BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Proses Stokhastik dan Runtun Waktu.

Proses stokhastik adalah keluarga variabel random berindek waktu $Z(\omega,t)$, dimana ω anggota ruang sampel dan t anggota himpunan berindek. Untuk t yang tetap $Z(\omega,t)$ merupakan variabel random dan untuk ω yang tetap $Z(\omega,t)$ sebagai fungsi dari t disebut *fungsi sampel atau realisasi*. Fungsi sampel atau realisasi dari proses stokhastik yang tertentu disebut dengan runtun waktu. Dengan demikian runtun waktu merupakan himpunan bagian dari proses stokhastik. Dengan pengertian bahwa proses stokhastik $Z(\omega,t)$ adalah variabel random berindek waktu yang didefinisikan dalam ruang sampel, maka penulisan $Z(\omega,t)$ bisa disederhanakan menjadi $Z(t)$ atau Z_t.

Untuk proses stokhastik $\{Z_t : t = 0,\pm1,\pm2,\dots\}$ fungsi mean dari proses didefinisikan sebagai :

$$\mu_t = E(Z_t)\ , \qquad \text{untuk } t = 0,\pm1,\pm2,\dots\dots$$

fungsi autokovarian

$$\gamma_{t,s} = \operatorname{cov}(Z_t, Z_s)\ , \quad \text{untuk } t = 0,\pm1,\pm2,\dots\dots$$

dimana

$$\operatorname{cov}(Z_t, Z_s) = E\left[(Z_t - \mu_t)(Z_s - \mu_s)\right] = E(Z_t Z_s - \mu_t \mu_s)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

fungsi autokorelasi :

$$\rho_{t,s} = \text{corr}(Z_t, Z_s)\ , \qquad \text{untuk } t = 0, \pm1, \pm2, \ldots\ldots$$

dimana $\text{corr}(Z_t, Z_s) = \dfrac{\text{cov}(Z_t, Z_s)}{(\text{var}(Z_t)\,\text{var}(Z_s))^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\gamma_{t,s}}{(\gamma_{t,t}.\gamma_{s,s})^{\frac{1}{2}}}$

Untuk harga $\rho_{t,s}$ mendekati ± 1, menunjukkan ketergantungan yang kuat, harga yang mendekati nol menunjukkan lemah atau tidak ada ketergantungan dan jika $\rho_{t,s} = 0$ menunjukkan Z_t dan Z_s tidak berkorelasi.

Untuk membuat inferensi tentang struktur proses stokhastik dari observasi terbatas yang diambil, harus dibuat penyederhanaan asumsi tentang strukturnya. Hal yang sangat penting adalah asumsi tentang kesetasioneran. Secara khusus proses stokhastik $\{Z_t\}$ disebut stasioner kuat jika distribusi bersama dari $Z_{t_1}, Z_{t_2}, Z_{t_3}, \ldots\ldots, Z_{t_n}$ sama dengan distribusi bersama dari $Z_{(t_1-k)}, Z_{(t_2-k)}, \ldots\ldots, Z_{(t_n-k)}$ untuk semua titik waktu $t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n$ dan semua lag k.

Jika n =1 maka distribusi Z_t sama dengan distribusi Z_{t-k} untuk semua k, sehingga $E(Z_t) = E(Z_{t-k})$ juga $\text{var}(Z_t) = \text{var}(Z_{t-k})$. Untuk n = 2, maka distribusi (Z_t, Z_s) harus sama dengan (Z_{t-k}, Z_{s-k}) yang mana $\text{cov}(Z_t, Z_s) = \text{cov}(Z_{t-k}, Z_{s-k})$ untuk semua t,s dan k. Dengan mengambil t=s dan k=t, didapat :

$$\begin{aligned}
\gamma_{t,s} = \text{cov}(Z_t, Z_s) &= \text{cov}(Z_{t-s}, Z_0) \\
&= \text{cov}(Z_0, Z_{s-t}) \\
&= \text{cov}(Z_0, Z_{|t-s|}) \\
&= \gamma_{0,|t-s|}
\end{aligned}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Kovarian antara Z_t dan Z_s tergantung waktu hanya melalui perbedaan $|t-s|$ dan tidak tergantung pada waktu aktual t dan s. Dengan demikian untuk proses stasioner notasi penulisan dapat disederhanakan menjadi :

$$\gamma_k = \mathrm{cov}(Z_t, Z_{t-k}) \text{ dan}$$

$$\rho_k = \mathrm{corr}(Z_t, Z_{t-k}) = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Proses stokhastik $\{Z_t\}$ dikatakan stasioner atau stasioner orde kedua jika:

1. Fungsi mean konstan sepanjang waktu,
2. $\gamma_{t,t-k} = \gamma_{0,k}$ untuk semua t dan lag k.

Bentuk stasioner yang digunakan dalam tugas akhir ini selalu berarti stasioner orde dua.

2.2. Fungsi Autokovarian dan Fungsi Autokorrelasi

Untuk proses stasioner $\{Z_t\}$ dipunyai $E(Z_t) = \mu$ dan $\mathrm{var}(Z_t) = E(Z_t - \mu)^2 = \sigma^2$ yang konstan dan $\mathrm{cov}(Z_t, Z_s)$ hanya merupakan fungsi dari selisih waktu $|t-s|$, dalam hal ini :

$$\gamma_k = \mathrm{cov}(Z_t Z_{t+k}) = E(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)$$

$$\rho_k = \frac{\mathrm{cov}(Z_t, Z_{t+k})}{\sqrt{\mathrm{var}(Z_t)}\sqrt{\mathrm{var}(Z_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

dimana diketahui bahwa $\mathrm{var}(Z_t) = \mathrm{var}(Z_{t+k}) = \gamma_0$. Sebagai fungsi dari k γ_k disebut *fungsi autokovarian* dan ρ_k disebut *fungsi autokorrelasi*(FAK) dalam runtun

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

waktu, karena itu menunjukkan kovarian dan korrelasi antara Z_t dan Z_{t+k} dari proses yang sama dan hanya dipisahkan oleh k lag waktu.

Untuk proses stasioner fungsi autokovarian γ_k dan fungsi autokorrelasi ρ_k mempunyai sifat :

1. $\gamma_0 = var(Z_t)$; $\rho_0 = 1$

2. $|\gamma_k| \leq \gamma_0$; $|\rho_k| \leq 1$

3. $\gamma_k = \gamma_{-k}$ dan $\rho_k = \rho_{-k}$ untuk semua k , yakni γ_k dan ρ_k adalah fungsi genap,yang mana simetris dengan waktu asal k=0. Hal itu sesuai kenyataan bahwa selisih antara Z_t dan Z_{t+k} dan Z_t dengan Z_{t-k} adalah sama. Karena itu fungsi autocorrelasi sering diplot untuk lag nonnegatif saja.

2.3. Fungsi Autokorrelasi Parsial

Mungkin diinginkan untuk menyelidiki korrelasi antara Z_t dan Z_{t+k} setelah ketergantungan linier variabel yang menyelangi Z_{t+1} ,Z_{t+2}, ...,Z_{t+k-1} masih sedang berjalan. Korrelasi bersyarat :

$$Corr(Z_t, Z_{t+k} | Z_{t+1}, Z_{t+2}, \ldots, Z_{t+k-1}) \qquad (2.3.1)$$

biasanya disebut *autokorrelasi parsial.*

Fungsi autokorelasi parsial dapat diturunkan sebagai berikut. Pandang suatu model regresi dimana variabel terikat Z_{t+k} dari proses stasioner dengan rata-rata nol dimundurkan sebanyak k lag , Z_{t+k-1}, Z_{t+k-2}, ...dan Z_t, yaitu:

$$Z_{t+k} = \phi_{k1} Z_{t+k-1} + \phi_{k2} Z_{t+k-2} + \ldots + \phi_{kk} Z_t + e_{t+k} \qquad (2.3.2)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dimana ϕ_{ki} menyatakan parameter regresi ke-i dan e_{t+k} bentuk error normal tidak berkorelasi dengan Z_{t+k-j} untuk $j \geq 1$. Jika kedua ruas dari persamaan tersebut dikalikan dengan Z_{t+k-j} dan kemudian diambil ekspektasinya, maka akan diperoleh:

$$\gamma_j = \phi_{k1}\gamma_{j-1} + \phi_{k2}\gamma_{j-2} + \ldots + \phi_{kk}\gamma_{j-k} \tag{2.3.3}$$

Dengan demikian,

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \ldots + \phi_{kk}\rho_{j-k} \tag{2.3.4}$$

Untuk j = 1, 2, 3, ..., k dipunyai sistem persamaan:

$$\rho_1 = \phi_{k1}\rho_0 + \phi_{k2}\rho_1 + \ldots + \phi_{kk}\rho_{k-1}$$

$$\rho_2 = \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2}\rho_0 + \ldots + \phi_{kk}\rho_{k-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\rho_k = \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \ldots + \phi_{kk}\rho_0$$

Dengan menggunakan aturan Cramer, secara berturut-turut untuk k = 0, 1, 2, ... akan diperoleh :

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix}}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\phi_{33} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{bmatrix}}$$

dan secara umum akan diperoleh :

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}} \qquad (2.3.5)$$

Sebagai fungsi dari k, ϕ_{kk} biasanya disebut dengan fungsi autokorelasi parsial (FAKP).

2.4. Proses White Noise

Proses $\{a_t\}$ disebut proses white noise jika $\{a_t\}$ merupakan deret dari variabel random yang tidak berkoreasi dari distribusi yang ditetapkan dengan mean konstan $E(a_t)=\mu_a$, biasanya diasumsikan nol, variansi konstan Var $(a_t)=\sigma_a^2$ dan $\gamma_k = \text{Cov}\,(a_t\,,\, a_{t+k}) = 0$ untuk semua $k \neq 0$. Dengan demikian proses white noise $\{a_t\}$ adalah stasioner dengan fungsi autokovarian:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_a^2 & , \quad k = 0 \\ 0 & , \quad k \neq 0 \end{cases} \qquad (2.4.1)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

fungsi autokorelasi:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = 0 \\ 0 & , \quad k \neq 0 \end{cases} \tag{2.4.2}$$

dan fungsi autokorelasi parsial:

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 1 & , \quad k = 0 \\ 0 & , \quad k \neq 0 \end{cases} \tag{2.4.3}$$

2.5. Estimasi dari Mean, Autokovarian dan Autokorelasi.

Runtun waktu stasioner dicirikan oleh rata-rata μ yang konstan sepanjang waktu, variansi σ^2, autokorelasi ρ_k dan autokorelasi parsial ϕ_{kk} yang berubah cepat dari satu lag ke lag berikutnya. Berikut ini akan diestimasi mean, autokorelasi dan juga autokorelasi parsial dengan menggunakan rata-rata waktu.

2.5.1. Mean Sampel

Estimator alami untuk mean $\mu = E(Z_t)$ dari proses stasioner adalah mean sampel:

$$\bar{Z} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t \tag{2.5.1}$$

yang merupakan rata-rata waktu dari n observasi.

2.5.2. Fungsi Autokovarian Sampel

Fungsi aotokovarian diestimasi dari sampel sebagai berikut:

$$\gamma_k = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z}) \tag{2.5.2}$$

dimana $\bar{Z}$ merupakan mean dari sampel.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.5.3.Fungsi Autokorelasi Sampel

Untuk observasi runtun waktu Z_1 , Z_2 , ..., Z_n , FAK sampel didefinisikan sebagai:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{\sum_{t=1}^{n}(Z_t - \bar{Z})^2}, \qquad k = 0,1,2,... \qquad (2.5.3)$$

dimana $\bar{Z} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t$ adalah mean sampel dari deret.

Untuk proses white noise, Bartlett (1946) menunjukkan bahwa untuk k>0 dan k+j>0,

$$\mathrm{Cov}(\hat{\rho}_k, \hat{\rho}_{k+j}) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=-\infty}^{\infty}(\rho_i\rho_{i+j} + \rho_{i-k+j}\rho_{i-k} - 2\rho_k\rho_i\rho_{i-k-j} - 2\rho_{k+j}\rho_i\rho_{i-k} + 2\rho_k\rho_{k+j}\rho_i^2 \qquad (2.5.4)$$

Untuk n yang besar, $\hat{\rho}_k$ mendekati distribusi normal dengan rata-rata ρ_k dan variansi:

$$\mathrm{Var}(\hat{\rho}_k) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=-\infty}^{\infty}(\rho_i^2 + \rho_{i+k}\rho_{i-k} - 4\rho_k\rho_i\rho_{i-k} + 2\rho_k^2\rho_i^2) \qquad (2.5.5)$$

Untuk proses dimana $\rho_k = 0$ untuk k>m, pendekatan Bartlett di atas menjadi:

$$\mathrm{Var}(\hat{\rho}_k) \approx \frac{1}{n}\left(1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + ... + 2\rho_m^2\right) \qquad (2.5.6)$$

Dalam praktek ρ_i (i=1, 2, ..., m) tidak diketahui dan diwakili dengan estimasi sampel $\hat{\rho}_i$ dengan standar error $\hat{\rho}_k$:

$$S_{\hat{\rho}_k} = \sqrt{\frac{1}{n}\left(1 + 2\hat{\rho}_1^2 + 2\hat{\rho}_2^2 + ... + 2\hat{\rho}_m^2\right)} \qquad (2.5.7)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

ρ_k akan sama dengan nol apabila dipenuhi $-S\rho_k < \rho < S\rho_k$. Jika prosesnya merupakan

white noise, maka :

$$S_{\rho_k} = \sqrt{\frac{1}{n}} \tag{2.5.8}$$

sehingga apabila $-1/\sqrt{n} < \rho_k < 1/\sqrt{n}$, maka $\rho_k = 0$.

Untuk mengilustrasikan perhitungan FAK diberikan contoh dari 10. observasi runtun waktu berikut ini:

T	Z_t	Z_{t+1}	Z_{t+2}	Z_{t+3}	....	Z_{t-1}	Z_{t-2}
1	13	8	15	4	....		
2	8	15	4	4	...	13	
3	15	4	4	12		8	13
4	4	4	12	11		15	8
5	4	12	11	7		4	15
6	12	11	7	14		4	4
7	11	7	14	12		12	4
8	7	14	12			11	12
9	14	12				7	11
10	12					14	7

Mean sampel adalah $\bar{Z} = 10$, dengan demikian:

$$\rho_1 = \frac{(13-10)(8-10)+(8-10)(15-10)+...+(7-10)(14-10)+(14-10)(12-10)}{(13-10)^2+(8-10)^2+....+(14-10)^2+(12-10)^2}$$

$$= \frac{-27}{144} = -0{,}188$$

$$\rho_2 = \frac{(13-10)(15-10)+(8-10)(4-10)+...+(11-10)(14-10)+(7-10)(12-10)}{144}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= \frac{-29}{144} = -0{,}201$$

$$\rho_3 = \frac{(13-10)(4-10)+(8-10)(4-10)+\ldots+(12-10)(14-10)+(11-10)(12-10)}{144}$$

$$= \frac{26}{144} = 0{,}181$$

catatan: $$\rho_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(Z_t-\bar{Z})(Z_{t+k}-\bar{Z})}{\sum_{t=1}^{n-k}(Z_t-\bar{Z})^2} \qquad (2.5.9)$$

2.5.4. Fungsi Autokorelasi Parsial Sampel

FAKP sampel diperoleh dengan mensubstitusi ρ_i dengan $\hat{\rho}_i$ pada persamaan(2.5.4). Untuk k yang cukup besar digunakan metode rekursi dimulai dengan $\hat{\phi}_{kk} = \hat{\rho}_i$. Durbin (1960) menghitung $\hat{\phi}_{kk}$ dengan:

$$\hat{\phi}_{k+1,k+1} = \frac{\hat{\rho}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k}\hat{\phi}_{kj}\hat{\rho}_{k+1-j}}{1-\sum_{j=1}^{k}\hat{\phi}_{kj}\hat{\rho}_j} \qquad (2.5.10)$$

dan

$$\hat{\phi}_{k+1,j} = \hat{\phi}_{kj} - \hat{\phi}_{k+1,k+1}\hat{\phi}_{k,k+1-j}, \qquad j = 1,2,\ldots,k \qquad (2.5.11)$$

Dibawah hipotesis bahwa proses adalah deret white noise, variansi $\hat{\phi}_{kk}$ dapat didekati dengan

$$\mathrm{Var}(\phi_{kk}) \approx \frac{1}{n} \qquad (2.5.12)$$

Asumsi white noise akan dipenuhi apabila $-2/\sqrt{n} < \phi_{kk} < 2/\sqrt{n}$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Penghitungan ϕ_{kk} untuk data contoh diatas adalah sebagai berikut:

Dari persamaan (2.3.5), (2.5.10) dan (2.5.11) diperoleh:

$$\phi_{11} = \rho_1 = -0{,}188$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} = \frac{-0{,}201-(-0{,}188)^2}{1-(-0{,}188)^2} = -0{,}245$$

$$\hat{\phi}_{33} = \hat{\phi}_{11} - \hat{\phi}_{22}.\hat{\phi}_{11} = (-0{,}188)-(-0{,}245)(-0{,}188) = -0{,}234$$

Dengan demikian dari persamaan (2.5.10) dipunyai:

$$\phi_{33} = \frac{\rho_3 - \hat{\phi}_{21}\rho_2 - \hat{\phi}_{22}\rho_1}{1-\phi_{21}\rho_1 - \phi_{22}}$$

$$= \frac{0{,}181-(-0{,}234)(-0{,}201)-(-0{,}245)(-0{,}188)}{1-(-0{,}234)(-0{,}188)-(-0{,}245)(-0.201)} = \frac{0{,}088}{0{,}907} = 0{,}097$$

2.6. Autoregressive.

Jika harga Z pada waktu t diregresikan dengan harga sebelumnya maka:

$$\dot{Z}_t = \pi_1 \dot{Z}_{t-1} + \pi_2 \dot{Z}_{t-2} + \ldots\ldots + a_t \qquad (2.6.1)$$

dimana $\dot{Z} = Z - \mu$

atau secara equivalen

$$\pi(B)\dot{Z}_t = a_t$$

dimana $\pi(B) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_j B^j$ dan $1 + \sum_{j=1}^{\infty} |\pi_j| < \infty$ disebut dengan *autoregressive*

(AR). Jika $\pi_1 = \phi_1, \pi_2 = \phi_2, \ldots\ldots, \pi_p = \phi_p$ dan $\pi_k = 0$ untuk k>p, maka:

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\dot{Z}_t - \phi_1 \dot{Z}_{t-1} - \phi_2 \dot{Z}_{t-2} - \ldots . \phi_p \dot{Z}_{t-p} = a_t \tag{2.6.2}$$

disebut AR orde p ditulis dengan AR(p).

Dengan menerapkan operator backsift, persamaan (2.6.2) dapat ditulis menjadi :

$$(1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p)\dot{Z}_t = a_t \tag{2.6.3}$$

Dapat ditunjukkan bahwa

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \ldots + \phi_p\gamma_p + \sigma^2 \tag{2.6.4}$$

yang mengakibatkan bahwa :

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \ldots - \phi_p\rho_p} \tag{2.6.5}$$

Autokovarian dan autokorelasi mengikuti persamaan diferensial orde p :

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \ldots + \phi_p\gamma_{k-p} \quad , k > 0$$

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \ldots + \phi_p\rho_{k-p} \quad , k > 0 \tag{2.6.6}$$

P persamaan yang pertama (k = 1, 2, 3, …..;p) dari persamaan (2.6.6) disebut persamaan *Yule-Walker*. Untuk :

$$k = 1 : \rho_1 = \phi_1 + \rho_1\phi_2 + \ldots + \rho_{p-1}\phi_p$$

$$k = 2 : \rho_2 = \rho_1\phi_1 + \rho_2\phi_2 + \ldots + \rho_{p-2}\phi_p$$

…………………….

$$k = p : \rho_p = \rho_{p-1}\phi_1 + \rho_{p-2}\phi_2 + \ldots + \phi_p$$

Dalam bentuk matrik :

$$\rho = \mathbf{P}\phi$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dimana $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p)'$, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p)'$ (2.6.7)

dan

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Parameter AR ϕ, dapat dinyatakan sebagai fungsi dari autokorelasi P yang pertama dengan memecahkan sistem persamaan (2.6.7) :

$$\phi = \mathbf{P}^{-1}\rho \qquad (2.6.8)$$

Estimasi awal untuk ϕ diperoleh dengan menempatkan autokorelasi ρ_j dengan estimasi sampel $\hat{\rho}_j$.

Untuk AR(1), model Yule-Walker diberikan dengan $\rho_1 = \phi$ dan untuk AR(2):

$$\rho_1 = \phi_1 + \rho_1\phi_2$$

$$\rho_2 = \rho_1\phi_1 + \phi_2 \qquad (2.6.9)$$

yang mengakibatkan :

$$\phi_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}$$

$$\phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} \qquad (2.6.10)$$

FAK dari AR(1)

Model AR(1) adalah :

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t \qquad (2.6.11)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Agar proses menjadi stasioner maka harga mutlak ϕ_1 harus kurang dari satu. Fungsi autokovarian diperoleh sebagai berikut :

$$E(Z_{t-k}Z_t) = E(\phi_1 Z_{t-k}Z_{t-1}) + E(Z_{t-k}a_t)$$

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1}, \qquad k \geq 1 \qquad (2.6.12)$$

Dengan demikian fungsi autokorelasinya adalah :

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1}$$

$$= \phi_1^k \quad , k \geq 1 \qquad (2.6.13)$$

dimana $\rho_0 = 1$. Proses akan stasioner ketika $|\phi_1| < 1$ dan FAK akan meluruh secara eksponensial tergantung tanda dari ϕ_1. Jika $0<\phi_1<1$ semua autokorelasinya positip dan jika $-1<\phi_1<0$ tanda dari autokorelasi menunjukkan pola yang berubah dari positip ke negatip dan sebaliknya, dimulai dengan harga yang negatip.

Untuk harga ϕ_1 yang mendekati satu , yaitu ϕ_1- δ dengan δ suatu bilangan yang sangat kecil maka :

$$\rho_1 = (\phi_1-\delta)^k$$

akan meluruh sangat lambat dan hampir linier $[(1-\delta)^k \cong 1]$. Kegagalan FAK untuk meluruh secara cepat dapat diambil sebagai indikasi bahwa proses adalah nonstasioner.

FAKP dari AR(1)

Fungsi autokorelasi parsial untuk model AR(1) adalah:

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \rho_1 = \phi_1, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases} \qquad (2.6.14)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

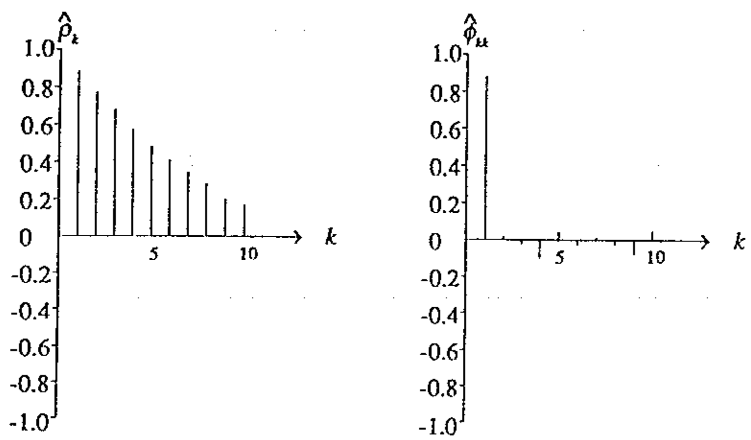
Dengan demikian FAKP dari AR(1) menunjukkan harga positif atau negatif pada lag 1 tergantung tanda dari ϕ_1, dan kemudian menghilang pada lag berikutnya (harganya nol).

Contoh:

Sebagia ilustrasi diberikan simulasi dari 250 data dari model AR(1) untuk proses $(1 - \phi_1 B)(Z_t - 10) = a_t$ dengan $\phi_1 = 0{,}9$, dimana a_t white noise ~N(0,1). FAK dan FAKP sampel ditunjukan dalam tabel 2.1 dan gambar 2.1.

Tabel 2.1. FAK dan FAKP sampel dari $(1-0{,}9B)(Z_t-10) = a_t$

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{\rho}_k$	0.88	0,76	0,67	0,57	0,48	0,40	0,34	0,28	0,21	0,17
SE	0,06	0,10	0,12	0,14	0,15	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16
$\hat{\phi}_{kk}$	0,88	0,01	-0,01	-0,11	0,02	-0,01	0,01	-0,02	-0,06	0,05
SE	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06



Gambar 2.1. FAK dan FAKP sampel dari $(1-0{,}9B)(Z_t-10) = a_t$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Secara jelas dapat dilihat bahwa ρ_k menurun secara eksponensial dan ϕ_{kk} terputus(menghilang) setelah lag 1 sebab tidak ada harga FAKP yang signifikan setelah lag 1, yaitu untuk semua k > 1, dipenuhi $-2SE < \phi_{kk} < 2SE$.

FAK dari AR(2)

Model dari AR(2) adalah:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t \tag{2.6.15}$$

Agar proses menjadi stasioner maka akar-akar dari $(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2)$ harus terletak diluar lingkaran satuan. Sebagai contoh proses $(1 - 1{,}5B + 0{,}56B^2)Z_t = a_t$ adalah stasioner, sebab $(1 - 1{,}5B + 0{,}56B^2) = (1 - 0{,}7B)(1 - 0{,}8B)$, sehingga diperoleh $B = 1/0{,}7$ dan $B = 1/0{,}8$ terletak diluar lingkaran satuan. Tetapi proses $(1 - 0{,}2B - 0{,}8B^2)Z_t = a_t$ adalah tidak stasioner sebab $(1 - 0{,}2B - 0{,}8B^2) = 0$ diperoleh B=1 tidak terletak diluar lingkaran satuan. Fungsi autokovarian dari AR(2) diberikan oleh:

$$E(Z_{t-k}Z_t) = \phi_1 E(Z_{t-k}Z_{t-1}) + \phi_2 E(Z_{t-k}Z_{t-2}) + E(Z_{t-k}a_t)$$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}, \qquad k \geq 1 \tag{2.6.16}$$

Dengan demikian fungsi autokorelasinya adalah:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \qquad k \geq 1 \tag{2.6.17}$$

FAKP dari AR(2)

Menurut (2.6.16) maka dari (2.3.5) diperoleh:

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^{\ 2}}{1 - \rho_1^{\ 2}}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{\phi_1^{\ 2} + \phi_2 - \phi_2^{\ 2}}{1 - \phi_2}\right) - \left(\dfrac{\phi_1}{1 - \phi_2}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{\phi_1}{1 - \phi_2}\right)^2}$$

$$= \frac{\phi_2\left((1-\phi_2)^2 - \phi_1^{\ 2}\right)}{\left((1-\phi_2)^2 - \phi_1^{\ 2}\right)} = \phi_2$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \phi_1 + \phi_2\rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \phi_1\rho_1 + \phi_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = 0 \qquad (2.6.18)$$

Sesuai dengan (2.6.18) maka FAKP dari AR(2) akan terputus setelah lag 2.

Contoh:

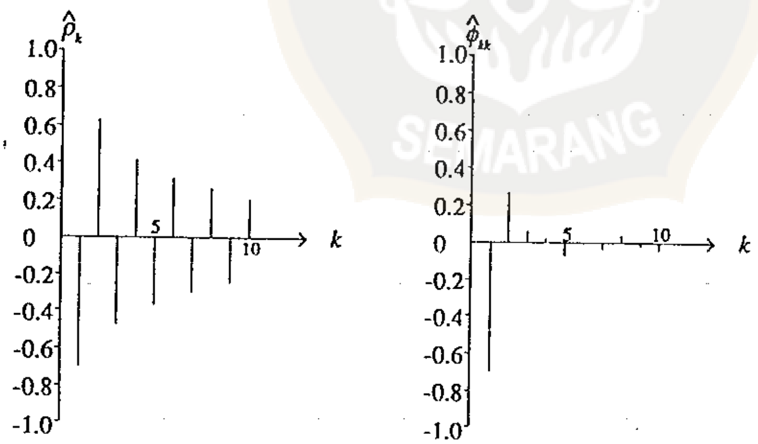
Tabel 2.2 dan gambar 2.2 menunjukkan FAK dan FAKP sampel dengan 250 data yang disimulasikan untuk AR(2) dengan model $(1 + 0{,}5B - 0{,}3B^2)Z_t = a_t$ dengan a_t white noise ~N(0,1). Pola dari autokorelasi yang berubah dari negatip ke positip maupun sebaliknya adalah sesuai dengan model AR(1) dengan ϕ_1 berharga negatip, tetapi penurunan dari autokorelasi menolak kemungkinan bentuk AR(1)

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dan pada kenyataannya ϕ_{kk} terputus setelah lag 2, yang mengindikasikan bahwa model yang sesuai adalah bentuk AR(2).

Tabel 2.2. FAK dan FAKP sampel dari $(1 + 0{,}5B - 0{,}5B^2) = a_t$

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ρ_k	-0,70	0,62	-0,48	0,41	-0,37	0,32	-0,30	0,27	-0,25	0,20
SE	0,06	0,09	0,11	0,11	0,12	0,12	0,13	0,13	0,13	0,13
ϕ_{kk}	-0,70	0,26	0,05	0,03	-0,08	0,00	-0,04	0,03	-0,01	-0,05
SE	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06



Gambar 2.2. FAK dan FAKP sampel dari proses $(1 + 0{,}5B - 0{,}3B^2)Z_t = a_t$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.7. Operator Backshift

Operator backshift yang dinotasikan dengan B mengoperasikan indeks waktu dari suatu deret yang didefinisikan sebagai :

$$B(Y_t) = Y_{t-1} \quad (2.7.1)$$

Operator backshift adalah linier, karena untuk setiap konstanta a, b dan c serta deret Y_t dan Z_t berlaku :

$$B(aY_t + bZ_t + c) = aB(Y_t) + bB(Z_t) + c \quad (2.7.2)$$

Secara umum untuk setiap bilangan positip m dan deret Y_t berlaku :

$$B^m(Y_t) = Y_{t-m} \quad (2.7.3)$$

Untuk model AR(p) :

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + a_t$$

Atau bisa ditulis sebagai :

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \dots - \phi_p Y_{t-p} = a_t \quad (2.7.4)$$

Dengan menggunakan operator backshift (2.7.4) menjadi :

$$Y_t - \phi_1 B(Y_t) - \phi_2 B^2(Y_t) - \dots - \phi_p B^p(Y_t) = a_t$$

Atau

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)Y_t = a_t \quad (2.7.5)$$

yang mana bisa dinyatakan sebagai :

$$\phi(B)Y_t = a_t$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dimana $\phi(B)$ adalah polinomial karakteristik AR. Differensi juga sering ditulis dalam bentuk B sebagai berikut :

$$\nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1} = Y_t - B(Y_t)$$

$$= (1-B)Y_t \qquad (2.7.6)$$

Dan differensi derajat dua diberikan dengan :

$$\nabla^2(Y_t) = (1-B)^2 Y_t$$

Dalam setiap masalah harus hati-hati membedakan konteks penggunaan notasi B, apakah sebagai operator backshift atau sebagai variabel.Sebagai contoh dalam persyaratan kesetasioneran biasanya harus dipenuhi bahwa harga mutlak dari akar $\phi(B)$ harus lebih besar dari 1. Maksud penggunaan notasi B pada kasus tersebut adalah sebagai variabel dumy. Jadi bukan sebagai operator backshift.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)