial parsial.

Definisi 2.2.1

Suatu persamaan diferensial biasa orde n adalah suatu persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad \ldots..(2.2.1)$$

dimana $y, y', \ldots, y^{(n)}$ semua nilainya ditentukan oleh x.

Selanjutnya persamaan diferensial digolongkan dalam linear dan tak-linear. Suatu fungsi disebut linear jika fungsi f dalam persamaan (2.2.1) meliputi y dan turunannya secara linear.

Peubah bebas x terletak dalam suatu selang I (I boleh berhingga atau tak berhingga), fungsi f dan y bernilai real.

Contoh dari definisi 2.2.1,

$$y' + xy = 0 \qquad \text{.....(2.2.2)}$$

$$y'' - y = 0 \qquad \text{.....(2.2.3)}$$

Persamaan (2.2.2) adalah suatu persamaan diferensial biasa orde pertama dan persamaan (2.2.3) adalah persamaan diferensial biasa orde kedua. ◆

Definisi 2.2.2

Suatu penyelesaian persamaan diferensial biasa pada persamaan (2.2.1) adalah suatu fungsi $y(x)$ yang ditentukan pada suatu selang bagian $J \subset I$ yang secara identik memenuhi persamaan (2.2.1) pada seluruh selang J.

Sebagai contoh kita perhatikan persamaan (2.2.3) yang mempunyai penyelesaian yaitu $y_1 = e^x$ dan $y_2 = e^{-x}$. Kita ambil $y_1 = e^x$, dapat dilihat bahwa,

$$y''(x) - y(x) = (e^x)'' - e^x = e^x - e^x = 0$$

Jadi $y_1 = e^x$ untuk x dalam selang real $(-\infty, +\infty)$ adalah suatu penyelesaian dari

$$y'' - y = 0.$$ ◆

Definisi 2.2.3

Fungsi $f(x,y)$ dikatakan memenuhi syarat Lipschitz pada variabel y dalam set $D \subset \Re^2$, jika diberikan konstanta $L > 0$ dengan syarat bahwa

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \; |y_1 - y_2|$$

dimana (x, y_1), $(x, y_2) \in D$. Konstanta L disebut konstanta Lipschitz untuk f.

Contoh untuk definisi 2.2.3:

Jika $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 4\}$ dan $f(x, y) = x|y|$, maka untuk setiap pasangan titik (x, y_1) dan (x, y_2) dalam D didapat

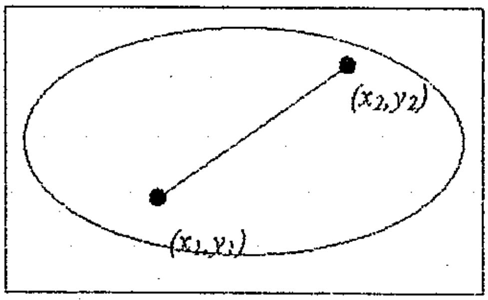
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x|y_1| - x|y_2|| = |x| \, ||y_1|-|y_2|| \leq 2 \; |y_1 - y_2|$$

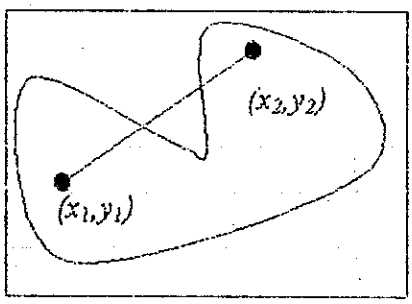
Jadi f memenuhi syarat Lipschitz dalam D pada variabel y dengan konstanta Lipschitz adalah 2. ◆

Definisi 2.2.4

Suatu set $D \subset \Re^2$ disebut convex jika (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in D$, titik $((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2) \in D$ untuk setiap λ, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Secara geometri definisi 2.2.4 menyatakan bahwa suatu set adalah convex jika diberikan dua titik yang berada dalam set, semua garis lurus yang menghubungkan antar titik juga berada dalam set.





convex bukan convex

Gambar 2.2.1 Convex

Lemma 2.2.1

Untuk setiap $x \geq -1$ dan $m \geq 0$,

$$0 \leq (1 + x)^m \leq e^{mx}. \qquad \text{.....(2.2.4)}$$

Bukti

Menggunakan deret Taylor dengan $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, dan $n = 1$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x - x_0) + f''(0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + R_n$$

dimana $R_n = f^{(n-1)}(0)\dfrac{(x - x_0)^{(n-1)}}{n!}$

$$e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 e^{\xi}$$

dengan $0 \leq \xi \leq x$. Jadi

$$0 \leq 1 + x \leq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 e^{\xi} \leq e^x$$

dan karena $1 + x \geq 0$,

$$0 \leq (1 + x)^m \leq (e^x)^m = e^{mx}$$ ♦

Lemma 2.2.2

Jika s dan t bilangan real positif, $\{a_i\}_{i=0}^{k}$ adalah barisan yang memenuhi

$a_0 \geq t / s$, dan

$$a_{i+1} \leq (1 + s)a_i + t \text{ untuk setiap } i = 0, 1, 2, 3, \ldots, k, \qquad \text{.....(2.2.5)}$$

maka $a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left(\dfrac{t}{s} + a_0\right) - \dfrac{t}{s}$

Bukti

Untuk suatu integer i, pertidaksamaan (2.2.5) menyatakan bahwa

$$a_{i+1} \le (1+s)a_i + t$$

$$\le (1+s)[(1+s)a_{i-1} + t] + t$$

$$\le (1+s)\{(1+s)[(1+s)a_{i-2} + t] + t\} + t$$

$$\vdots$$

$$\le (1+s)^{i+1}a_0 + [1 + (1+s) + (1+s)^2 + \dots + (1+s)^i]t$$

tetapi $1 + (1+s) + (1+s)^2 + \dots + (1+s)^i = \sum_{j=0}^{i} (1+s)^j$

adalah deret geometri dengan rasio $(1+s)$ dan mempunyai jumlah :

$$\frac{1-(1+s)^{i+1}}{1-(1+s)} = \frac{1}{s}[(1+s)^{i+1} - 1]$$

jadi $a_{i+1} \le (1+s)^{i+1} a_0 + \frac{(1+s)^{i+1} - 1}{s} t = (1+s)^{i+1} \left(\frac{t}{s} + a_0\right) - \frac{t}{s}$

dan berdasarkan lemma 2.2.1

$$a_{i+1} \le e^{(i+1)s} \left(\frac{t}{s} + a_0\right) - \frac{t}{s}.$$ ◆

Definisi 2.2.5

Permasalahan nilai awal,

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)\ ,\ a \le x \le b\ ,\ y(a) = \alpha\ , \qquad \text{.....(2.2.6)}$$

dikatakan *well-posed problem* jika :

(i) ada penyelesaian khusus $y(x)$ pada permasalahan;

(ii) untuk sembarang $\varepsilon > 0$ terdapat konstanta positif k dengan syarat bahwa ketika $|\varepsilon_0| < \varepsilon$ dan $|\delta(x)| < \varepsilon$, ada suatu penyelesaian khusus $z(x)$ pada permasalahan

$$\frac{dz}{dx} = f(x,z) + \delta(x), \quad a \le x \le b \,, z(a) = \alpha + \varepsilon_0 \,, \qquad .....(2.2.7)$$

dengan $|z(x) - y(x)| < k\varepsilon$ untuk setiap $a \le x \le b$.

Permasalahan pada persamaan (2.2.7) sering disebut *perturbed problem* (permasalahan gangguan) yang berhubungan dengan permasalahan pada persamaan (2.2.6). Metode numerik selalu berkaitan dengan menyelesaikan perturbed problem, karena kesalahan apapun yang diajukan akan dihasilkan pada permasalahan persamaan (2.2.7). Kecuali kalau permasalahan persamaan (2.2.6) adalah well-posed problem, ada sedikit alasan untuk mengharapkan bahwa penyelesaian numerik dari suatu perturbed problem akan akurat mendekati penyelesaian permasalahan persamaan (2.2.6).

2.3 Interpolasi Polinomial Newton

Untuk mendapatkan rumus prediktor dan korektor dari metode prediktor-korektor Adams orde keempat digunakan rumus interpolasi polinomial belakang Newton. Rumus interpolasi polinomial belakang Newton didapat dari rumus interpolasi *divided difference* (selisih terbagi) Newton .

Andaikan $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah bilangan real dengan dan f adalah fungsi dari $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dengan menggunakan metode *divided differerence* (selisih terbagi) didapat polinomial

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)..(x-x_{n-1})$$
.....(2.3.1)

dimana $a_0, a_1, \ldots, a_n$ adalah konstanta,

$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$,

untuk $P_n(x_1) = f(x_1)$

$$P_n(x_0) = f(x_0) + a_1(x-x_0)$$

sehingga $a_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ .....(2.3.2)

$f[x_i]$ adalah notasi *divided differerence* (selisih terbagi) untuk $f(x_i)$,

$f[x_i] = f(x_i)$.

Pada selisih terbagi pertama untuk x_i dan x_{i+1} didapat

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$ .....(2.3.3)

Pada selisih terbagi ke *n-1* didapat

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] - f[x_i x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$
.....(2.3.4)

dengan notasi diatas persamaan (2.3.2) menjadi $a_1 = f[x_0, x_1]$ secara analog dapat ditentukan $a_2, a_3, \ldots, a_n$, yaitu $a_k = f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k]$ untuk $k = 0,1,2,\ldots, n$ sehingga persamaan (2.3.1) menjadi

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0 x_1](x-x_0) + f[x_0 x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \ldots$$
$$+ f[x_0 x_1, x_2, \ldots, x_n](x-x_0)(x-x_1)..(x-x_{n-1})$$

atau

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}). \qquad \dots\dots(2.3.5)$$

Persamaan (2.3.5) disebut juga rumus interpolasi divided difference Newton.

Rumus interpolasi polinomial Newton ada dua jenis yaitu; rumus interpolasi depan Newton dan rumus interpolasi selisih belakang Newton. Untuk menetukan rumus interpolasi selisih belakang Newton pada titik–titik $x_n, x_{n-1}, \dots, x_0$ persamaan (2.3.5) diubah menjadi

$$P_n(x) = f[x_n] + f[x_{n-1}, x_n](x-x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots$$

$$+ f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n](x-x_n)(x-x_{n-1})..(x-x_1)$$

dengan $x = x_n + sh$ dan $x = x_i + (s+n-i)h$ dihasilkan

$$P_n(x) = P_n(x_n + sh)$$

$$= f[x_n] + shf[x_{n-1}, x_n] + s(s+1)h^2 f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] + \dots$$

$$+ s(s+1)\dots(s+n-i)h^n f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$$

Persamaan (2.3.6) disebut rumus interpolasi selisih terbagi belakang Newton.

Definisi 2.3.1

Diberikan barisan $\{p_n\}_{n=0}^{\omega}$, operator selisih belakang ∇p_n adalah

$\nabla p_n = p_n - p_{n-1}$ untuk $n \geq 1$

$\nabla^k pn = \nabla^{k-1} (\nabla pn)$ untuk $k \geq 2$

Definisi (2.3.1) menyebabkan

$$f[x_n] = \frac{1}{h} \nabla f(x_n), \; f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = \frac{1}{2h^2} \nabla^2 f(x_n),$$

dan secara umum

$$f[x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n] = \frac{1}{k!\,h^k} \nabla^k f(x_n).$$

$P_n(x)$ menjadi :

$$P_n(x) = f[x_n] + s\nabla f(x_n) + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f(x_n) + \ldots$$

$$+ \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f(x_n) \qquad \ldots..(2.3.6)$$

Definisi 2.3.1

Fungsi binomial untuk i suatu bilangan bulat tak negatif dan y bilangan bulat adalah :

$$\binom{y}{i} = \frac{y(y-1)\ldots(y-i+1)}{i!} \qquad \ldots..(2.3.7)$$

Dengan menggunakan fungsi binomial untuk $y = -s$ dan $i = k$ didapat

$$\binom{-s}{k} = \frac{-s(-s-1)\ldots(-s-k+1)}{k!}$$

$$\binom{-s}{k} = (-1)^k \frac{s(s+1)\ldots(s+k-1)}{k!} \qquad \ldots..(2.3.8)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.3.8) maka persamaan (2.3.6) menjadi :

$$P_n(x) = f(x_n) + (-1)^1 \binom{-s}{1}\nabla f(x_n) + (-1)^2 \binom{-s}{2}\nabla^2 f(x_n) + \ldots$$

$$+ (-1)^n \binom{-s}{n}\nabla^n f(x_n)$$

atau

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n) \qquad \text{.....(2.3.9)}$$

Persamaan (2.3.9) disebut rumus interpolasi selisih belakang Newton. $\nabla^k f(x_n)$ merupakan operator diferensi belakang Newton yang nilainya ditentukan melalui tabel (2.3.1).

Tabel 2.3.1 Daftar Diferensi untuk Interpolasi Polinomial Belakang Newton untuk k = 3

x_{n-3} y_{n-3}	f_{n-3}			
		∇f_{n-3}		
x_{n-2} y_{n-2}	f_{n-2}		$\nabla^2 f_{n-2}$	
		∇f_{n-2}		$\nabla^3 f_{n-3}$
x_{n-1} y_{n-1}	f_{n-1}		$\nabla^2 f_{n-1}$	
		∇f_{n-1}		
x_n y_n	f_n			

Persamaan (2.3.9) digunakan untuk mendapatkan rumus prediktor-korektor metode Adams. Untuk menentukan rumus prediktor Adams-Bashfort digunakan rumus interpolasi belakang Newton P_{m-1} pada titik-titik $(x_i, y(x_i))$, $(x_{i-1}, y(x_{i-1}))$, $(x_{i-2}, y(x_{i-2}))$, ... , $(x_{i+1-m}, y(x_{i+1-m}))$. Sedangkan untuk menentukan rumus Adams-Moulton digunakan rumus Interpolasi belakang Newton P_{m+1} dengan tambahan titik $(x_{i+1}, f(x_{i+1}, y(x_{i+1})))$.

2.4 Analisis Kestabilan

Secara umum metode multistep untuk menentukan penyelesaian masalah nilai awal :

$$y' = f(x\ ,\ y)\ ,\ a \leq x \leq b\ \ ,\ y(a) = \alpha\ . \qquad .....(2.4.1)$$

untuk $i = m\text{-}1\ ,\ m\ ,\ \ldots\ ,\ n\text{-}1$ dan $h = (b - a)\ /\ n$ serta $x_i = a + ih$

dengan $w_0 = \alpha\ ,\ w_i = \alpha_i\ ,\ \ldots\ ,\ w_m = \alpha_{m-1}\ ,$

dapat ditulis dalam bentuk

$$w_{i+1} = a_{m-1}\ w_i + a_{m-2}\ w_{i-1} + \ldots + a_0\ w_{i+1-m}$$

$$+\ h[b_m\ f(x_{i+1}\ ,\ w_{i+1}) + b_{m-1}\ f(x_i\ ,\ w_i\ ) + \ \ldots\ + b_0\ f(x_{i+1-m}\ ,\ w_{i+1-m})]$$

$$.....(2.4.2)$$

Kesalahan pemotongan lokal untuk metode multistep yang dinyatakan dalam bentuk (2.4.2) adalah

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y(x_{i+1}) - a_{m-1}y(x_i) - \ldots - a_0 y(x_{i+1-m})}{h} - F(x_i, h, w_{i+1}, w_i, \ \ldots\ , w_{i+1-m})$$

$$.....(2.4.3)$$

untuk setiap $i = m\text{-}1\ ,\ m\ ,\ \ldots\ ,\ n\text{-}1\ .$

Persamaan (2.4.2) dapat dibentuk menjadi :

$$w_{i+1} = a_{m-1}\ w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \ldots + a_0 w_{i+1-m} + hF(x_i\ ,\ h\ ,\ w_{i+1}\ ,\ w_i\ ,\ \ldots\ ,\ w_{i+1-m})$$

$$.....(2.4.4)$$

dengan

$$F(x_i, h, w_{i+1}, w_i, \ldots, w_{i+1-m}) = b_m f(x_{i+1}, w_{i+1}) + b_{m-1} f(x_i, w_i) + \ldots$$

$$+ b_0 f(x_{i+1-m}, w_{i+1-m})$$

dan $w_0 = \alpha$, $w_i = \alpha_i$, ... , $w_m = \alpha_{m-1}$.

Untuk melakukan analisa kestabilan dibuat dua asumsi yang berhubungan dengan fungsi F :

(i) jika $f = 0$ (jika persamaan diferensial homogen), maka $F = 0$;

(ii) F memenuhi syarat Lipschitz yang berhubungan dengan barisan $\{w_j\}_{j=i+1-m}^{i+1}$ dan diberikan konstanta L dengan

$$|F(x_i, h, w_{i+1}, \ldots, w_{i+1-m}) - F(x_i, h, v_i, \ldots, v_{i+1-m})| \leq L \sum_{j=0}^{m} |w_{i+1-j} - v_{i+1-j}|$$

untuk setiap $i = m-1, m, \ldots, n$, dan barisan $\{w_j\}_{j=0}^{N}$ dan $\{v_j\}_{j=0}^{N}$.

Sebelum melakukan analisa kestabilan metode multistep perlu diketahui hubungan antara konsistensi, konvergensi, dan kestabilan metode multistep sehingga akan membantu dalam memilih suatu metode yang baik.

Suatu metode multistep dikatakan konvergen jika solusi dari pendekatan persamaan diferensi mendekati solusi dari persamaan diferensial pada saat ukuran langkah mendekati nol yang berarti bahwa

$$\lim_{h\to 0} \max_{0\le i\le n} |w_i - y(x_i)| = 0. \qquad .....(2.4.5)$$

Untuk kekonsistenan suatu metode, perbedaan situasi dapat terjadi. Suatu metode yang konsisten menyatakan bahwa solusi pendekatan persamaan diferensi mendekati solusi persamaan diferensial pada saat ukuran langkah mendekati nol. Syarat tambahan muncul karena jumlah nilai-nilai awal yang dibutuhkan metode multistep. Karena biasanya hanya terdapat satu nilai awal $w_0 = \alpha$, maka perlu dinyatakan bahwa kesalahan pada semua nilai awal $\{\alpha_i\}$ mendekati nol pada saat ukuran langkah mendekati nol; sehingga kedua syarat berikut ini harus dipenuhi agar suatu metode multistep dapat dikatakan konsisten yaitu:

$$\lim_{h\to 0} |\tau_i(h)| = 0 \text{ , untuk setiap } i = m, m+1, \dots , n \text{ ,} \qquad .....(2.4.6)$$

dan $$\lim_{h\to 0} |\alpha_i - y(x_i)| = 0 \text{ , untuk setiap } i = 1, 2, \dots , m-1 \qquad .....(2.4.7)$$

Syarat yang kedua (2.4.7) dapat mengakibatkan metode multistep tidak konsisten jika metode one-step yang digunakan untuk menentukan nilai awal juga tidak konsisten.

Persamaan (2.4.3) adalah polinomial, diasumsikan bahwa $f = 0$ maka $F = 0$, untuk $w_n = \lambda^n$ didapat persamaan polinomial karakteristiknya adalah :

$$p(\lambda) = \lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} - a_{m-2}\lambda^{m-2} - \dots - a_1\lambda - a_0 \qquad .....(2.4.8)$$

dengan λ adalah akar dari persamaan polinomial karakteristik.

Besarnya akar dari persamaan polinomial karakteristik metode multistep berhubungan dengan tingkat kestabilan metode yaitu pada kesalahan pembulatan. Perhatikan contoh berikut;

$y' = 0$, $y(a) = \alpha$ dimana $\alpha \neq 0$. .....(2.4.9)

Permasalahan tersebut mempunyai penyelesaian eksak $y(x) = \alpha$.

Setiap metode multistep akan menghasilkan penyelesaian eksak

$w_n = \alpha$ untuk setiap n. Penyimpangan dari penyelesaian eksak terjadi pada kesalahan pembulatan bawaan berhubungan dengan perhitungan metode.

Sisi kanan dari persamaan diferensial (2.4.9) mempunyai $f(x,y) = 0$, menurut asumsi (i) (pada halaman 17) $F(x_i, h, w_{i+1}, \dots, w_{i+1-m}) = 0$, dalam persamaan diferensial (2.4.7). Konsekuensinya bentuk standar persamaan diferensial menjadi

$$w_{i+1} = a_{m-1} w_i + a_{m-2} w_{i-1} + \dots + a_0 w_{i+1-m} \qquad .....(2.4.10)$$

Andaikan λ adalah akar persamaan karakteristik berhubungan dengan persamaan (2.4.7). Karena

$$\lambda^{i+1} - a_{m-1} \lambda^{i} - a_{m-2} \lambda^{i-1} - \dots - a_o \lambda^{i+1-m} = \lambda^{i+1-m} [\lambda^{m} - a_{m-1} \lambda^{m-1} - \dots - a_0] = 0$$

.....(2.4.11)

maka $w_n = \lambda^n$ untuk setiap n adalah penyelesaian untuk persamaan (2.4.10). Jika λ_1 , λ_2 , ... , λ_m akar-akar nyata dari polinomial karakteristik persamaan (2.4.7), dapat ditunjukkan bahwa setiap penyelesaian untuk persamaan (2.4.10) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$w_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i^n \qquad \text{.....(2.4.12)}$$

untuk kumpulan konstanta khusus c_1 , c_2 , ... , c_m .

Karena penyelesaian eksak dari persamaan (2.4.9) adalah $y(x) = \alpha$, untuk setiap n, maka $w_n = \alpha$ adalah penyelesaian untuk persamaan (2.4.10). Kemudian digunakan pada persamaan (2.4.9) sehingga didapat;

$$\alpha - \alpha a_{m-1} - \alpha a_{m-2} - ... - \alpha a_o = \alpha [1 - a_{m-1} - ... - a_0] = 0$$

Hal tersebut menunjukkan bahwa $\lambda = 1$ adalah salah satu penyelesaian dari persamaan karakteristik. Diasumsikan bahwa pada persamaan (2.4.12) penyelesaian ini dinyatakan dengan $\lambda_1 = 1$ dan $c_1 = \alpha$, sehingga semua penyelesaian untuk persamaan (2.4.12) dinyatakan sebagai berikut

$$w_n = \alpha + \sum_{i=2}^{m} c_i \lambda_i^n \qquad \text{.....(2.4.13)}$$

Jika semua perhitungan adalah eksak maka semua konstanta $c_2, c_3, ... , c_m$ bernilai nol. Dalam prakteknya konstanta c_2 , c_3 , ... , c_m tidak harus nol pada kesalahan pembulatan. Kesalahan pembulatan berkembang secara eksponensial sampai dengan $|\lambda_i| \leq 1$ untuk setiap akar-akar λ_2 , λ_3 , ... , λ_m . Semakin kecil kenaikan akar-akar tersebut, semakin stabil metode yang akan mempengaruhi perkembangan kesalahan pembulatan.

Dibuat asumsi sederhana untuk mendapatkan (2.4.13) bahwa akar-akar persamaan karakteristik adalah nyata. Situasi yang serupa terjadi ketika muncul akar-akar ganda .

Definisi 2.4.1

Andai λ_1 , λ_2 , ... , λ_m merupakan akar-akar persamaan polinomial karakteristik

$$p(\lambda) = \lambda^m - a_{m-1}\,\lambda^{m-1} - a_{m-2}\,\lambda^{m-2} - \ldots - a_1\,\lambda - a_0 = 0$$

berhubungan dengan metode multistep

$$w_0 = \alpha,\ w_i = \alpha_i,\ \ldots,\ w_m = \alpha_{m-1},$$

dan $w_{i+1} = a_{m-1}\,w_i + a_{m-2}\,w_{i-1} + \ldots + a_0\,w_{i+1-m}$

$$+\ hF(x_i\,,\ h\,,\ w_{i+1}\,,\ w_i\,,\ \ldots\,,\ w_{i+1-m})$$

Jika $|\lambda_i| \leq 1$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots , m$ dan semua akar dengan nilai absolut 1 adalah akar-akar sederhana, maka metode dikatakan memenuhi *root condition* (syarat akar).

Definisi 2.4.2

(i) Metode yang memenuhi syarat akar dan mempunyai $\lambda = 1$ sebagai satu-satunya akar persamaan karakteristik disebut *strongly stable* (kestabilan sangat kuat).

(ii) Metode yang memenuhi syarat akar dan mempunyai lebih dari satu akar nyata disebut *weakly stable* (kestabilan sangat lemah).

(iii) Metode yang tidak memenuhi syarat akar disebut *unstable* (tidak stabil)