BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Beberapa Definisi dalam Graph

Dalam graph dikenal dengan istilah edge (garis) dan vertex (titik). Jumlah dari titik dalam sebuah graph **G** disebut dengan order, sedang jumlah dari garis disebut dengan size (ukuran). Sebuah graph dengan order p dan ukuran q disebut graph (p,q).

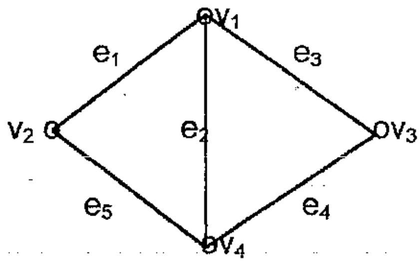
Definisi 2.1.1

Graph **G** terdiri atas himpunan yang tidak kosong dari elemen - elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu, yang disebut garis. Himpunan titik dari graph **G** disebut himpunan titik **G**, dinotasikan dengan V(**G**), dan daftar garis disebut daftar garis **G**, dinotasikan dengan E(**G**). Suatu garis berbentuk $v_1\ v_2$ atau $v_1\ v_2$ dikatakan menghubungkan v_1 dan v_2 .

Definisi 2.1.2

Dua buah titik sebarang v_i dan v_j disebut adjacent jika ada garis yang langsung menghubungkan kedua titik tersebut.

Contoh 2.1.2 :



gambar 2.1.2

Titik v_3 adjacent dengan titik v_4 membentuk garis e_4. Titik v_1 adjacent dengan titik v_4 membentuk garis e_2 .

Definisi 2.1.3

Garis e_j dikatakan incident dengan titik v_i jika titik v_i merupakan ujung dari beberapa garis e_j .

Contoh 2.1.3 :

Pada gambar 2.1.2, garis e_5 dan e_1 incident dengan titik v_2, garis e_1 dan e_2 incident dengan titik v_1, garis e_2 dan e_4 incident dengan titik v_4, dan seterusnya.

Definisi 2.1.4

Derajat (degree) dari v_i dinotasikan deg v_i adalah banyaknya garis yang incident dengan titik v_i .

Contoh 2.1.4 :

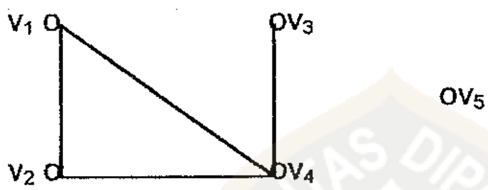
Deg v_1 = deg v_4 = 3, deg v_2 = deg v_3 = 2

Definisi 2.1.5

Suatu titik dari derajat 0 sebagai suatu titik terisolasi (titik asing), sedang titik dari derajat 1 merupakan titik akhir (end-vertex).

Contoh 2.1.5 :

G :



Gambar 2.1.5

- v_5 merupakan titik asing karena mempunyai derajat 0.
- v_3 merupakan titik akhir karena mempunyai derajat 1

Definisi 2.1.6

Suatu titik adalah genap atau ganjil menurut apakah derajatnya merupakan derajat genap atau ganjil.

Contoh 2.1.6 :

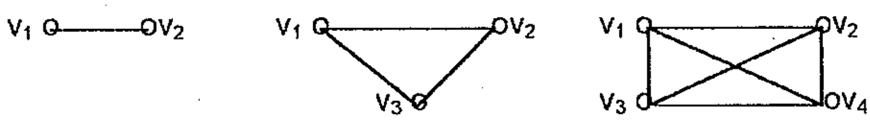
Pada gambar 2.1.5: - v_1 , v_2 , merupakan titik genap.

- v_3 dan v_4 merupakan titik ganjil

Definisi 2.1.7

Suatu graph dikatakan regular jika setiap titik dari graph tersebut mempunyai derajat yang sama.

Contoh 2.1.7 :



gambar 2.1.7

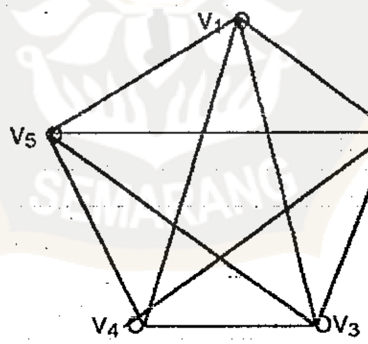
graph reguler derajat 1,2, dan 3

Definisi 2.1.8

Sebuah graph **G** merupakan r-regular atau regular dari derajat r jika titik dari **G** mempunyai derajat r.

Contoh 2.1.8 :

G :



gambar 2.1.8

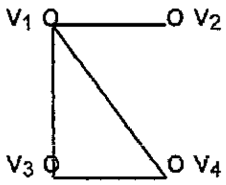
Graph **G** merupakan graph 4-regular

Definisi 2.1.9

Komplemen $\overline{\mathbf{G}}$ dari graph **G** yaitu graph dengan $V(\mathbf{G}) = V(\overline{\mathbf{G}})$, dan sedemikian sehingga $v_1 v_2$ merupakan garis dari $\overline{\mathbf{G}}$ dan bukan merupakan garis dari **G**.

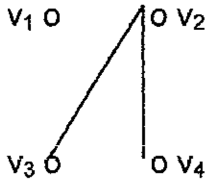
Contoh 2.1.9 :

G : $\overline{G}$:



gambar 2.1.9a

graph G



gambar 2.1.9b

komplemen dari graph $\overline{G}$

2.2. Walk dan Path

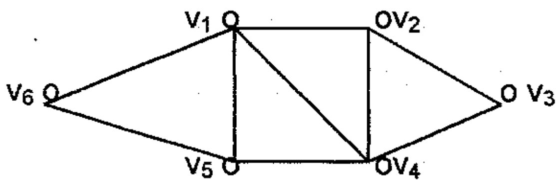
Definisi 2.2.1

Suatu walk (jalan) yang panjangnya k dalam graph G adalah urutan k garis G yang berbentuk

$$v_1 v_2 , v_2 v_3 , v_3 v_4 , \ldots, v_{n-2} v_{n-1} , v_{n-1} v_n$$

jalan ini dinotasikan dengan $v_1 v_2 v_3 , \ldots, v_{n-1} v_n$ dan disebut jalan antara v_1 dan v_n .

Contoh 2.2.1 :



gambar.2.2.1

$v_6 v_1 v_2 v_3 v_4 v_2 v_1 v_5 v_4$ adalah jalan yang panjangnya 8 antara v_6 dan v_4, yang memuat garis $v_1 v_2$ dua kali, titik v_1 , v_2, dan v_4 dua kali.

Definisi 2.2.2

Jika semua garis (tetapi tidak perlu semua titik) suatu jalan berbeda, maka jalan itu disebut **trail**. Jika semua titiknya juga berbeda, maka trail itu disebut **path**.

Contoh 2.2.2 :

Pada gambar 2.2.1, jalan $v_1\ v_5\ v_4\ v_2\ v_3\ v_4$ adalah trail yang bukan path (karena titik v_4 ada dua), sedang pada jalan $v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5$ tidak ada titik yang diulang, karena itu merupakan path.

Definisi 2.2.3

Suatu jalan tertutup dalam graph **G** merupakan urutan garis **G** berbentuk

$$v_1\ v_2\ , v_2\ v_3\ , v_3\ v_4\ , \ldots , v_{n-2}\ v_{n-1}\ , v_{n-1}\ v_n\ , v_n\ v_1$$

jika semua garisnya berbeda, maka jalan tersebut disebut trail tertutup. Jika titik - titiknya juga berbeda maka trail itu disebut **sikel**.

Contoh 2.2.3 :

Dalam gambar 2.2.1, jalan tertutup $v_6\ v_1\ v_2\ v_4\ v_1\ v_5\ v_6$ adalah trail tertutup yang bukan merupakan sikel (karena titik v_1 muncul dua kali), sedang trail tertutup $v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_1$ dan $v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_1$ semuanya adalah sikel.

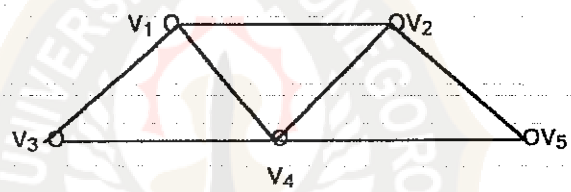
Untuk setiap pasangan dari titik dalam graph yang dihubungkan dengan path disebut **graph terhubung**.

Definisi 2.2.4

Graph terhubung yang tidak memuat sikel disebut dengan **tree** (pohon).

Contoh 2.2.4 :

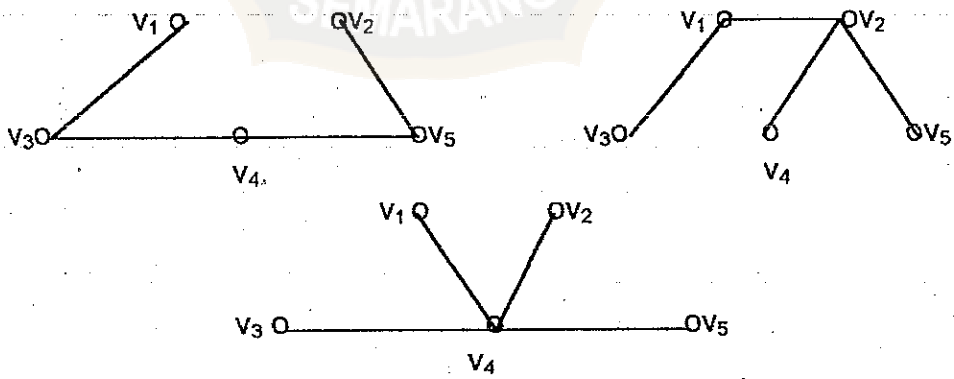
G :



gambar 2.2.4a

graph **G** yang memuat sikel

Pohon dari graph di atas adalah :



gambar 2.2.4b

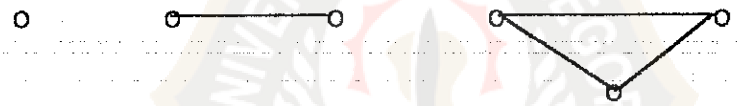
pohon dari graph **G**

2.3 Graph Khusus

Definisi 2.3.1

Graph yang setiap dua titiknya yang berbeda dihubungkan dengan tepat satu garis yang mempunyai order p ukuran q = $\binom{p}{2}$ = $\frac{p!}{2!\,(p-2)!}$ = p(p-1)/2 disebut dengan **graph komplit**. Graph komplit dinotasikan dengan K_p.

Contoh 2.3.1 :



K_1 K_2 K_3

gambar 2.3.1

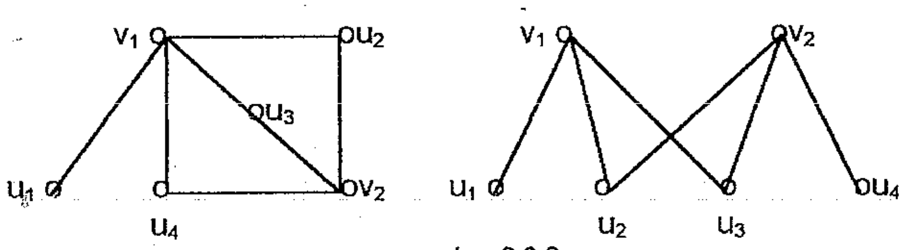
graph komplit order 1,2, dan 3

Definisi 2.3.2

Suatu graph **G** adalah bipartit jika V(**G**) dapat dibagi dalam dua subset yang tidak kosong V dan U sedemikian sehingga setiap garis dari **G** menghubungkan satu titik dari V dan satu titik dari U.

Contoh 2.3.2 :

G :



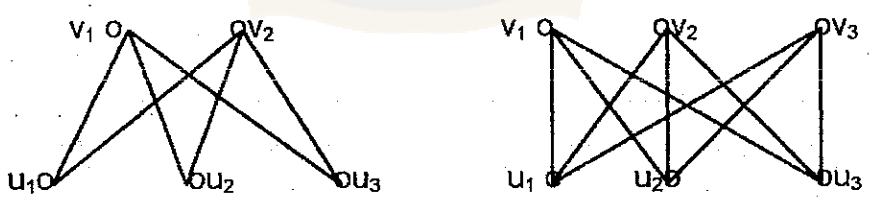
gambar 2.3.2

graph bipartit **G**

Definisi 2.3.3

Suatu graph **G** adalah bipartit komplit bila V(**G**) dapat dibagi dalam dua subset yang tidak kosong V dan U sedemikian sehingga masing - masing titik dari V adjacent pada setiap titik dari U..

Contoh 2.3.3 :



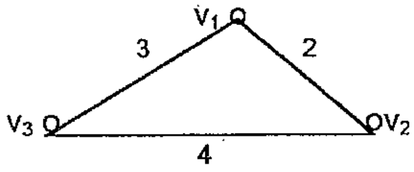
gambar 2.3.3

graph bipartit komplit

Definisi 2.3.4

Graph berbobot adalah graph **G** yang garis - garisnya e mempunyai bobot positip w(e)

Contoh 2.3.4 :



gambar 2.3.4

graph berbobot

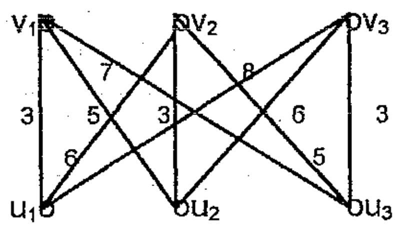
Pada gambar 2.3.4 garis-garisnya mempunyai bobot positif sebagai berikut :

$w(e_1 = v_1 v_2) = 2$, $w(e_2 = v_2 v_3) = 4$, $w(e_3 = v_3 v_1) = 3$

Definisi 2.3.5

Suatu graph dikatakan graph bipartit komplit berbobot jika suatu graph bipartit komplit yang garis - garisnya e mempunyai bobot positif w(e).

Contoh 2.3.5 :



gambar 2.3.5

graph bipartit komplit berbobot

Gambar 2.3.5 garis-garisnya mempunyi bobot yang dapat digambarkan dalam bentuk matrik sebagai berikut :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 6 \\ 8 & 6 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

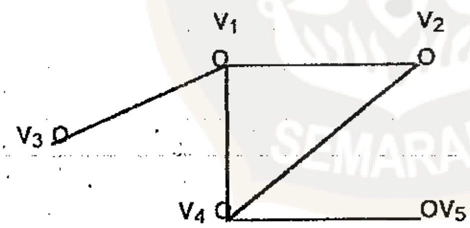
2.4 Subgraph

Definisi 2.4.1

Sebuah graph H merupakan suatu subgraph dari **G** jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.

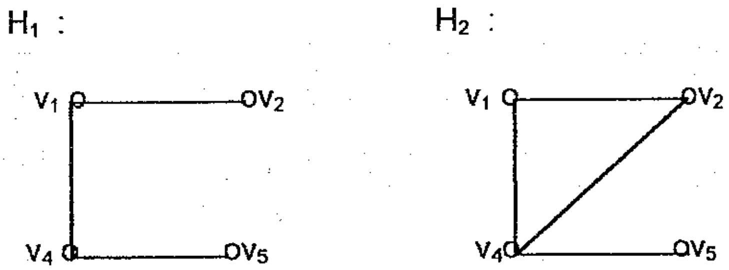
Contoh 2.4.1 :

G :



gambar 2.4.1a

graph **G**



gambar 2.4.1b

subgraph dari **G**

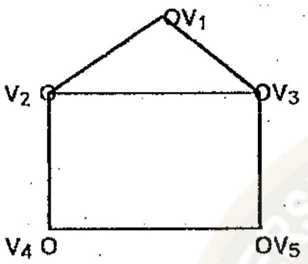
H_1 dan H_2 merupakan subgraph dari **G**.

Definisi 2.4.2

Sebuah subgraph **H** dari sebuah graph **G** merupakan suatu spanning subgraph dari **G** jika V(H) = V(**G**).

Contoh 2.4.2 :

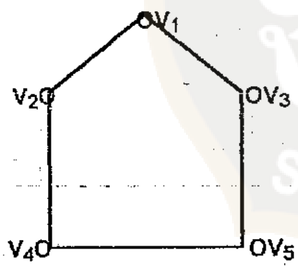
G :



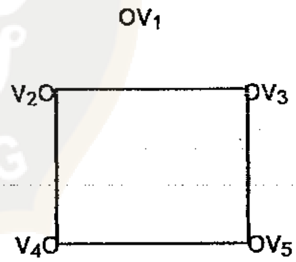
gambar 2.4.2a

graph **G**

H1:



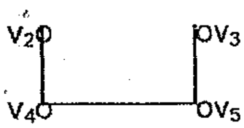
H2 :



gambar 2.4.2b

spanning subgraph dari **G**

H3 :



gambar 2.4.2c

bukan spanning dari graph **G**

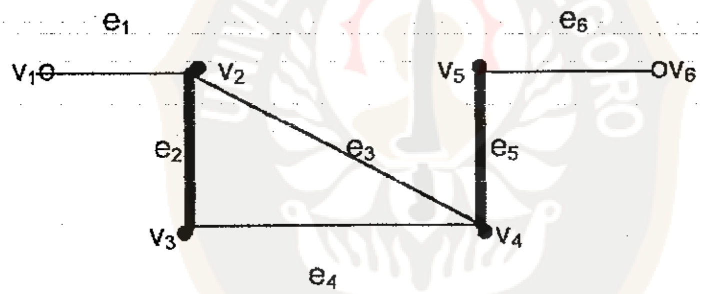
H_1 dan H_2 merupakan spanning subgraph dari **G**, sedang H_3 bukan spanning subgraph dari **G** karena $V(H_3) \neq V(\mathbf{G})$.

2.5. Matching

Definisi 2.5.1

Suatu matching dalam graph **G** adalah subgraph 1-regular pada **G** yang disebabkan oleh kumpulan dari pasangan garis yang tidak adjacent.

Contoh 2.5.1 :



gambar. 2.5.1

Pada gambar 2.5.1 yang merupakan matching dari **G** adalah $M=\{v_2 v_3, v_5 v_4\}$

Definisi 2.5.2

Suatu titik bebas adalah titik yang tidak berada dalam matching.

Contoh 2.5.2 :

Titik bebas dari gb. 2.5.1 adalah v_1 dan v_6

Definisi 2.5.3

Suatu path berayun adalah path yang garisnya berada dalam matching maupun yang tidak dalam matching. Jika path berayun dimulai dan diakhiri dengan titik bebas disebut dengan path perluasan.

Contoh 2.5.3 :

Pada gambar 2.5.1 yang merupakan path berayun adalah $v_1v_2v_3v_4$, $v_2v_4v_5v_6$. Sedang path perluasan pada gambar 2.5.1 adalah v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 .

Definisi 2.5.4

Sebuah titik dikatakan titik matched jika titik tersebut berkenaan dengan matching, sedang sebuah garis dikatakan garis matched jika garis tersebut berkenaan dengan matching, dan suatu garis disebut garis unmatched jika garis tersebut tidak berkenaan dengan matching.

Contoh 2.5.4 :

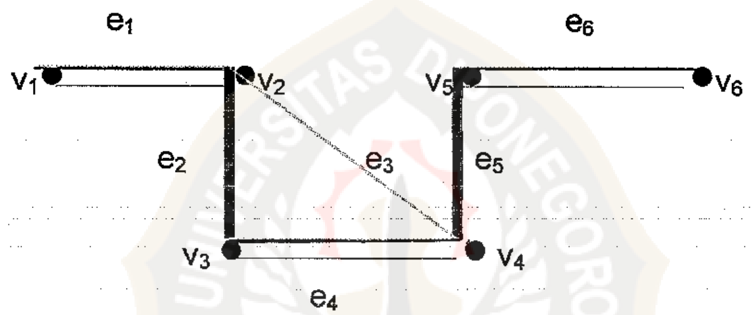
Pada gambar 2.5.1 v_2 , v_5 , v_3 , v_4 merupakan titik matched, e_2 dan e_5 merupakan garis matched, sedang e_1, e_3, e_4, e_6 disebut garis unmatched.

2.6. Matching Maksimum dan Matching Bobot Maksimum

Definisi 2.6.1

Harga pokok suatu matching adalah banyaknya garis yang membentuk matching dalam **G** dengan notasi $|\,|$. Sebuah matching dari harga pokok maksimum dalam suatu graph **G** disebut dengan **matching maksimum**.

Contoh 2.6.1 :



gambar. 2.6.1

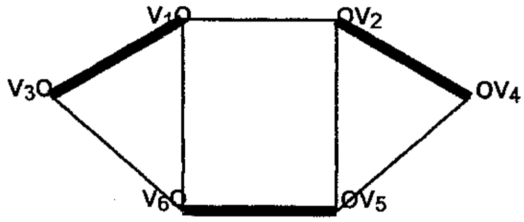
Dalam graph **G** di atas himpunan **M** = {$v_2\, v_3$, $v_5\, v_4$ } merupakan **matching**, sedang **M'** = {$v_1\ v_2$,$v_3\ v_4$,$v_5\ v_6$ } merupakan **matching maksimum**, karena **M'** mempunyai harga pokok maksimum, yaitu :

$$|\mathbf{M}| = 2 \quad \text{dan} \quad |\mathbf{M'}| = 3$$

Definisi 2.6.2

Jika **G** merupakan graph dengan order p yang mempunyai matching dengan harga pokok p/2, maka matching tersebut disebut **matching perfek**.

Contoh 2.6.2 :



gambar 2.6.2

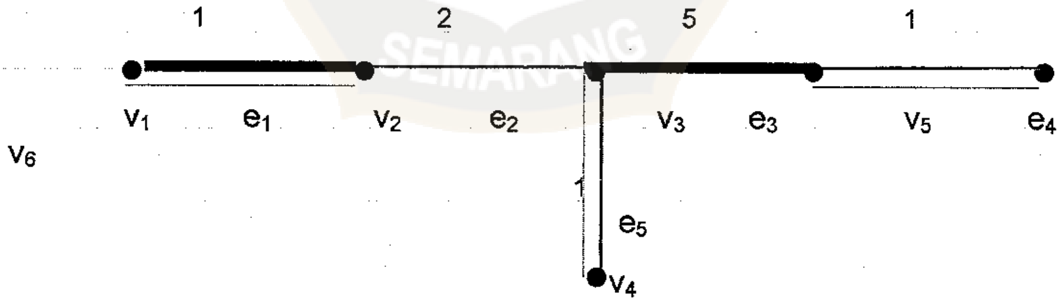
matching perfek

Gambar 2.6.2 merupakan matching perfek kerena mempunyai harga pokok matching p/2=6/2=3, yaitu : **M =** $\{v_1v_3,\ v_2v_4,\ v_5v_6\}$.

Definisi 2.6.3

Suatu matching bobot maksimum dalam graph berbobot merupakan suatu matching yang jumlah dari bobot garisnya maksimum.

Contoh 2.6.3 :



gambar. 2.6.3

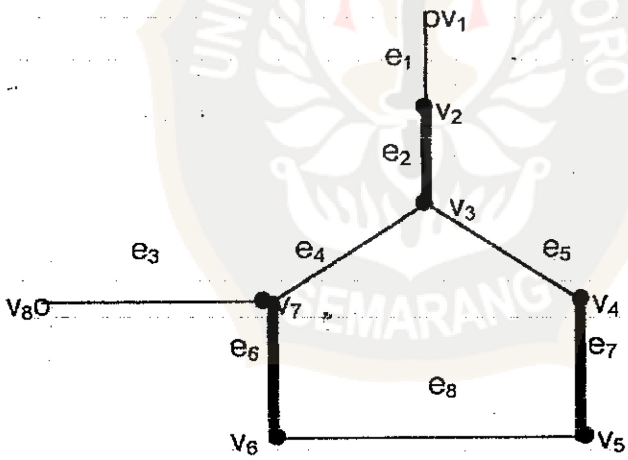
Gambar 2.6.3 menunjukkan bahwa matching **M*** = $\{v_1v_2,\ v_3\ v_5\}$ merupakan matching bobot maksimum, sedang **M'**=$\{\ v_1v_2,\ v_5v_6,\ v_3v_4\ \}$ bukan merupakan matching bobot maksimum, karena w(**M***)=6, sedang w(**M**)=3.

2.6.1 Perluasan Matching Sekitar Path Perluasan

Misal **M** sebuah matching dalam graph **G**, dan andaikan bahwa P sebuah path perluasan yang berkenaan dengan **M**. Misal **M'** menunjukkan himpunan garis dari P termasuk pada **M**, dan misalkan **M''** = E(P) - **M'**. Himpunan $M_1 = (M - M') \cup M''$ dan amati bahwa M_1 adalah matching untuk **G** yang mempunyai harga pokok $|M| + 1$. Dikatakan bahwa M_1 dihasilkan dengan memperluas **M** sekitar P.

Contoh 2.6.1.1 :

G :



(a)

Dari graph **G** di atas didapatkan hasil sebagai berikut ;

$M = \{ v_2v_3, v_4v_5, v_6v_7 \}$

$P = v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8$

$M' = \{ v_2v_3, v_4v_5, v_6v_7 \}$

$M`` = E(P) - M$

$= \{ v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8 \} - \{ v_2v_3, v_4v_5, v_6v_7 \}$

$= \{ v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, v_7v_8 \}$

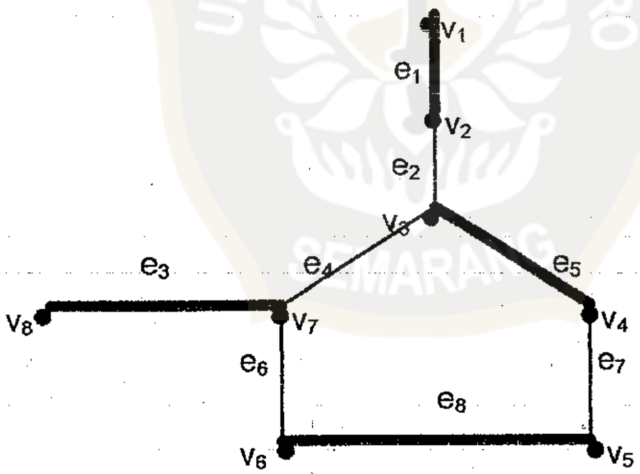
$M_1 = (M - M`) \cup M``$

$= (\{v_2v_3, v_4v_5, v_6v_7 \} - \{ v_2v_3, v_4v_5, v_6v_7 \}) \cup \{ v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, v_7v_8 \}$

$M_1 = \{ v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, v_7v_8 \}$

M_1 merupakan matching yang dihasilkan dari perluasan matching sekitar path perluasan P yang digambarkan pada graph berikut ;

G :



(b)

gambar. 2.6.1.1

memperluas **M** sekitar P

Gambar 2.6.1.1 merupakan perluasan matching sekitar path perluasan. Dalam gb. 2.6.1.1 (a) menunjukkan graph **G** dan matching **M** yang garis - garisnya ditunjukkan dengan garis tebal. Titik matched ditebalkan sedang titik bebas tidak. Gb. 2.6.1.1 (b) menunjukkan graph **G** dan matching **M_1**

yang dihasilkan dengan memperluas **M** sekitar path perluasan P : v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8 .

Theorema 2.6.1

Suatu matching **M** dalam graph **G** adalah maksimum jika dan hanya jika tidak ada path perluasan yang berkenaan dengan **M** dalam **G**.

Bukti :

$\Rightarrow$ Jika **M** matching maksimum dalam **G** maka tidak ada path perluasan yang berkenaan dengan **M** dalam **G**.

Andaikan ada path perluasan P yang berkenaan dalam **M**. Kemudian dengan menggunakan cara perluasan matching sekitar path perluasan seperti pada sub bab 2.6.1, maka diperoleh matching dengan harga pokok $|\mathbf{M'}| = |\mathbf{M}|+1$. Sehingga **M** bukan merupakan matching maksimum. Kontradiksi, karena diketahui bahwa **M** adalah matching maksimum. Sehingga yang benar adalah jika **M** merupakan matching maksimum maka tidak ada path perluasan.

$\Leftarrow$ Jika tidak ada path perluasan yang berkenaan dengan **M** dalam **G** maka **M** adalah matching maksimum.

Ambil **M** suatu matching yang tidak mempunyai path perluasan yang berkenaan dengan **M**. Ambil **M'** merupakan matching maksimum. Sehingga **M'** juga tidak mempunyai path perluasan yang berkenaan dengan **M'**.

Dari pengandaian tersebut didapat suatu harga pokok yang sama yaitu 2 (dua). Sehingga $|M| = |M'| = 2$.

Jadi terbukti bahwa **M** merupakan matching maksimum.