BAB II

MATERI PENUNJANG

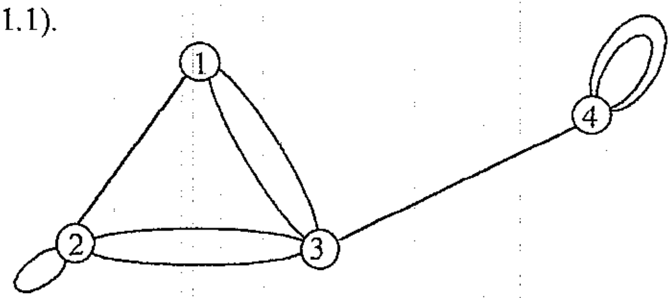
2.1. Dasar-Dasar Teori Graph

Definisi 2.1.1

Sebuah graph G(V,E) atau disebut juga graph G terdiri atas himpunan V dari elemen-elemen yang disebut titik, dan himpunan E dari suatu daftar pasangan elemen itu yang disebut garis, dinyatakan dengan bentuk (i,j) atau (j,i) dimana $i,j \in V$. Garis yang mempunyai titik awal sama dengan titik akhir dinotasikan (i,i) disebut *self-loop* di G, dan garis-garis dengan titik awal i sama dan titik akhir j sama disebut garis paralel. Garis paralel antara titik i dan titik j dinotasikan dengan simbol $(i,j)_1$, $(i,j)_2$, … , $(i,j)_k$, $k \geq 2$. Dalam penyajiannya titik-titik dalam sebuah graph dinyatakan dengan bentuk lingkaran kecil atau berupa titik dan garisnya dinyatakan dengan garis lengkung atau garis lurus.

Contoh 2.1.1

Graph G(V,E) dengan himpunan titik V = {1,2,3,4} dan himpunan garis E = {(1,2), $(1,3)_1$, $(1,3)_2$, (2,2), $(2,3)_1$, $(2,3)_2$, (3,4), $(4,4)_1$, $(4,4)_2$} (ditunjukkan pada Gambar 2.1.1).



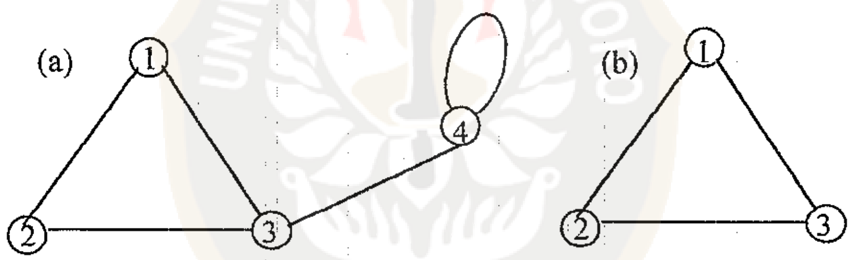
Gambar 2.1.1. Graph G(V,E)

Seperti terlihat pada Gambar 2.1.1, Graph tersebut mempunyai self-loop pada titik 2 dan titik 4, dengan banyaknya self-loop pada titik 2 adalah 1 dan pada titik 4 adalah 2. Sedangkan untuk garis paralel, terdapat Pada garis (1,3) dan garis (2,3) masing-masing mempunyai 2 garis paralel.

Definisi 2.1.2

Subgraph dari graph G(V,E) adalah suatu graph $G_s(V_s,E_s)$ dengan V_s dan E_s adalah subset dari V dan E. Jika V_s dan E_s subset sejati maka subgrapnya disebut subgraph sejati, dan jika V_s = V maka subgrapnya disebut sebagai spanning subgraph dari G.

Contoh 2.1.2



Gambar 2.1.2. Subgraph dari graph Gambar 2.1.1

Pada Gambar 2.1.2 di atas, Gambar 2.1.2(a) merupakan spanning subgraph $G_s(V,E_s)$ dan Gambar 2.1.2(b) merupakan subgraph sejati $G_s(V_s,E_s)$ dari graph Gambar 2.1.1.

Definisi 2.1.3

Derajat dari suatu titik i dalam graph dinotasikan dengan d(i), didefinisikan sebagai :

$d(i) = 2\ n_s + n_n$

dimana n_s adalah jumlah self-loop yang bertemu (*incident*) dengan titik i dan n_n adalah jumlah garis selain self-loop yang bertemu (*incident*) dengan titik i.

Contoh 2.1.3

Pandang graph G(V,E) pada Gambar 2.1.1. Banyaknya derajat pada masing-masing titik adalah sebagai berikut :

titik 1 tidak mempunyai self-loop, $n_s = 0$ dan $n_n = 3$, maka $d(1) = 2\ (0) + 3 = 3$

titik 2 mempunyai 1 self-loop, $n_s = 1$ dan $n_n = 3$, maka $d(2) = 2\ (1) + 3 = 5$

titik 3 tidak mempunyai self-loop, $n_s = 0$ dan $n_n = 1$, maka $d(3) = 2\ (0) + 1 = 1$

titik 4 mempunyai 2 self-loop, $n_s = 2$ dan $n_n = 1$, maka $d(4) = 2\ (2) + 1 = 5$

Jadi banyaknya derajat pada masing-masing titik adalah

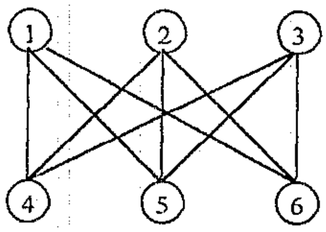
$d(1) = 3,\quad d(2) = 5,\quad d(3) = 1,\quad d(4) = 5.$

Definisi 2.1.4

Barisan garis (*edge sequence*) dengan panjang $k - 1$ dalam sebuah graph G adalah barisan terhitung dari garis-garis yang dinotasikan $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{k-1}, i_k)$, $k \geq 2$. Barisan garis dikatakan tertutup jika $i_1 = i_k$ dan dikatakan terbuka jika $i_1 \neq i_k$.

Contoh 2.1.4

Barisan tertutup dengan panjang 10 adalah garis-garis (4,2), (2,6), (6,3), (3,5), (5,2), (2,6), (6,3), (3,5), (5,1), (1,4) dan barisan terbuka dengan panjang 9 adalah garis-garis (1,6), (6,3), (3,5), (5,3), (3,4), (4,2), (2,6), (6,3), (3,5). (terlihat pada Gambar 2.1.4).



Gambar 2.1.4. Sebuah graph

Definisi 2.1.5

Jika semua garis yang muncul dalam barisan garis adalah berbeda, maka barisan garis itu disebut train garis (*edge train*).

Definisi 2.1.6

Sebuah train garis terbuka $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{k-1}, i_k)$ $k \geq 2$ disebut path dengan panjang k-1 jika semua titik $i_1, i_2, \ldots, i_k$ adalah berbeda.

Contoh 2.1.6

Barisan garis (1,6), (6,2), (2,5), (5,3), (3,4) merupakan train garis terbuka dengan panjang 5. (seperti terlihat pada Gambar 2.1.4).

Definisi 2.1.7

Sebuah train garis tertutup $(i_1,i_2),(i_2,i_3),\ldots,(i_{k-1},i_k)$ $k \geq 2$ disebut sirkuit dengan panjang k-1 jika $i_1 = i_k$ dan semua titik $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{k-1}$ adalah berbeda.

Sebuah self-loop adalah sirkuit dengan panjang 1.

Contoh 2.1.7

Terlihat pada Gambar 2.1.4. Garis-garis (1,5), (5,3), (3,6), (6,1) adalah sebuah sirkuit dengan panjang 4.

2.2. Operasi Dalam Graph

Ada empat teori himpunan dalam operasi graph yaitu gabungan (*union*), irisan (*intersection*), pengurangan (*diference*), penjumlahan (*ring sum*) yang disimbolkan dengan $\cup, \cap, -, \oplus$.

Jika $G_1(V_1,E_1)$ dan $G_2(V_2,E_2)$ adalah dua subgraph dari graph G(V,E) yang tidak mempunyai titik isolasi, maka :

$G_1 \cup G_2$ adalah subgraph yang terdiri dari semua elemen baik di G_1 maupun di G_2 atau di keduanya. $G_1 \cup G_2$ dapat disajikan sebagai subgraph G dengan himpunan titiknya $V_1 \cup V_2$ dan himpunan garisnya $E_1 \cup E_2$.

$G_1 \cap G_2$ adalah subgraph yang terdiri dari semua elemen yang ada di keduanya di G_1 dan juga ada di G_2. Irisan graph $G_1 \cap G_2$ adalah subgraph G dengan himpunan titik $V_1 \cap V_2$ dan himpunan garis $E_1 \cap E_2$.

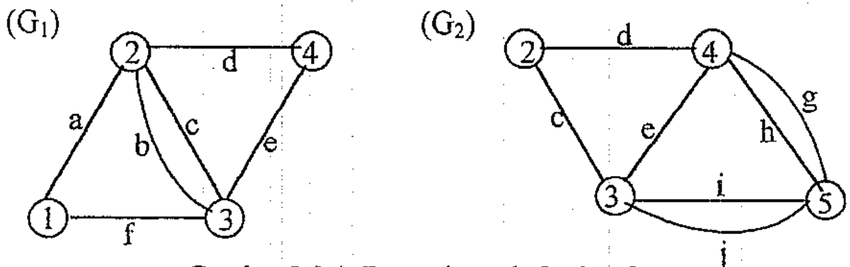
$G_1 - G_2$ adalah subgraph yang mengandung semua garis di G_1 tapi tidak di G_2

$G_1 \oplus G_2$ adalah subgraph yang mengandung semua garis di G_1 atau di G_2 tapi tidak dikeduanya.

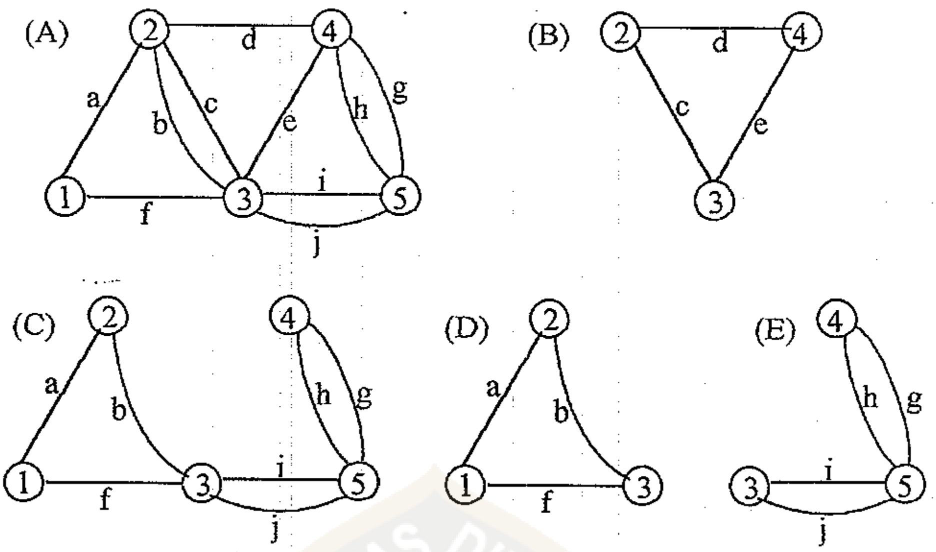
$G_1 \oplus G_2 = (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2) = (G_1 - G_2) \cup (G_2 - G_1)$.

$G_1 \oplus \varnothing = \varnothing \oplus G_1 = G_1$

Contoh 2.2.1



Gambar 2.2.1. Dua subgraph G_1 dan G_2



Gambar 2.2.1(A, B, C, D, E). Operasi dari graph G_1 dan G_2.
(A) $G_1 \cup G_2$; (B) $G_1 \cap G_2$; (C) $G_1 \oplus G_2$; (D) $G_1 - G_2$; (E) $G_2 - G_1$

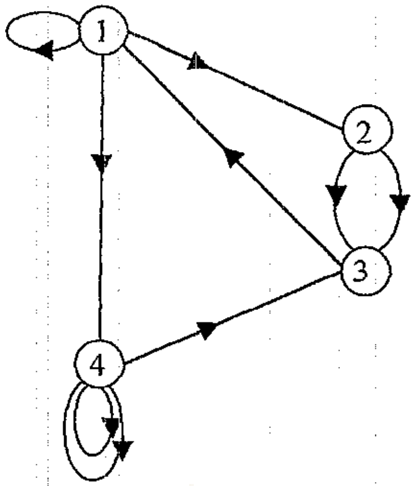
2.3. Digraph (Graph Berarah) dan Digraph (p,s)

Definisi 2.3.1

Sebuah digraph $G_d(V,E)$ adalah sebuah graph yang terdiri atas himpunan titik-titik V dan garis-garis E yang berupa garis berarah yang dinyatakan dengan bentuk (i,j) dimana $i , j \in V$. Titik i adalah titik awal dan titik j adalah titik akhir dari (i,j). Garis-garis dengan titik awal i sama dan titik akhir j sama disebut garis paralel. Garis paralel berarah dari titik i ke titik j dinotasikan dengan simbol $(i,j)_1$, $(i,j)_2, \ldots, (i,j)_k$, $k \geq 2$. Jika garis dengan titik awal dan titik akhir sama maka disebut self-loop di G.

Contoh 2.3.1

Sebuah digraph dengan himpunan titik V = {1,2,3,4}dan himpunan garis $E = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,3)_1, (2,3)_2, (3,1), (4,3), (4,4)_1, (4,4)_2\}$.



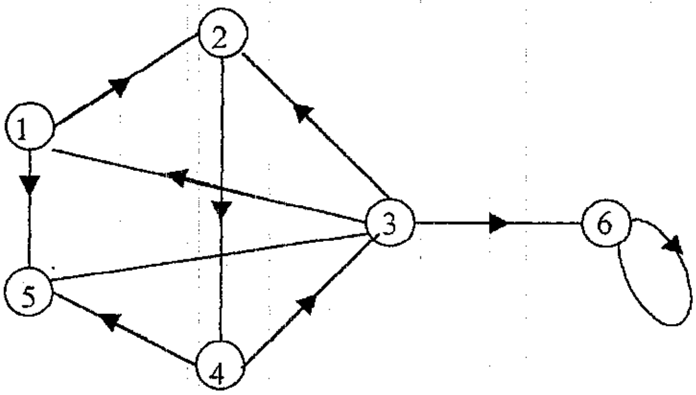
Gambar 2.3.1. Digraph dengan self-loop dititik 1 dan dititik 4, juga 2 garis paralel dari titik 2 ke titik

Definisi 2.3.2

Derajat masuk $d^{-}(i)$ dan derajat keluar $d^{+}(i)$ dari sebuah digraph G adalah sebuah digraph dengan $d^{+}(i)$ menyatakan jumlah garis-garis di G yang mempunyai titik i sebagai titik awal yang disebut derajat keluar dan $d^{-}(i)$ menyatakan jumlah garis-garis G yang mempunyai titik i sebagai titik akhir yang disebut derajat masuk titik i di G. $\{[\,d^{+}(i), d^{-}(i)\,]\}$ menyatakan barisan pasangan derajat titik i dalam G.

Contoh 2.3.2

digraph G dengan himpunan titik V = {1,2,3,4,5,6} dan $i \in V$.



Gambar 2.3.2. Sebuah digraph G

Derajat keluar $d^+(i)$ dan derajat masuk $d^-(i)$ dari digraph G Gambar 2.3.2 adalah

$d^+(1) = 2$ $d^+(4) = 2$ $d^-(1) = 1$ $d^-(4) = 1$

$d^+(2) = 1$ $d^+(5) = 1$ $d^-(2) = 2$ $d^-(5) = 2$

$d^+(3) = 3$ $d^+(6) = 1$ $d^-(3) = 2$ $d^-(6) = 2$

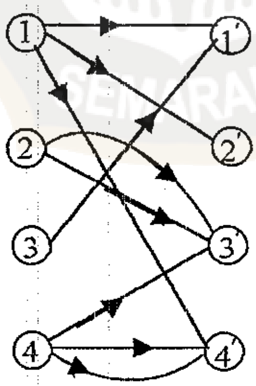
$\{[d^+(i), d^-(i)]\} = \{ [2,1], [1,2], [3,2], [2,1], [1,2], [1,2] \}$.

Definisi 2.3.3

Sebuah digraph G(V,E) dikatakan bipartite jika himpunan titik V dapat dipartisi menjadi dua subset terpisah V_1 dan V_2 sedemikian sehingga dari tiap-tiap garis berarah tersebut mempunyai titik awal di V_1 dan titik akhir di V_2.

Contoh 2.3.3

Pada Gambar 2.3.3 adalah digraph bipartite B yang didapat dari digraph G gambar 2.3.2.



Gambar 2.3.3. Digraph bipartite

Definisi 2.3.4

Sebuah digraph (p,s) adalah graph berarah $G_d(V,E)$ dimana $|(x,y)| \leq p$ untuk semua $(x,y) \in E$, $x \neq y$, dan $|(x,x)| \leq s$ untuk semua $x \in V$, dengan p menyatakan jumlah garis maksimum antara dua titik dan s menyatakan jumlah self-loop yaitu jumlah garis dengan titik awal dan titik akhir sama pada titik itu juga. Jika p = s maka digraph (p,p) disebut digraph p.

Contoh 2.3.4

Terlihat pada Gambar 2.3.2, jumlah garis maksimum antara dua titiknya adalah 2 atau p = 2 dan jumlah self-loop maksimum adalah 2 atau s = 2, sehingga digraph (p,s) tersebut merupakan digraph (2,2). Karena p = s maka digraph (2,2) disebut juga digraph 2.

2.4.Jaringan Perluasan Persediaan-Permintaan

Theorema perluasan persediaan-permintaan dapat digunakan unutuk menyelidiki kefeasibelan aliran pada jaringan persediaan-permintaan. Dalam hal ini jaringan persediaan-permintaan disajikan dalam bentuk graph berarah G(V,E,c,f). Jaringan G yang dinotasikan dengan G (V,E,c,f) merupakan suatu graph berarah dengan himpunan titik V, himpunan garis berarah E, dimana masing–masing garis (x,y) $\in$ E mempunyai kapasitas garis c(x,y) dan nilai aliran f(x,y). Dalam penyajian jaringan G(V,E,c,f), nilai fungsi c dan f secara berurutan dituliskan sebagai pasangan bilangan pada garis tersebut.

Definisi 2.4.1

Suatu pola aliran {f (x,y)} dikatakan fisibel dalam G(V,E,c,f) dan mempunyai nilai aliran f_{st} dari titik sumber s ke titik terminal t jika untuk setiap x $\in$ V memenuhi persamaan :

$$\sum_y f(x,y) - \sum_y f(y,x) = f_{st}\ , \qquad x = s \qquad (2.1)$$

$$= 0 \qquad\qquad x \neq s, t \qquad\qquad (2.2)$$

$$= - f_{st} \;, \qquad\qquad x = t \qquad\qquad (2.3)$$

$$c(x,y) \geq f(x,y) \geq 0 \,, \qquad\qquad (x,y) \in E.$$

Misalkan (X,Y) adalah himpunan semua garis berarah dari beberapa titik dalam X ke beberapa titik dalam Y, maka besarnya nilai aliran f atau kapasitas c dalam jaringan G didefinisikan :

$$f(X, Y) = \sum_{(x,y)\in(X,Y)} f(x,y)$$

$$c(X, Y) = \sum_{(x,y)\in(X,Y)} c(x,y)$$

dengan $f(X, Y) = c(X, Y) = 0$, jika $(X, Y) = 0$

Definisi 2.4.2

Himpunan potong dari s ke t (s – t cut set) pada jaringan G (V,E,c,f) adalah minimal himpunan garis $(X, \overline{X})$ dengan $s \in X$, dan $t \in \overline{X}$ dimana $X \subseteq V$ dan $\overline{X} = V - X$. Dimana jika garis tersebut dihilangkan dari graph G akan menghasilkan graph G tak terhubung.

Theorema 2.4.1

Misalkan $(X, \overline{X})$ adalah potongan dari s-t (s-t cut) pada jaringan G (V,E,c,f). Nilai aliran f_{st} dari s ke t dalam G adalah :

$$F_{st} = f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X) \leq c(X, \overline{X}) \qquad (2.4)$$

Bukti

Berdasar pada definisi 2.4.1 pola aliran {f (x,y)} memenuhi (2.1) – (2.3).

Jika $x \in X$, maka diperoleh :

$$f_{st} = \sum_{x \in X} [f(x,V) - f(V,x)] = f(X,V) - f(V,X)$$

$V = X \cup \overline{X}$, persamaan di atas menjadi :

$$f_{st} = f(X, X \cup \overline{X}) - f(X \cup \overline{X}, X)$$

$$= f(X,X) + f(X,\overline{X}) - f(X,X) - f(\overline{X},X)$$

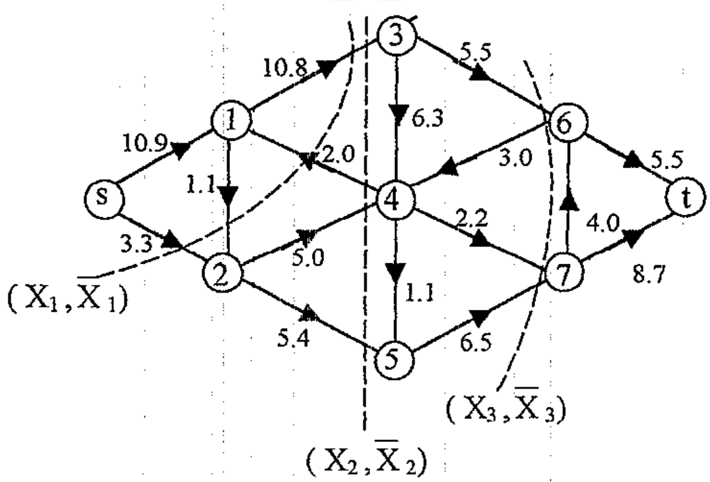
$$= f(X,\overline{X}) - f(\overline{X},X)$$

Karena $f(X,\overline{X}) \le c(X,\overline{X})$ dan $f(\overline{X},X) \ge 0$, maka

$$f(X,\overline{X}) - f(\overline{X},X) \le c(X,\overline{X}) \qquad \text{(terbukti).}$$

Contoh 2.4.1

Disajikan jaringan G(V,E,c,f) seperti pada Gambar 2.4.1, dengan mengambil beberapa potongan pada jaringan tersebut. Tunjukkan bahwa $f(X,\overline{X}) - f(\overline{X},X) \le c(X,\overline{X})$ pada: a. $(X_1,\overline{X}_1)$; b. $(X_2,\overline{X}_2)$; c. $(X_3,\overline{X}_3)$



Gambar 2.4.1. Jaringan G(V,E,c,f) dengan beberapa potongan

Penyelesaian :

Dari Gambar 2.4.1, diketahui $X_1 = \{s,1\}$, $\overline{X}_1 = \{2,3,4,5,6,7,t\}$,

$X_2 = \{s,1,2\}$, $\overline{X}_2 = \{3,4,5,6,7,t\}$, $X_3 = \{s,1,2,3,4,5\}$, $\overline{X}_3 = \{6,7,t\}$

a). $X_1 = \{s,1\}$, $\overline{X}_1 = \{2,3,4,5,6,7,t\}$

$f(X_1,\overline{X}_1) - f(\overline{X}_1,X_1) = f(s,2) + f(1,2) + f(1,3) - f(4,1) = 3 + 1 + 8 - 0 = 12$

$c(X,\overline{X}) = c(s,2) + c(1,2) + c(1,3) = 3 + 1 + 10 = 14$

$f(X_1,\overline{X}_1) - f(\overline{X}_1,X_1) \leq c(X_1,\overline{X}_1) = 12 \leq 14$ (terpenuhi)

b). $X_2 = \{s,1,2\}$, $\overline{X}_2 = \{3,4,5,6,7,t\}$

$f(X_2,\overline{X}_2) - f(\overline{X}_2,X_2) = f(1,3) + f(2,4) + f(2,5) - f(4,1) = 8 + 0 + 4 - 0 = 12$

$c(X_2,\overline{X}_2) = c(1,3) + c(2,4) + c(2,5) = 10 + 5 + 5 = 20$

$f(X_2,\overline{X}_2) - f(\overline{X}_2,X_2) \leq c(X_2,\overline{X}_2) = 12 \leq 20$ (terpenuhi)

c). $X_3 = \{s,1,2,3,4,5\}$, $\overline{X}_3 = \{6,7,t\}$

$f(X_3,\overline{X}_3) - f(\overline{X}_3,X_3) = f(3,6) + f(4,7) + f(5,7) - f(6,4) = 5 + 2 + 5 - 0 = 12$

$c(X_3,\overline{X}_3) = c(3,6) + c(4,7) + c(5,7) = 5 + 2 + 6 = 13$

$f(X_3,\overline{X}_3) - f(\overline{X}_3,X_3) \leq c(X_3,\overline{X}_3) = 12 \leq 13$ (terpenuhi)

Theorema 2.4.2

Jaringan G (V,E,c,f) dengan himpunan V dipartisi menjadi tiga himpunan bagian yang terpisah S, R, dan T. Setiap $x \in S$ berhubungan dengan dua fungsi real nonnegatif a(x) dan a'(x), dimana $a(x) \le a'(x)$, dan untuk setiap $x \in T$ berhubungan dengan dua fungsi real nonnegatif b(x) dan b'(x), dimana $b(x) \le b'(x)$, sehingga

$$a(x) \le f(x,V) - f(V,x) \le a'(x), \qquad x \in S \qquad (2.5)$$

$$f(x,V) - f(V,x) = 0, \qquad x \in R \qquad (2.6)$$

$$b(x) \le f(V,x) - f(x,V) \le b'(x), \qquad x \in T \qquad (2.7)$$

$$c(x,y) \ge f(x,y) \ge 0, \qquad (x,y) \in E \qquad (2.8)$$

adalah fisibel jika dan hanya jika

$$c(X,\overline{X}) \ge b(T \cap \overline{X}) - a'(S \cap \overline{X}) \qquad (2.9)$$

$$c(X,\overline{X}) \ge a(S \cap X) - b'(T \cap X) \qquad (2.10)$$

berlaku untuk setiap $X \subseteq V$, dimana $\overline{X} = V - X$

Bukti

Syarat perlu

Diketahui :

$$a(x) \le f(x,V) - f(V,x) \le a'(x), \qquad x \in S \qquad (2.5)$$

$$f(x,V) - f(V,x) = 0, \qquad x \in R \qquad (2.6)$$

$$b(x) \le f(V,x) - f(x,V) \le b'(x), \qquad x \in T \qquad (2.7)$$

$$c(x,y) \ge f(x,y) \ge 0, \qquad (x,y) \in E \qquad (2.8)$$

Dibuktikan :

$$c(X,\overline{X}) \geq b(T \cap \overline{X}) - a'(S \cap \overline{X}) \quad (2.9)$$

$$c(X,\overline{X}) \geq a(S \cap X) - b'(T \cap X) \quad (2.10)$$

Diasumsikan bahwa terdapat sebuah aliran f dalam G yang memenuhi kondisi (2.5) – (2.7), yang dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$a(x) \leq f(x,V) - f(V,x) \qquad x \in S \quad (2.11)$$

$$f(x,V) - f(V,x) = 0 \qquad x \in R \quad (2.12)$$

$$f(x,V) - f(V,x) \leq b'(x) \qquad x \in T \quad (2.13)$$

dan

$$f(V,x) - f(x,V) \leq a'(x) \qquad x \in S \quad (2.14)$$

$$f(V,x) - f(x,V) = 0 \qquad x \in R \quad (2.15)$$

$$b(x) \leq f(V,x) - f(x,V) \qquad x \in T \quad (2.16)$$

Misalkan $x \in X$, maka kondisi (2.11) – (2.13) dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$a(S \cap X) \leq f(S \cap X, V) - f(V, S \cap X) \quad (2.17)$$

$$f(R \cap X, V) - f(V, R \cap X) = 0 \quad (2.18)$$

$$f(T \cap X, V) - f(V, T \cap X) \leq b'(T \cap X) \quad (2.19)$$

Misalkan $x \in \overline{X}$, untuk kondisi (2.14) – (2.16) dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$f(S \cap \overline{X}, V) - f(V, S \cap \overline{X}) \leq a'(S \cap \overline{X}) \quad (2.20)$$

$$f(R \cap \overline{X}, V) - f(V, R \cap \overline{X}) = 0 \quad (2.21)$$

$$f(T \cap \overline{X}, V) - f(V, T \cap \overline{X}) \leq b(T \cap \overline{X}) \quad (2.22)$$

Kemudian kondisi (2.17) – (2.19) dan kondisi (2.20) – (2.22) masing-masing dijumlahkan, diperoleh :

$$f(S \cap X, V) + f(R \cap X, V) + f(T \cap X, V) - f(V, S \cap X) - f(V, R \cap X)$$
$$- f(V, T \cap X) \geq a(S \cap X) - b'(T \cap X) \quad (2.23)$$

$$f(V, S \cap \overline{X}) + f(V, R \cap \overline{X}) + f(V, T \cap \overline{X}) - f(S \cap \overline{X}, V) - f(R \cap \overline{X}, V)$$
$$- f(T \cap \overline{X}, V) \geq b(T \cap \overline{X}) - a'(S \cap \overline{X}) \quad (2.24)$$

Kondisi (2.23) dan kondisi (2.24) ekuivalen dengan

$$f(X, V) - f(V, X) \geq a(S \cap X) - b'(T \cap X) \quad (2.25)$$

$$f(V, \overline{X}) - f(\overline{X}, V) \geq b(T \cap \overline{X}) - a'(S \cap \overline{X}) \quad (2.26)$$

Dimana, $V = X \cup \overline{X}$ maka kondisi (2.25) dan (2.26) menjadi :

$$f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X) \geq a(S \cap X) - b'(T \cap X) \quad (2.27)$$

$$f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X) \geq b(T \cap \overline{X}) - a'(S \cap \overline{X}) \quad (2.28)$$

Berdasar pada theorema 2.4.1 diketahui bahwa :

$$f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X) \leq c(X, \overline{X})$$

maka (2.27) dan (2.28) menjadi :

$$c(X, \overline{X}) \geq b(T \cap \overline{X}) - a'(S \cap \overline{X})$$

$$c(X, \overline{X}) \geq a(S \cap X) - b'(T \cap X)$$

Terbukti diperoleh kondisi (2.9) dan (2.10), maka syarat perlu terbukti.

Syarat cukup

Diketahui :

$$c(X, \overline{X}) \geq b(T \cap \overline{X}) - a'(S \cap \overline{X})$$

$$c(X, \overline{X}) \geq a(S \cap X) - b'(T \cap X)$$

Dibuktikan :

$$a(x) \leq f(x,V) - f(V,x) \leq a'(x), \qquad x \in S$$

$$f(x,V) - f(V,x) = 0, \qquad x \in R$$

$$b(x) \leq f(V,x) - f(x,V) \leq b'(x), \qquad x \in T$$

$$c(x,y) \geq f(x,y) \geq 0, \qquad (x,y) \in E$$

Pertama dibentuk perluasan jaringan G'(V',E',c',f ') seperti pada Gambar 2.4.2, dengan menghubungkan titik baru s,t,u dan v dan garis berarah (s,S), (u,S), (T,t), (T,v), (u,t), (s,v) dan (t,s) dengan kapasitas yang didefinisikan sebagai :

$$c'(s,x) = a'(x) - a(x), \qquad x \in S \tag{2.29a}$$

$$c'(u,x) = a(x), \qquad x \in S \tag{2.29b}$$

$$c'(x,t) = b'(x) - b(x), \qquad x \in T \tag{2.29c}$$

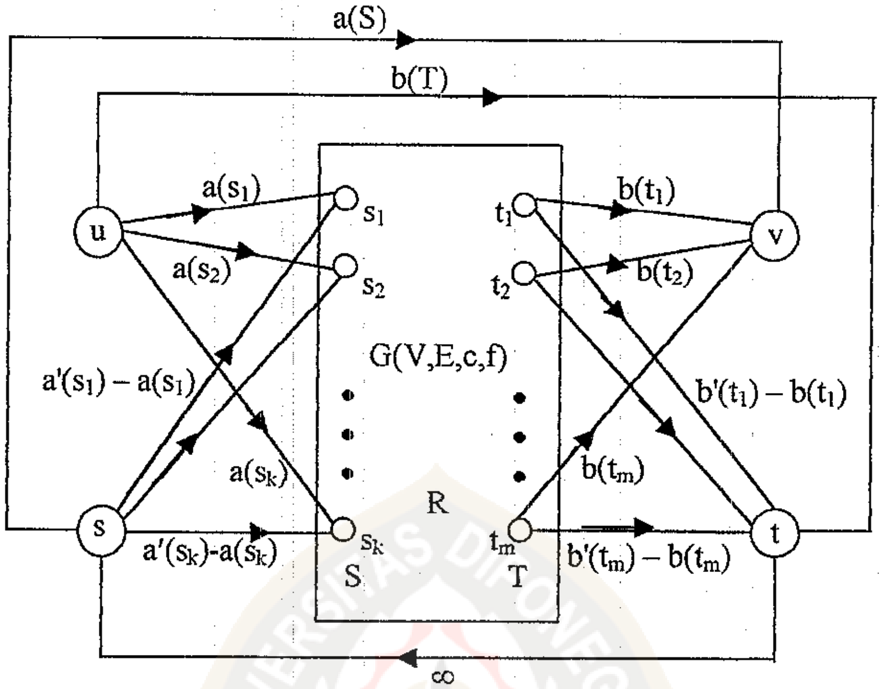
$$c'(x,v) = b(x), \qquad x \in T \tag{2.29d}$$

$$c'(u,t) = b(T) \tag{2.29e}$$

$$c'(s,v) = a(S) \tag{2.29f}$$

$$c'(t,s) = \infty \tag{2.29g}$$

$$c'(x,y) = c(x,y), \qquad (x,y) \in E \tag{2.29h}$$



Gambar 2.4.2. Suatu jaringan G'(V',E',c',f') yang diperoleh dari perluasan jaringan G(V,E,c,f) yang menghubungkan titik-titik s,t,u dan v dengan arah panah seperti pada Gambar.

Misalkan f adalah alur yang fisibel dalam G. Alur f dalam G diperluas menjadi f ' dalam G' dengan mendefinisikan :

$$f'(s,x) = f(x,V) - f(V,x) - a(x), \qquad x \in S \qquad (2.30a)$$

$$f'(u,x) = a(x), \qquad x \in S \qquad (2.30b)$$

$$f'(x,t) = f(V,x) - f(x,V) - b(x), \qquad x \in T \qquad (2.30c)$$

$$f'(x,v) = b(x), \qquad x \in T \qquad (2.30d)$$

$$f'(u,t) = b(T) \qquad (2.30e)$$

$$f'(s,v) = a(S) \qquad (2.30f)$$

$$f'(t,s) = f(S,V) - f(V,S) \qquad (2.30g)$$

$$f'(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in E \qquad (2.30h)$$

Terlihat bahwa f ' yang didefinisikan tersebut merupakan alur dari sumber ke tujuan dalam G' yang bernilai a(S) + b(T).

Untuk membuktikannya, misalkan (X', $\overline{X}'$) merupakan suatu potongan didalam G'. Kasus di bawah ini yang membedakannya.

KASUS 1

$s \in X'$ dan $t \in \overline{X}'$. Jika subset-subset X' dan $\overline{X}'$ di V' dipartisi menjadi

$X' = \{u,s\} \cup X, \qquad \overline{X}' = \{v,t\} \cup \overline{X}$

Dengan $\overline{X} = V - X$, maka

$$c'(X', \overline{X}') = c'(u,t) + c'(u,\overline{X}) + c'(s,v) + c'(s,\overline{X}) + c'(X,v) + c'(X,t) + c'(X,\overline{X})$$

$$= b(T) + a(S \cap \overline{X}) + a(S) + a'(S \cap \overline{X}) - a(S \cap \overline{X}) + b(T \cap X) + b'(T \cap X) - b(T \cap X) + c(X,\overline{X})$$

karena $a'(S \cap \overline{X}) \geq a(S \cap \overline{X})$ dan $b'(T \cap X) \geq b(T \cap X)$, ini menunjukkan bahwa

$$c'(X', \overline{X}') \geq a(S) + b(T).$$

KASUS 2

$s \in \overline{X}'$ dan $t \in X'$.

pada kasus ini, $c'(X', \overline{X}')$ adalah infinite dan tidak ada kondisi yang memenuhi.

KASUS 3

$s,t \in X'$. Partisi dari X' dan $\overline{X}'$ ke dalam

$X' = \{s,t,u\} \cup X, \overline{X}' = \{v\} \cup \overline{X}$

Maka didapat

$$c'(X', \overline{X}') = c'(s,v) + c'(s,\overline{X}) + c'(u,\overline{X}) + c'(X,v) + c'(X,\overline{X})$$

$$= a(S) + a'(S \cap \overline{X}) - a(S \cap \overline{X}) + a(S \cap \overline{X})$$

$$+ b(T \cap X) + c(X, \overline{X})$$

$$= a(S) + a'(S \cap \overline{X}) + b(T) - b(T \cap \overline{X}) + c(X, \overline{X})$$

diketahui : $c(X, \overline{X}) \geq b(T \cap \overline{X}) - a'(S \cap \overline{X})$, maka :

$$c'(X', \overline{X}') \geq a(S) + b(T)$$

KASUS 4

$s,t \in \overline{X}'$. Partisi X' dan $\overline{X}'$ ke dalam

$$X' = \{u\} \cup X, \qquad \overline{X}' = \{s,t,v\} \cup \overline{X}$$

Kemudian didapat

$$c'(X', \overline{X}') = c'(u,t) + c'(u, \overline{X}) + c'(X,t) + c'(X,v) + c'(X, \overline{X})$$

$$= b(T) + a(S \cap \overline{X}) + b'(T \cap X) - b(T \cap X) + b(T \cap X)$$

$$+ c(X, \overline{X})$$

$$= b(T) + a(S) - a(S \cap X) + b'(T \cap X) + c(X, \overline{X})$$

diketahui $c(X, \overline{X}) \geq a(S \cap X) - b'(T \cap X)$, maka :

$$c'(X', \overline{X}') \geq a(S) + b(T)$$

Terbukti bahwa f ' yang didefinisikan tersebut memiliki aliran maksimal dari pusat sumber ke tujuan dalam G' adalah a(S) + b(T), sehingga setiap potongan dalam G'(V' ,E' ,c' ,f ') memiliki nilai kapasitas paling kecil a(S) + b(T). Hal ini menunjukkan bahwa permasalahan tersebut fisibel.

Berdasarkan uraian tersebut dapat disimpulkan bahwa kondisi (2.5) – (2.8) adalah fisibel jika nilai aliran maksimal dari sumber ke tujuan dalam G' adalah a(S) + b(T).

Kemudian, karena f ' merupakan aliran dari sumber ke tujuan dalam G' yang bernilai a(S) + b(T) maka :

$$f'(u,x) = a(x), \qquad x \in S \qquad (2.30a)$$

$$f'(x,v) = b(x), \qquad x \in T \qquad (2.30b)$$

untuk $x \in S$, maka diperoleh f ' sebagai berikut :

$$f'(u,x) + f'(s,x) = f(x,V) - f(V,x) \qquad (2.31)$$

dari (2.29a) diketahui $c'(s,x) = a'(x) - a(x)$, dan $c'(s,x) \geq f'(s,x) \geq 0$, maka diperoleh $a'(x) - a(x) \geq f'(s,x) \geq 0$

sehingga kondisi (2.31) dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$a'(x) \geq f(x,V) - f(V,x) \geq a(x) \qquad x \in S \qquad (2.32)$$

Selanjutnya untuk $x \in T$ diperoleh f ' sebagai berikut :

$$f'(x,v) + f'(x,t) = f(V,x) - f(x,V) \qquad (2.33)$$

dari kondisi (2.29c) diketahui $c'(x,t) = b'(x) - b(x)$, maka kondisi (2.33) menjadi :

$$b'(x) \geq f(V,x) - f(x,V) \geq b(x), \qquad x \in T \qquad (2.34)$$

Dapat disimpulkan bahwa jika pada jaringan G terdapat suatu aliran yang mempertemukan batas bawah persediaan pada setiap sumber dan batas atas permintaan pada setiap tujuan, dan jika pada jaringan tersebut terdapat suatu aliran yang memenuhi batas atas persediaan pada setiap sumber dan batas bawah permintaan pada setiap tujuan, maka terdapat suatu aliran yang fisibel didalam jaringan persediaan permintaan.

Dengan memperhatikan bahwa jika himpunan $a(x) = 0$ untuk $x \in S$ dan $b'(x) = \infty$ untuk $x \in T$, maka theorema 2.4.2 menghasilkan theorema persediaan-permintaan.

Karena syarat perlu dan cukupnya terbukti, maka theorema terbukti.

2.5. Theorema Aliran untuk Masalah Subgraph (p,s) dari Digraph (p,s)

Salah satu aplikasi dari theorema aliran perluasan persediaan-permintaan adalah penyelesaian masalah subgraph (p,s) dari digraph (p,s), yaitu untuk menentukan syarat perlu dan syarat cukup dari sebuah directed graph agar mempunyai subgraph (p,s) yang memenuhi derajat keluar dan derajat masuk yang ditentukan. Jika dalam sebuah digraph (p,s) derajat keluar sama dengan derajat masuk dari setiap titiknya dan tidak mempunyai self-loop maka digraph (p,s) tersebut mempunyai subgraph (p,0) simetri atau graph (p,0). Jadi theorema untuk penyelesaian masalah subgraph dari digraph menjadi landasan theorema untuk penyelesaian masalah barisan graphical.

Theorema 2.5.1

Misalkan $G(V,E)$ sebuah digraph yang menghubungkan setiap $x \in V$ yang memenuhi

$$0 \leq a(x) \leq a'(x) \tag{2.35a}$$

$$0 \leq b(x) \leq b'(x) \tag{2.35b}$$

dengan $a(x)$, $a'(x)$, $b(x)$, $b'(x)$ integer nonnegatif.

Digraph G(V,E) tersebut mempunyai subgraph (p,s) H dengan derajat keluar $d_H^+(x)$ dan derajat masuk $d_H^-(x)$ yang memenuhi :

$$a(x) \leq d_H^+(x) \leq a'(x) \tag{2.36a}$$

$$b(x) \leq d_H^-(x) \leq b'(x) \tag{2.36b}$$

Jika dan hanya jika

$$\sum_{y \in \gamma(x)} \min\left\{b'(y), \sum_{x \in X} \min\left[|(x,y)|, \delta_{xy}(s-p)+p\right]\right\} \geq a(X) \tag{2.37a}$$

$$\sum_{y \in \gamma^*(x)} \min\left\{a'(y), \sum_{x \in X} \min\left[|(x,y)|, \delta_{xy}(s-p)+p\right]\right\} \geq b(X) \tag{2.37b}$$

Untuk semua $X \in V$, dimana

δ_{xy} : Kronecker delta,

$$\delta_{xy}\begin{cases} = 0, & x \neq y \\ = 1, & x = y \end{cases}$$

$\gamma(X)$: himpunan titik-titik terminal dari garis-garis di G(V,E) yang mempunyai titik asal di X.

$\gamma^*(X)$: himpunan titik-titik asal dari garis-garis di G(V,E) yang mempunyai titik terminal di X.

Bukti

Syarat perlu

Diketahui :

Sebuah digraph G(V,E) yang memenuhi $0 \leq a(x) \leq a'(x)$ dan $0 \leq b(x) \leq b'(x)$ mempunyai subgraph (p,s) H yang memenuhi :

$$a(x) \le d_H^+(x) \le a'(x)$$
$$b(x) \le d_H^-(x) \le b'(x)$$

Dibuktikan :

$$\sum_{y \in \gamma(x)} \min\left\{b'(y), \sum_{x \in X} \min\left[|(x,y)|, \delta_{xy}(s-p)+p\right]\right\} \ge a(X)$$
$$\sum_{y \in \gamma^*(x)} \min\left\{a'(y), \sum_{x \in X} \min\left[|(x,y)|, \delta_{xy}(s-p)+p\right]\right\} \ge b(X)$$

Pertama, mengubah permasalahan ini menjadi sebuah permasalahan aliran, yaitu digraph G(V,E) dibentuk menjadi directed graph bipartite B(V',V'',E') untuk setiap $x \in V$ dengan cara menghubungkan dua titik yaitu $x' \in V'$ dan $x'' \in V''$. Garis (x', y'') di dalam E' adalah sebuah garis (x,y) di G. Dalam kondisi ini garis-garis paralel x ke y di G diwakili dengan garis tunggal $(x', y'') \in E'$, sehingga B(V',V'',E') adalah sebuah digraph (1,0). Setiap garis $(x',y'') \in E'$ berhubungan dengan sebuah integer nonnegatif c(x', y'') yang disebut kapasitas (x',y''). Fungsi kapasitas c dari E' didefinisikan :

$$c(x', y'') = \min[\,|(x,y)|, p], \quad x \ne y \tag{2.38a}$$
$$= \min[\,|(x,y)|, s], \quad x = y \tag{2.38b}$$

Selanjutnya untuk melengkapi permasalahan persediaan-permintaan, setiap $x' \in V'$ dihubungkan dengan a(x') dan a'(x') dua integer nonnegatif dan setiap $x'' \in V''$ dihubungkan dengan dua integer nonnegatif b(x') dan b'(x'') yang memenuhi :

$$a(x') = a(x), \qquad a'(x') = a'(x),\ x \in V, \qquad x' \in V'$$
$$b(x') = b(x), \qquad b'(x'') = b'(x),\ x \in V, \qquad x'' \in V''$$

sehingga digraph bipartite B(V', V", E') dapat disajikan sebagai jaringan persediaan-permintaan B(V', V", E', c, f) dengan himpunan V' sebagai sumber dan himpunan V" sebagai tujuan.

Kemudian berdasar pada theorema 2.4.2 (theorema perluasan persediaan-permintaan), jaringan G (V, E, c, f) dengan himpunan V dipartisi menjadi tiga himpunan bagian S, R, dan T. Setiap $x \in S$ sebagai sumber berhubungan dengan a(x) dan a'(x) dimana $a(x) \leq a'(x)$, dan setiap $x \in T$ sebagai tujuan berhubungan dengan b(x) dan b'(x), dimana $b(x) \leq b'(x)$. Jaringan G (V, E, c, f) tersebut identik dengan jaringan persediaan-permintaan B(V',V",E',c,f) dengan himpunan V' sebagai sumber dan himpunan V" sebagai tujuan.

Sehingga pertidaksamaan pada jaringan G(V, E, c, f)

$$a(x) \leq f(x, V) - f(V,x) \leq a'(x), \qquad x \in S$$

$$f(x,V) - f(V,x) = 0, \qquad x \in R$$

$$b(x) \leq f(V,x) - f(x,V) \leq b'(x), \qquad x \in T$$

$$c(x,y) \geq f(x,y) \geq 0, \qquad (x,y) \in E$$

fisibel, jika dan hanya jika

$$c(X,\overline{X}) \geq b(T \cap \overline{X}) - a'(S \cap \overline{X})$$

$$c(X,\overline{X}) \geq a(S \cap X) - b'(T \cap X)$$

untuk setiap $X \subseteq V$, dimana $\overline{X} = V - X$, maka kondisi tersebut dapat diubah menjadi

$$a(x') \leq f(x', V' \cup V") - f(V' \cup V",x') \leq a'(x'), \qquad x' \in V' \qquad (2.39)$$

$$b(x") \leq f(V' \cup V", x") - f(x", V' \cup V") \leq b'(x"), \quad x" \in V" \qquad (2.40)$$

$$c(x',y") \geq f(x',y") \geq 0, \qquad (x',y") \in E' \qquad (2.41)$$

fisibel, jika dan hanya jika

$$c(X,\overline{X}) \geq b(V'' \cap \overline{X}) - a'(V' \cap \overline{X}) \quad (2.42a)$$

$$c(X,\overline{X}) \geq a(V' \cap X) - b'(V'' \cap X) \quad (2.42b)$$

Untuk setiap $X \subseteq V' \cup V''$, dan $\overline{X} = V' \cup V'' - X$ pada jaringan persediaan-permintaan $B(V', V'', E', c, f)$.

Karena jaringan B adalah bipartite dengan garis arah dari sebuah titik pada himpunan titik V' ke sebuah titik pada himpunan titik V" maka :

$$f(V' \cup V'', x') = 0 \quad (2.43a)$$

$$f(x'', V' \cup V'') = 0 \quad (2.43b)$$

Kemudian subset-subset X dan $\overline{X}$ adalah :

$$X = X' \cup X'' \quad (2.44a)$$

$$\overline{X} = \overline{X}' \cup \overline{X}'' \quad (2.44b)$$

dimana $X' \subseteq V'$, $X'' \subseteq V''$, dan

$$\overline{X}' = V' - X' \quad (2.45a)$$

$$\overline{X}'' = V'' - X'' \quad (2.45b)$$

Dan dengan menggunakan sifat bipartite dari jaringan B, pertidaksamaan (2.42a) dan (2.42b) dapat disederhanakan menjadi :

$$c(X', \overline{X}'') \geq b(\overline{X}'') - a'(\overline{X}') \quad (2.46a)$$

$$c(X', \overline{X}'') \geq a(X') - b'(X'') \quad (2.46b)$$

Sehingga jaringan persediaan-permintaan $B(V' \cup V'', E', c, f)$ dengan himpunan V' sebagai sumber dan himpunan V" sebagai tujuan menjadi :

$$a(x') \leq f(x', V' \cup V'') \leq a'(x'), \quad x' \in V' \tag{2.47}$$

$$b(x'') \leq f(V' \cup V', x'') \leq b'(x''), \quad x'' \in V'' \tag{2.48}$$

$$c(x',y'') \geq f(x',y'') \geq 0, \qquad (x',y'') \in E' \tag{2.49}$$

adalah fisibel jika dan hanya jika

$$c(X', \overline{X}'') \geq b(\overline{X}'') - a'(\overline{X}') \tag{2.50a}$$

$$c(X', \overline{X}'') \geq a(X') - b'(X'') \tag{2.50b}$$

untuk setiap subset $X' \subseteq V'$ dan $X'' \subseteq V''$.

Jadi dapat disimpulkan jika directed graph G(V,E) memiliki sebuah spanning subgraph (p,s) H dengan derajat keluar dan derajat masuk yang memenuhi pertidaksamaan (2.36a) dan (2.36b), maka ada f yang seluruh alirannya fisibel di B yang memenuhi (2.47) – (2.49) dengan fungsi kapasitas yang didefinisikan di (2.38a) dan (2.38b).

Kemudian karena kondisi (2.50a) dan (2.50b) masih dalam jaringan berbentuk bipartite B dengan subset $X' \subseteq V'$ dan $X'' \subseteq V''$ maka (2.50a) dan (2.50b) akan diubah ke dalam bentuk G(V,E) dengan $X \subseteq V$.

Kondisi pertama untuk (2.50b) dengan $X' \subseteq V'$.

Misalkan, $$U'' = \{y'' \mid y'' \in V'', b'(y'') < c(X', y'')\} \tag{2.51}$$

$$U'' \subseteq V''$$

Dari definisi tersebut maka pertidaksamaan (2.50b) menjadi

$$c(X', \overline{X}'') \geq a(X') - b'(X'')$$

$$c(X', \overline{X}'') + b'(X'') \geq a(X')$$

$$c(X', \overline{U}'') + b'(U'') = \sum_{y'' \in \gamma(X')} \min[b'(y''), c(X', y'')] \geq a(X') \tag{2.52}$$

Ruas kiri dari (2.52) adalah jumlahan minimum untuk semua $X'' \subseteq V''$, seperti berikut ini :

$$c(X', \overline{U}'') + b'(U'') = c(X', \overline{U}'' \cap X'') + c(X', \overline{X}'') - c(X', U'' \cap \overline{X}'')$$

$$+ b'(U'' \cap \overline{X}'') + b'(X'') - b'(\overline{U}'' \cap X'')$$

karena

$$c(X', \overline{U}'' \cap X'') - b'(\overline{U}'', X'') \leq 0$$

$$b'(U'' \cap \overline{X}'') - c(X', U'' \cap \overline{X}'') \leq 0, \text{ maka}$$

$$c(X', \overline{U}'') + b'(U'') \leq c(X', \overline{X}'') + b'(X'')$$

Analog untuk kondisi (2.43a) dengan subset $X'' \subseteq V''$ dan didefinisikan

$$U' = \{x' \mid x' \in V', a'(x') > c(x', X'')\}, \quad (2.53)$$

$$U' \subseteq V'$$

Dari definisi tersebut di atas maka pertidaksamaan (2.50a) menjadi

$$c(X', \overline{X}'') \geq b(\overline{X}'') - a'(\overline{X}')$$

$$c(X', \overline{X}'') + a'(\overline{X}') \geq b(\overline{X}'')$$

$$c(U', \overline{X}'') + a'(\overline{U}') = \sum_{x' \in \gamma^{-}(X'')} \min[a'(x'), c(x', X'')] \geq b(X'') \quad (2.54)$$

Ruas kiri dari (2.54) adalah jumlahan minimum untuk semua $X' \subseteq V'$, seperti berikut ini :

$$c(U', \overline{X}'') + a'(\overline{U}') = c(U' \cap \overline{X}', \overline{X}'') + c(X', \overline{X}'') - c(\overline{U}' \cap X', \overline{X}'')$$

$$+ a'(\overline{U}' \cap X') + a'(\overline{X}') - a'(U' \cap \overline{X}')$$

karena

$$c(U' \cap \overline{X}', \overline{X}'') - a'(U' \cap \overline{X}') \leq 0$$

$$a'(\overline{U}' \cap X') - c(\overline{U}' \cap X', \overline{X}'') \leq 0, \text{ maka}$$

$$c(U', \overline{X}'') + a'(\overline{U}') \leq c(X', \overline{X}'') + a'(X')$$

Untuk perhitungan c (X', y") dan c (x',X"), $y'' \in V''$ dan $x' \in V'$ dengan memisalkan

$$X = \{x \in V \mid x' \in X'\} \tag{2.55a}$$

$$Y = \{y \in V \mid y'' \in X''\} \tag{2.55b}$$

Dari definisi fungsi kapasitas (2.38a) dan (2.38b) didapatkan

$$c\,(X', y'') = \sum_{x \in X} \min \lfloor |(x, y)|, \delta_{xy}\,(s - p) + p \rfloor \tag{2.56a}$$

$$c\,(x', Y'') = \sum_{y \in Y} \min \lfloor |(x, y)|, \delta_{xy}\,(s - p) + p \rfloor \tag{2.56b}$$

Dan dengan menggunakan (2.56a) dan (2.56b) pada pertidaksamaan (2.52) dan (2.54) di dapat pertidaksamaan (2.57a) dan (2.57b) sebagai berikut :

$$\sum_{y \in \gamma(X)} \min \left\{ b'(y), \sum_{x \in X} \min \left[|(x, y)|, \delta_{xy}\,(s - p) + p \right] \right\} \geq a\,(X) \tag{2.57a}$$

$$\sum_{y \in \gamma^*(X)} \min \left\{ a'(y), \sum_{x \in X} \min \left[|(y, x)|, \delta_{xy}\,(s - p) + p \right] \right\} \geq b\,(X) \tag{2.57b}$$

Syarat perlu terbukti.

Syarat cukup

Diketahui :

$$\sum_{y \in \gamma(x)} \min \left\{ b'(y), \sum_{x \in X} \min \left[|(x, y)|, \delta_{xy}\,(s - p) + p \right] \right\} \geq a\,(X)$$

$$\sum_{y \in \gamma^*(x)} \min \left\{ a'(y), \sum_{x \in X} \min \left[|(x, y)|, \delta_{xy}\,(s - p) + p \right] \right\} \geq b\,(X)$$

Dibuktikan :

Sebuah digraph G(V,E) yang memenuhi : $0 \leq a\,(x) \leq a'(x)$ dan $0 \leq b\,(x) \leq b'(x)$ mempunyai subgraph (p,s) H yang memenuhi :

$$a\,(x) \leq d_H^+(x) \leq a'\,(x)$$

$$b\,(x) \leq d_H^-(x) \leq b'\,(x)$$

Kondisi (2.57a) dan (2.57b) ekuivalen dengan kondisi (2.50a) dan (2.50b) yang diperoleh dari kondisi (2.9) dan (2.10) pada theorema 2.4.2. Pada theorema tersebut diketahui bahwa kondisi (2.9) dan (2.10) merupakan syarat fisibelnya kondisi (2.5) – (2.8), dan kondisi (2.50a) dan (2.50b) merupakan syarat fisibelnya kondisi (2.47) – (2.49) yang merupakan jaringan pada digraph bipartite B dari V' ke V". karena (2.47) – (2.49) fisibel dari V' ke V" pada digraph bipartite B, maka dapat diperoleh sebuah subgraph (p,s) H yang memenuhi :

$$a(x) \le d^{+}_{H}(x) \le a'(x)$$

$$b(x) \le d^{-}_{H}(x) \le b'(x)$$

dari sebuah digraph, jika ada garis (x,y) di H dengan $f(x', y'') \neq 0$.

Syarat cukup terbukti.

Karena syarat perlu dan syarat cukup terbukti, maka theorema terbukti.

Theorema 2.5.2

Sebuah digraph G(V,E) mempunyai sebuah subgraph (p,s) H dengan derajat keluar $d^{+}_{H}(x)$ dan derajat masuk $d^{-}_{H}(x)$ memenuhi :

$$d^{+}_{H}(x) = a(x) \ge 0, \qquad x \in V \tag{2.58a}$$

$$d^{-}_{H}(x) = b(x) \ge 0, \qquad x \in V \tag{2.58b}$$

jika dan hanya jika

$$a(V) = b(V) \tag{2.59}$$

dan

$$\sum_{y \in \gamma(X)} \min\left\{ b(y), \sum_{x \in X} \min\left[|(x,y)|, \delta_{xy}(s-p) + p \right] \right\} \ge a(X) \tag{2.60a}$$

atau $$\sum_{y \in \gamma^*(X)} \min\left\{a(y), \sum_{x \in X} \min\left[|(y,x)|, \delta_{xy}(s-p)+p\right]\right\} \geq b(X) \quad (2.60b)$$

untuk semua $X \subseteq V$

Bukti

Syarat perlu

Diketahui :

Sebuah digraph G(V,E) mempunyai sebuah subgraph (p,s) H yang memenuhi :

$$d^+_H(x) = a(x) \geq 0, \qquad x \in V \quad (2.58a)$$

$$d^-_H(x) = b(x) \geq 0, \qquad x \in V \quad (2.58b)$$

Dibuktikan :

$a(V) = b(V)$ dan

$$\sum_{y \in \gamma(X)} \min\left\{b(y), \sum_{x \in X} \min\left[|(x,y)|, \delta_{xy}(s-p)+p\right]\right\} \geq a(X) \quad (2.60a)$$

atau $$\sum_{y \in \gamma^*(X)} \min\left\{a(y), \sum_{x \in X} \min\left[|(y,x)|, \delta_{xy}(s-p)+p\right]\right\} \geq b(X) \quad (2.60b)$$

Diketahui bahwa dalam sebuah digraph ataupun dalam sebuah subgraph, setiap garis memberikan satu derajat keluar dari titik x dan satu derajat masuk untuk titik x yang lain, sehingga jumlah derajat keluar dari semua titik dalam sebuah digraph sama dengan jumlah derajat masuknya dan memiliki persamaan :

$$\sum_{x \in V} d^+_H(x) = \sum_{x \in V} d^-_H(x)$$

Karena subgraph (p,s) H memenuhi :

$$d^+_H(x) = a(x) \geq 0, \qquad x \in V$$

$$d^-_H(x) = b(x) \geq 0, \qquad x \in V, \text{ maka}$$

$$\sum_{x \in V} d_H^+(x) = \sum_{x \in V} d_H^-(x)$$

$$\sum_{x \in V} a(x) = \sum_{x \in V} b(x)$$

$$a(V) = b(V)$$

Kemudian untuk membuktikan (2.60a) dan (2.60b) yaitu dengan memperlihatkan bahwa (2.59) dan (2.60a) mengakibatkan (2.60b), sedang (2.59) dan (2.60b) mengakibatkan (2.60a).

Menggunakan bukti theorema 2.5.1 dengan a(x) = a'(x) dan b(x) = b'(x), diketahui pertidaksamaan (2.60a) dan (2.60b) ekuivalen dengan (2.50a) dan (2.50b). Sehingga dengan menggunakan simbol-simbol yang didefinisikan di (2.50a) dan (2.50b) dalam jaringan persediaan-permintaan bipartite B, akan diperlihatkan bahwa (2.59) dan (2.50b) mengakibatkan (2.50a) yaitu :

$$c(X', \overline{X}'') \geq a(X') - b'(X'') \qquad \text{(dari 2.50b)}$$

$$a(\overline{X}') + c(X', \overline{X}'') \geq a(\overline{X}') + a(\overline{X}') - b'(X'')$$

$$a(\overline{X}') + c(X', \overline{X}'') \geq \{a(\overline{X}') + a(\overline{X}')\} - b'(X'') \qquad (\overline{X} + X = V)$$

$$= a(V') - b'(X'') \qquad (b'(x) = b(x))$$

$$= a'(V') - b(X'') \qquad (a(V) = b(V))$$

$$= b(V'') - b(X'') \qquad (\overline{X} = V - X)$$

$$a(\overline{X}') + c(X', \overline{X}'') \geq b(\overline{X}'')$$

$$c(X', \overline{X}'') \geq b(\overline{X}'') - a(\overline{X}') \qquad (a(x) = a'(x))$$

$$c(X', \overline{X}'') \geq b(\overline{X}'') - a'(\overline{X}')$$

Terbukti didapat persamaan (2.50a).

Kemudian untuk (2.59) dan (2.50a) mengakibatkan (2.50b) yaitu :

$c(X', \overline{X}'') \geq b(\overline{X}'') - a'(\overline{X}')$ (dari 2.50a)

$b(X'') + c(X', \overline{X}'') \geq b(X'') + b(\overline{X}'') - a'(\overline{X}')$

$b(X'') + c(X', \overline{X}'') \geq \{b(X'') + b(\overline{X}'')\} - a'(\overline{\geq}')$ ($\overline{X} + X = V$)

$= b(V'') - a'(\overline{X}')$ $(a(V) = b(V))$

$= a(V') - a'(\overline{X}')$ $(a'(x) = a(x))$

$= a'(V') - a(\overline{X}')$ $(X = V - \overline{X})$

$b(X'') + c(X', \overline{X}'') \geq a(X')$

$c(X', \overline{X}'') \geq a(X') - b(X'')$ $(b'(x) = b(x))$

$c(X', \overline{X}'') \geq a(X') - b'(X'')$

Terbukti didapat persamaan (2.50b).

Karena $a(x) = a'(x)$ dan $b(x) = b'(x)$ memenuhi kondisi (2.50a) dan (2.50b) maka kondisi (2.37a) dan (2.37b) menjadi :

$$\sum_{y \in \gamma(X)} \min\left\{b(y), \sum_{x \in X} \min\left[|(x,y)|, \delta_{xy}(s-p) + p\right]\right\} \geq a(X)$$

atau $$\sum_{y \in \gamma^*(X)} \min\left\{a(y), \sum_{x \in X} \min\left[|(y,x)|, \delta_{xy}(s-p) + p\right]\right\} \geq b(X)$$

Syarat perlu terbukti.

Syarat cukup

Diketahui :

$a(V) = b(V)$ dan

$$\sum_{y \in \gamma(X)} \min\left\{b(y), \sum_{x \in X} \min\left[|(x,y)|, \delta_{xy}(s-p) + p\right]\right\} \geq a(X)$$

atau $\displaystyle\sum_{y\in\gamma^*(X)} \min\left\{a(y), \sum_{x\in X} \min\left[|(y,x)|, \delta_{xy}(s-p) + p\right]\right\} \geq b(X)$

Dibuktikan :

Sebuah digraph G(V,E) mempunyai subgraph (p,s) H yang memenuhi :

$$d^+_H(x) = a(x) \geq 0, \qquad x \in V$$

$$d^-_H(x) = b(x) \geq 0, \qquad x \in V$$

bukti :

diketahui a(V) = b(V), untuk setiap $x \in V$ maka didapat $\sum_{x\in V} a(x) = \sum_{x\in V} b(x)$.

Kemudian karena untuk setiap $x\in V$ dalam subgraph H memenuhi :

$\sum_{x\in V} d^+_H(x) = \sum_{x\in V} d^-_H(x)$

dan berdasar pada theorema 2.5.1 untuk kondisi (2.36a) dan (2.36b), maka diperoleh :

$$d^+_H(x) = a(x) \geq 0, \qquad x \in V$$

$$d^-_H(x) = b(x) \geq 0, \qquad x \in V$$

Selanjutnya untuk kondisi (2.60a) dan (2.60b) diperoleh dari theorema 2.5.1 pada kondisi (2.37a) dan (2.37b) dengan a(x) = a'(x) dan b(x) = b'(x).

karena a(x) = a'(x) dan b(x) = b'(x) maka kondisi (2.36a) dan (2.36b) menjadi :

$$d^+_H(x) = a(x) \geq 0, \qquad x \in V$$

$$d^-_H(x) = b(x) \geq 0, \qquad x \in V$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa sebuah digraph mempunyai subgraph (p,s). Syarat cukup terbukti.

Karena syarat perlu dan cukup telah terbukti, maka theorema terbukti.